Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Routenplanung

3. Vorlesung, Sommersemester 2022

Tim Zeitz | 2. Mai 2022

Kürzeste Wege in Straßennetzwerken

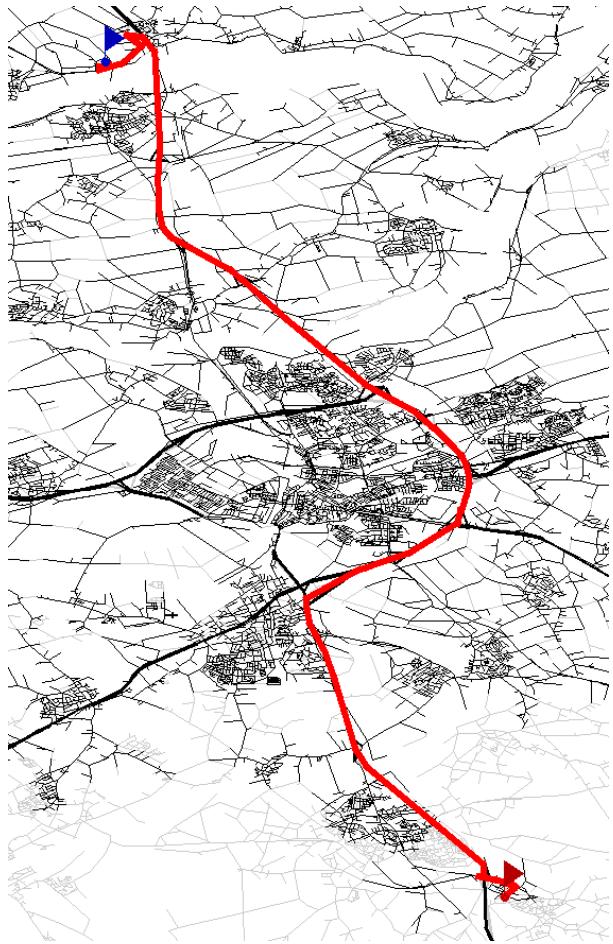
Beschleunigungstechniken

- A*
- ALT
- CALT

Beschleunigungstechniken

Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen



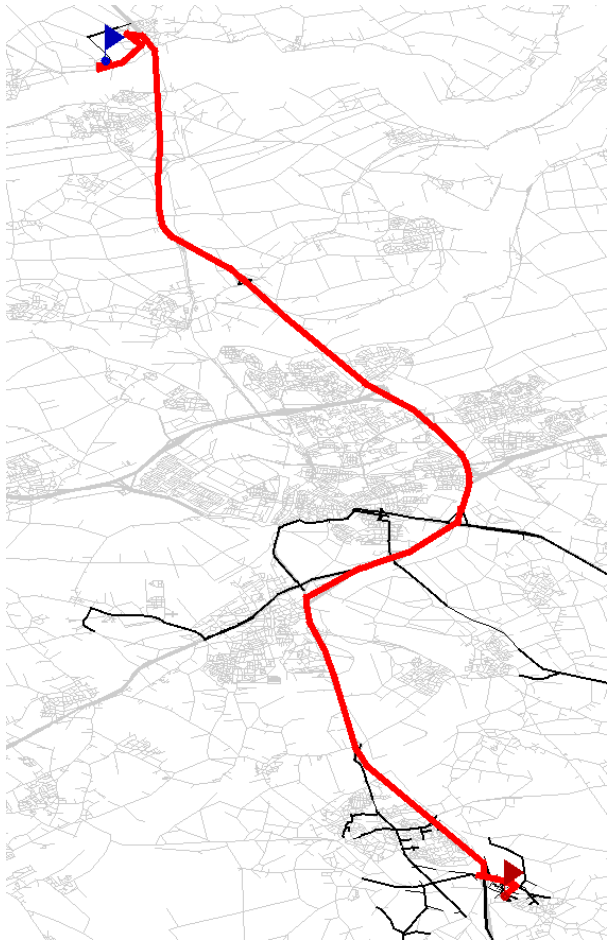
Beschleunigungstechniken

Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

Idee:

- Zwei Phasen
  - Offline: Generiere Zusatzinformation in Vorberechnung
  - Online: Beschleunige Anfrage mit dieser Information
- Drei Kriterien: Vorberechnungsplatz, Vorberechnungszeit, Beschleunigung



Ideensammlung

Wie Suche zielgerichtet machen?

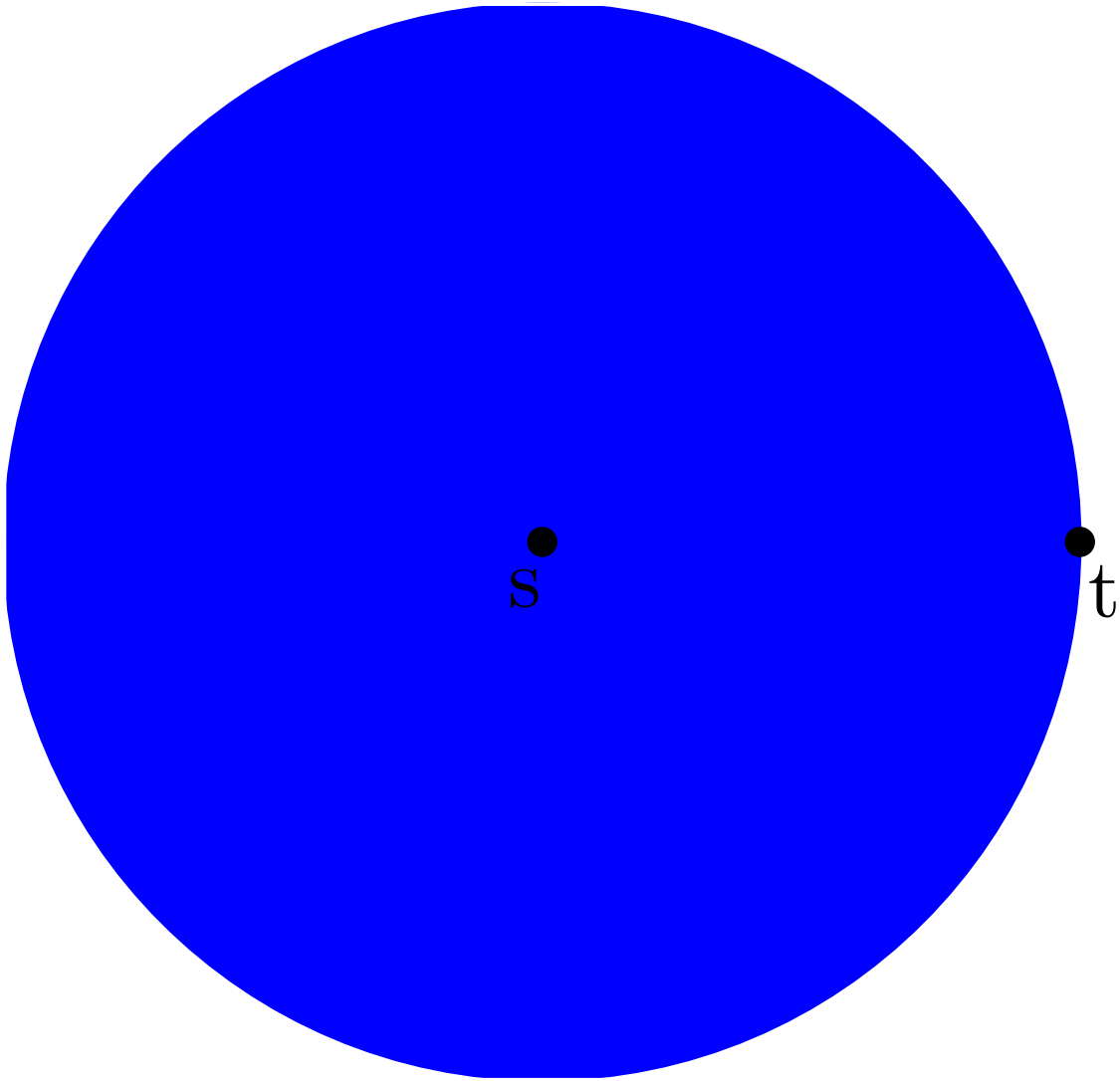
Ideensammlung

Wie Suche zielgerichtet machen?

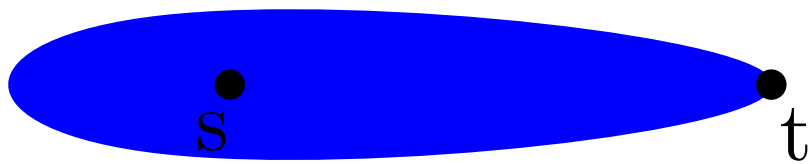
- Reihenfolge in der Knoten besucht werden ändern
- Nichtbeachten von Kanten, die in die “falsche” Richtung führen

Jetzt: ersteres

Schematischer Suchraum



Schematischer Suchraum



A*

A*

Dijkstra's Algorithmus

- benutzt $d[v]$, um zu entscheiden, welcher Knoten als nächstes abgearbeitet wird

A*

- auch zielgerichtete Suche (goal-directed search) genannt

Idee:

- Benutze Potential $\pi_t : V \to \mathbb{R}$
- $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für Entfernung $d(v, t)$ zum Ziel t
- Benutze $d[v] + \pi_t(v)$ als Key in Q

$\Rightarrow$ Knoten mit geschätzt geringerer Entfernung zu t zuerst besucht

Pseudocode A*

A*$(G = (V, E), s, t)$

```
1  d[s] = 0
2  Q.clear(), Q.add(s, π_t(s))
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      break if u = t
6      forall edges e = (u, v) ∈ E do
7          if d[u] + len(e) < d[v] then
8              d[v] ← d[u] + len(e)
9              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v] + π_t(v))
10
11             else Q.insert(v, d[v] + π_t(v))
```

Frage

Können beliebige Potentialfunktionen benutzt werden?

Frage

Können beliebige Potentialfunktionen benutzt werden?

- (Fast) beliebige Abarbeitungsreihenfolgen lassen sich erzeugen
- Dies kann offensichtlich zu falschen Ergebnissen führen.
  Warum sonst benutzen wir überhaupt Dijkstra und nicht Breitensuche?

Wie kommen wir also zu zulässigen Potentialfunktionen?

A* – Äquivalente Formulierung

A* auf Graph $G = (V, E, \text{len})$, Knoten $s, t \in V$, mit Potential π_t

A* – Äquivalente Formulierung

Karlsruher Institut für Technologie

A* auf Graph $G = (V, E, \text{len})$, Knoten $s, t \in V$, mit Potential π_t

Dijkstra auf $\overline{G} = (V, E, \overline{\text{len}})$ mit $\overline{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

A* – Äquivalente Formulierung

A* auf Graph $G = (V, E, \text{len})$, Knoten $s, t \in V$, mit Potential π_t

Dijkstra auf $\overline{G} = (V, E, \overline{\text{len}})$ mit $\overline{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

Beweis: Folgt direkt aus Pseudocode

A* – Äquivalente Formulierung

A* auf Graph $G = (V, E, \text{len})$, Knoten $s, t \in V$, mit Potential π_t

Dijkstra auf $\overline{G} = (V, E, \overline{\text{len}})$ mit $\overline{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

Beweis: Folgt direkt aus Pseudocode

Zulässiges Potential (feasible potential)

Eine Potentialfunktion $\pi_t : V \to \mathbb{R}$ heißt *zulässig*, falls
$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) \geq 0$ für alle Kanten $(u, v) \in E$.

A* – Äquivalente Formulierung

A* auf Graph $G = (V, E, \text{len})$, Knoten $s, t \in V$, mit Potential π_t

Dijkstra auf $\overline{G} = (V, E, \overline{\text{len}})$ mit $\overline{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

Beweis: Folgt direkt aus Pseudocode

Zulässiges Potential (feasible potential)

Eine Potentialfunktion $\pi_t : V \to \mathbb{R}$ heißt *zulässig*, falls
$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) \geq 0$ für alle Kanten $(u, v) \in E$.

Es gilt für jeden Pfad $P = (s = v_1, \ldots, v_k = t)$

$$\begin{aligned}
\overline{\text{len}}(P) &= \sum_{i=1}^{k} \overline{\text{len}}(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k} (\text{len}(v_i, v_{i+1}) - \pi_t(v_i) + \pi_t(v_{i+1})) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} \text{len}(v_i, v_{i+1}) \right) - \pi_t(v_1) + \pi_t(v_k) \\
&= \text{len}(P) - \pi_t(s) + \pi_t(t).
\end{aligned}$$

Ein Beispiel - Euklidische Ebene

- Knoten sind Punkte in der (euklidischen) Ebene
- Kantenlängen sind euklidische Abstände (d.h. $\text{len}(u, v) = \|u - v\|_2$).
- $\pi_t(v) = \|v - t\|_2$

Ein Beispiel - Euklidische Ebene

- Knoten sind Punkte in der (euklidischen) Ebene
- Kantenlängen sind euklidische Abstände (d.h. $\text{len}(u, v) = \|u - v\|_2$).
- $\pi_t(v) = \|v - t\|_2$

π_t ist zulässiges Potential, denn

$$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) = \|u - v\|_2 - \|u - t\|_2 + \|v - t\|_2 \geq 0$$

wegen Dreiecksungleichung ($\triangle$-UGL)

$$\|u - v\|_2 + \|v - t\|_2 \geq \|u - t\|_2$$

Ein Beispiel II

Idee:

- Knoten besitzen Geokoordinaten
- Kanten besitzen Fahrtgeschwindigkeiten
- es gibt eine Maximalgeschwindigkeit $v_{\max}$ in G
- nimm $\|u - t\|_2 / v_{\max}$ als Potential

Ein Beispiel II

Idee:

- Knoten besitzen Geokoordinaten
- Kanten besitzen Fahrtgeschwindigkeiten
- es gibt eine Maximalgeschwindigkeit $v_{\max}$ in G
- nimm $\|u - t\|_2 / v_{\max}$ als Potential

Ist zulässiges Potential, denn

$$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) = \frac{\|u - v\|_2}{v_{(u,v)}} - \frac{\|u - t\|_2}{v_{\max}} + \frac{\|v - t\|_2}{v_{\max}} \geq 0$$

Ein Beispiel II

Idee:

- Knoten besitzen Geokoordinaten
- Kanten besitzen Fahrtgeschwindigkeiten
- es gibt eine Maximalgeschwindigkeit $v_{\max}$ in G
- nimm $\|u - t\|_2 / v_{\max}$ als Potential

Ist zulässiges Potential, denn

$$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) = \frac{\|u - v\|_2}{v_{(u,v)}} - \frac{\|u - t\|_2}{v_{\max}} + \frac{\|v - t\|_2}{v_{\max}} \geq 0$$

Probleme (bei Straßengraphen):

- Overhead zur Berechnung des Potentials $\|u - t\|_2 / v_{\max}$
- Schlechte untere Schranke an die tatsächliche Reisezeit
- deswegen praktisch keine Beschleunigung in Transportnetzen

Zulässige Potentiale – Eigenschaften

- Intuition: $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für $d(v, t)$
- Falls π_t zulässig und $\pi_t(t) = 0$, so ist das Potential $\pi_t(v)$ eine untere Schranke für $d(v, t)$.
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume

Zulässige Potentiale – Eigenschaften

- Intuition: $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für $d(v, t)$
- Falls π_t zulässig und $\pi_t(t) = 0$, so ist das Potential $\pi_t(v)$ eine untere Schranke für $d(v, t)$.
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume
- Ist $\pi_t(v) = d(v, t)$ für alle $v \in V$, so werden nur Knoten auf kürzesten s-t-Wegen abgearbeitet.

Zulässige Potentiale – Eigenschaften

- Intuition: $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für $d(v, t)$
- Falls π_t zulässig und $\pi_t(t) = 0$, so ist das Potential $\pi_t(v)$ eine untere Schranke für $d(v, t)$.
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume
- Ist $\pi_t(v) = d(v, t)$ für alle $v \in V$, so werden nur Knoten auf kürzesten s-t-Wegen abgearbeitet.
- π und $\pi + c, c \in \mathbb{R}$ haben gleiche reduzierte Kosten

Kombinierbarkeit von Potentialen

Kombinierbarkeit von Potentialen

Seien π_1 und π_2 zulässige Potentiale. Dann ist $p = \max\{\pi_1, \pi_2\}$ (komponentenweises Maximum) auch ein zulässiges Potential.

Kombinierbarkeit von Potentialen

Kombinierbarkeit von Potentialen

Seien π_1 und π_2 zulässige Potentiale. Dann ist $p = \max\{\pi_1, \pi_2\}$ (komponentenweises Maximum) auch ein zulässiges Potential.

Herleitung

$$\begin{aligned} \text{len}(u,v) - \pi_t^1(u) + \pi_t^1(v) &\geq 0 \\ \text{len}(u,v) - \pi_t^2(u) + \pi_t^2(v) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{len}(u,v) - \pi_t^1(u) + \max\{\pi_t^1(v), \pi_t^2(v)\} &\geq 0 \\ \text{len}(u,v) - \pi_t^2(u) + \max\{\pi_t^1(v), \pi_t^2(v)\} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{len}(u,v) - \max\{\pi_t^1(u), \pi_t^2(u)\} + \max\{\pi_t^1(v), \pi_t^2(v)\} \geq 0$$

Unzulässige Potentiale?

- Intuition: $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für $d(v, t)$
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume

Unzulässige Potentiale?

- Intuition: $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für $d(v, t)$
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume
- Reicht auch: $\pi_t(v) \leq d(v, t)$

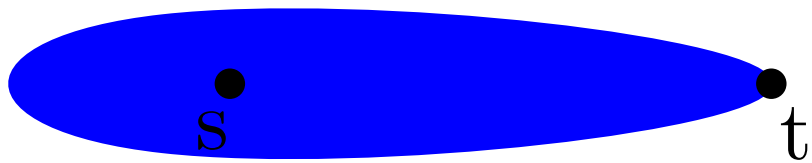
Unzulässige Potentiale?

- Intuition: $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für $d(v, t)$
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume
- Reicht auch: $\pi_t(v) \leq d(v, t)$
- Induktiv: alle Knoten auf kürzestem Weg werden vor t abgearbeitet.
- Aber möglicherweise exponentielle Laufzeit
  - negative reduzierte Kantengewichte
  - nicht label-setting

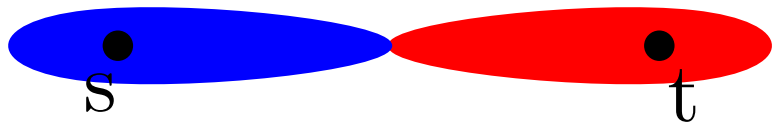
Unzulässige Potentiale?

- Intuition: $\pi_t(v)$ ist ein Schätzwert für $d(v, t)$
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume
- Reicht auch: $\pi_t(v) \leq d(v, t)$
- Induktiv: alle Knoten auf kürzestem Weg werden vor t abgearbeitet.
- Aber möglicherweise exponentielle Laufzeit
  - negative reduzierte Kantengewichte
  - nicht label-setting
  - Praktisch oft kein Problem

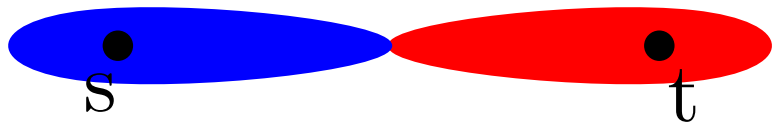
Bidirektionaler A*



Bidirektionaler A*



Bidirektionaler A*



Zur Erinnerung Bidirektionaler Dijkstra:

- alternierende/parallele Vorwärts- und Rückwärtssuche
- Vorwärts- $\overrightarrow{Q}$ und Rückwärtsqueue $\overleftarrow{Q}$
- Tentative Distanz μ
- Abbruchkriterium: $\mu \leq \mathit{minKey}(\overrightarrow{Q}) + \mathrm{minKey}(\overleftarrow{Q})$?

Bidirektionaler A*

Erster Ansatz:

- benutze Vorwärtspot. π_f und Rückwärtspot. π_b

Bidirektionaler A*

Erster Ansatz:

- benutze Vorwärtspot. π_f und Rückwärtspot. π_b

Problem:

Bidirektionaler A*

Erster Ansatz:

- benutze Vorwärtspot. π_f und Rückwärtspot. π_b

Problem:

- Suchen operieren auf unterschiedlichen Längenfunktionen

$\Rightarrow$ Abbruchkriterium Bidirektionaler Dijkstra funktioniert nicht mehr

- konservatives Abbruchkriterium: stoppe erst, wenn $\mathit{minKey}(\overrightarrow{Q}) > \mu$ oder $\mathit{minKey}(\overleftarrow{Q}) > \mu$

Bidirektionaler A*

Zweiter Ansatz:

- Wann operieren Suchen auf dem gleichen Graphen?
- wenn reduzierte Kosten gleich:

$$\begin{aligned} \text{len}_{\pi_b}(v,u) &= \text{len}_{\pi_f}(u,v) \\ \text{len}(u,v) - \pi_b(v) + \pi_b(u) &= \text{len}(u,v) - \pi_f(u) + \pi_f(v) \\ -\pi_b(v) + \pi_b(u) &= -\pi_f(u) + \pi_f(v) \\ \pi_b(u) + \pi_f(u) &= \pi_b(v) + \pi_f(v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Also muss gelten: $\pi_b + \pi_f \equiv \text{const.}$

Bidirektionaler A*

Idee:

- Kombiniere π_f und π_b zu $p_f + p_b \equiv 0$:

$$p_f = \frac{\pi_f - \pi_b}{2} \qquad p_b = \frac{\pi_b - \pi_f}{2} = -p_f$$

- $-\pi_b$ ist ein zulässiges Potential auf $\overrightarrow{G}$
- $\sim$ Durchschnitt der reduzierten Kosten

Somit

- wie bidirektionaler Dijkstra
- aber mit $d(s,u) + p_f(u)$ und $d(v,t) + p_b(v)$ als keys
- stoppe wenn $minKey(\overrightarrow{Q}) + minKey(\overleftarrow{Q}) > \mu_{p_f} = \mu + p_f(s) - p_f(t) \quad = \mu$
- dadurch bidirektional zielgerichtet

Bidirektionaler A*

Dritter Ansatz:

- Konservatives Abbruchkriterium – aber stärkeres Pruning!
- Prune Kanten (u, v) in der Vorwärtssuche für die

$$\overrightarrow{d[u]} + \text{len}(u, v) + \mathit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v) \geq \mu$$

- und rückwärts analog.

Bidirektionaler A*

Dritter Ansatz:

- Konservatives Abbruchkriterium – aber stärkeres Pruning!
- Prune Kanten (u, v) in der Vorwärtssuche für die

$$\overrightarrow{d[u]} + \text{len}(u, v) + \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v) \geq \mu$$

- und rückwärts analog.
- Entweder v in der Rückwärtssuche schon gesettled
- oder $d(v, t) + \pi_b(v) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q})$

Bidirektionaler A*

Dritter Ansatz:

- Konservatives Abbruchkriterium – aber stärkeres Pruning!
- Prune Kanten (u, v) in der Vorwärtssuche für die

$$\overrightarrow{d[u]} + \text{len}(u, v) + \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v) \geq \mu$$

- und rückwärts analog.
- Entweder v in der Rückwärtssuche schon gesettled
- oder $d(v, t) + \pi_b(v) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q})$
- $\implies d(v, t) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v)$

Bidirektionaler A*

Dritter Ansatz:

- Konservatives Abbruchkriterium – aber stärkeres Pruning!
- Prune Kanten (u, v) in der Vorwärtssuche für die

$$\overrightarrow{d[u]} + \text{len}(u, v) + \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v) \geq \mu$$

- und rückwärts analog.
- Entweder v in der Rückwärtssuche schon gesettled
- oder $d(v, t) + \pi_b(v) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q})$
- $\implies d(v, t) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v)$
- Pruning wird mit wachsenden Queue-Keys schärfer
- Queues laufen leer bevor Abbruchkriterium greift
- Rückwärtspotential muss nur evaluiert werden sobald $\mu < \infty$

Bidirektionaler A*

Dritter Ansatz:

- Konservatives Abbruchkriterium – aber stärkeres Pruning!
- Prune Kanten (u, v) in der Vorwärtssuche für die

$$\overrightarrow{d[u]} + \text{len}(u, v) + \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v) \geq \mu$$

- und rückwärts analog.
- Entweder v in der Rückwärtssuche schon gesettled
- oder $d(v, t) + \pi_b(v) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q})$
- $\implies d(v, t) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v)$
- Pruning wird mit wachsenden Queue-Keys schärfer
- Queues laufen leer bevor Abbruchkriterium greift
- Rückwärtspotential muss nur evaluiert werden sobald $\mu < \infty$

Lohnt sich bidirektionaler A*?

- Und welche Variante?

Bidirektionaler A*

Dritter Ansatz:

- Konservatives Abbruchkriterium – aber stärkeres Pruning!
- Prune Kanten (u, v) in der Vorwärtssuche für die

$$\overrightarrow{d[u]} + \text{len}(u, v) + \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v) \geq \mu$$

- und rückwärts analog.
- Entweder v in der Rückwärtssuche schon gesettled
- oder $d(v, t) + \pi_b(v) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q})$
- $\implies d(v, t) \geq \textit{minKey}(\overleftarrow{Q}) - \pi_b(v)$
- Pruning wird mit wachsenden Queue-Keys schärfer
- Queues laufen leer bevor Abbruchkriterium greift
- Rückwärtspotential muss nur evaluiert werden sobald $\mu < \infty$

Lohnt sich bidirektionaler A*?

- Und welche Variante?
- Kommt darauf an, wie der reduzierte Graph aussieht!

ALT

Der ALT-Algorithmus

- Der ALT-Algorithmus ist A* mit einer speziellen vorberechneten Potentialfunktion
- ALT steht für A*, landmarks, triangle-inequality

Vorberechnung

- Dazu wird eine kleine Menge L (≈ 16) an Knoten ausgewählt (Landmarken)
- Für jede Landmarke ℓ und jeden Knoten $v \in V$ werden die Distanzen $d(v, \ell)$ und $d(\ell, v)$ vorberechnet (da Graph gerichtet)

Dreiecksungleichung für Graphen

Für alle Knoten $s, u, t \in V$ gilt

$$d(s, u) + d(u, t) \geq d(s, t)$$

Beweis: $d(s, t)$ laut Definition kürzeste-Weg-Distanz. Weg über u muss also mindestens genauso lang sein.

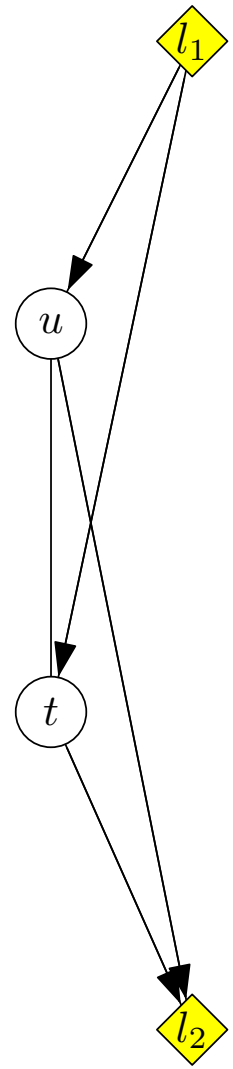
Potentiale durch Landmarken

△-UGL

$$d(s,u) + d(u,t) \geq d(s,t)$$

also gilt im Beispiel für ℓ_1, ℓ_2:

$$\begin{aligned} d(\ell_1,u) + d(u,t) &\geq d(\ell_1,t) \\ d(u,t) + d(t,\ell_2) &\geq d(u,\ell_2) \end{aligned}$$



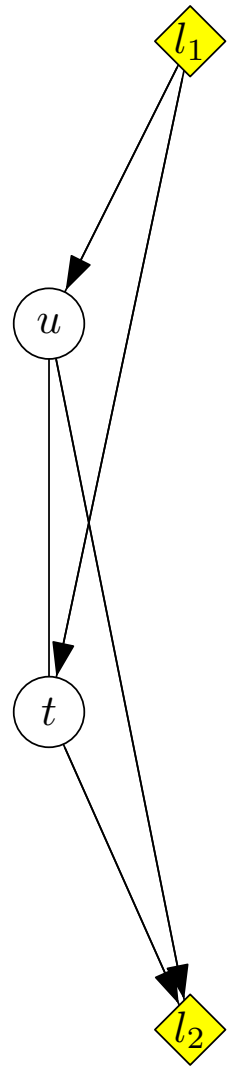
Potentiale durch Landmarken

△-UGL

$$d(s,u) + d(u,t) \geq d(s,t)$$

also gilt im Beispiel für ℓ_1, ℓ_2:

$$\begin{aligned} d(u,t) &\geq d(\ell_1,t) - d(\ell_1,u) \\ d(u,t) &\geq d(u,\ell_2) - d(t,\ell_2) \end{aligned}$$



Potentiale durch Landmarken

△-UGL

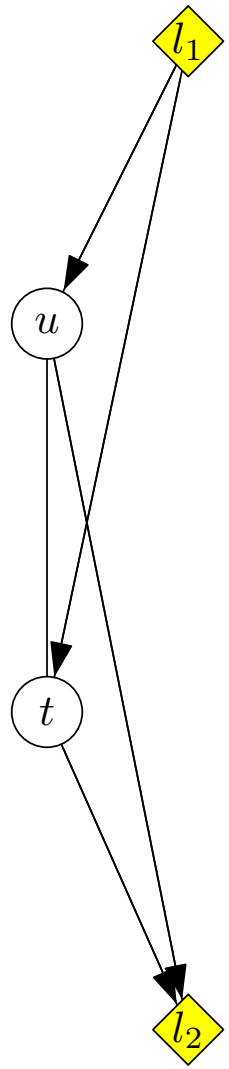
$$d(s,u) + d(u,t) \geq d(s,t)$$

also gilt im Beispiel für ℓ_1, ℓ_2:

$$\begin{aligned} d(u,t) &\geq d(\ell_1,t) - d(\ell_1,u) \\ d(u,t) &\geq d(u,\ell_2) - d(t,\ell_2) \end{aligned}$$

Benutze für alle Knoten $u, t, \ell \in V$ die Potentiale

$$\begin{aligned} \pi_t^+(u) &= d(\ell,t) - d(\ell,u) \leq d(u,t) \\ \pi_t^-(u) &= d(u,\ell) - d(t,\ell) \leq d(u,t) \end{aligned}$$



Potentiale durch Landmarken

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Die Potentiale

$$\pi_t^{\ell+}(u) = d(\ell, t) - d(\ell, u)$$
$$\pi_t^{\ell-}(u) = d(u, \ell) - d(t, \ell)$$

sind zulässig für jede Landmarke $\ell \in L$.

Beweis: Mit $\triangle$-UGL für Graphen.

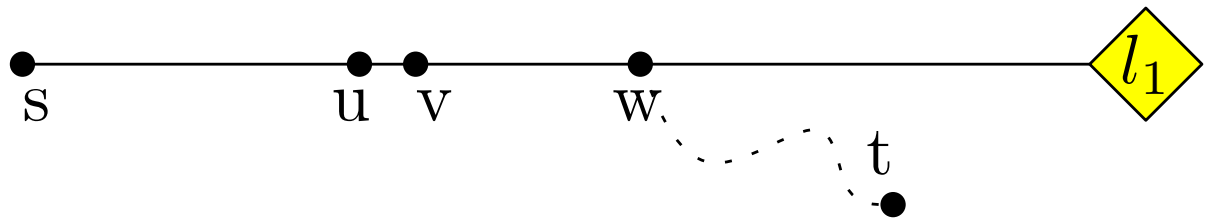
Korollar

Für eine Menge L von Landmarken ist das Potential

$$\pi_t^L(u) = \max_{\ell \in L}\{\max\{\pi_t^{\ell+}(u), \pi_t^{\ell-}(u)\}\}$$

zulässig.

Eigenschaften Landmarken



Was sind gute Landmarken?

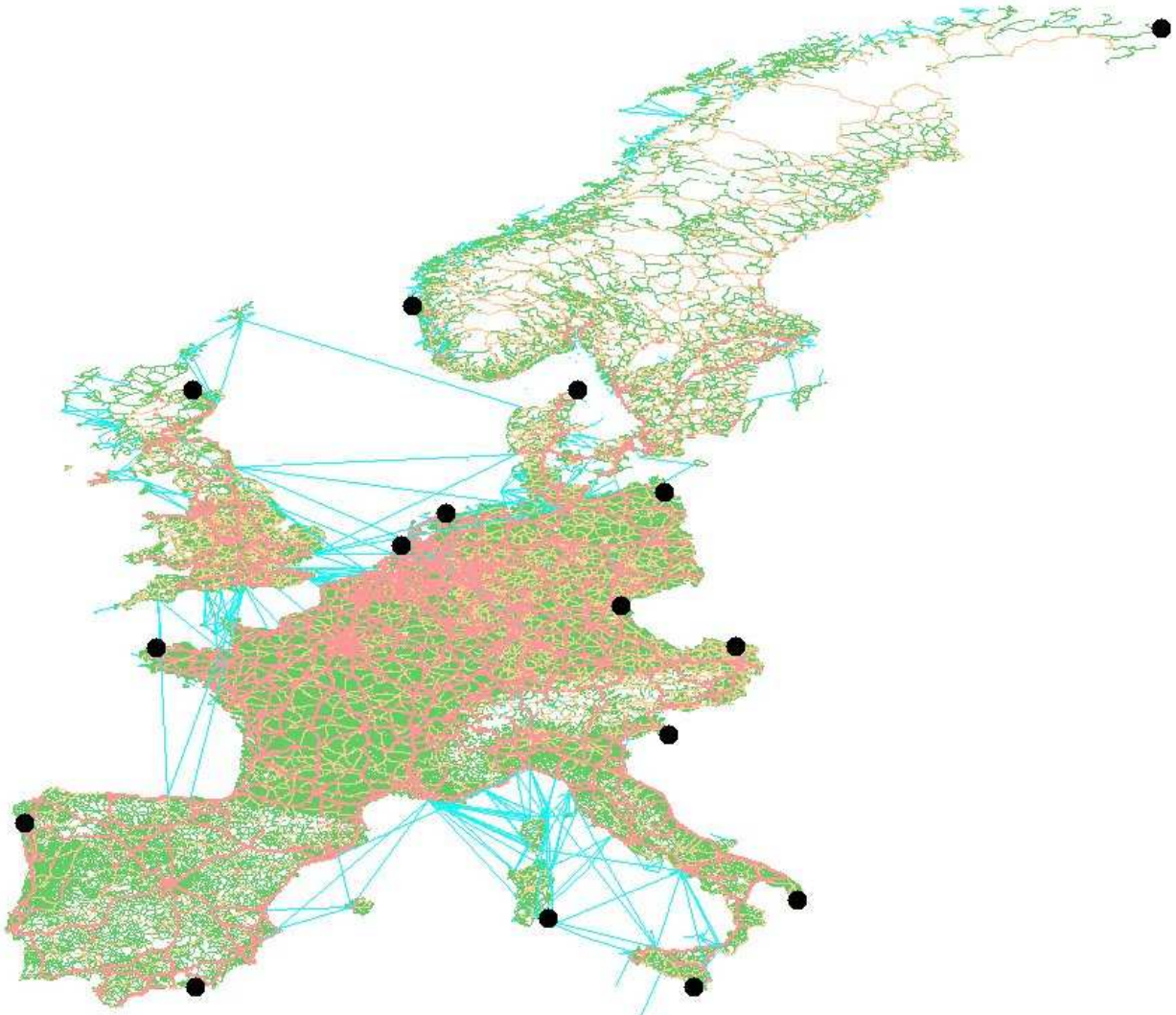
- $\pi_t^{\ell_1-}(u) = d(u, \ell_1) - d(t, \ell_1)$, $\pi_t^{\ell_1-}(v) = d(v, \ell_1) - d(t, \ell_1)$
- also $\text{len}_\pi(u, v) = \text{len}(u, v) - d(u, \ell_1) + d(v, \ell_1) = 0$

$\Rightarrow$ gemeinsame Kanten (kürzester Weg und Weg zur Landmarke) haben reduzierte Kosten von 0

Also:

- "gute" Landmarken überdecken viele Kanten für viele s, t-Paare
- trifft unter anderem zu, wenn "hinter" vielen Knoten
- am Rand des Graphen

Beispiel gute Landmarken



Berechnung Landmarken

mehrere Ansätze:

- brute force: teste alle Knotenteilmengen der Größe $|L|$:
  $\mathcal{O}(n^{|L|} \cdot \underbrace{n(m + n \log n)}_{\text{all pair shortest path}})$
  - $+$ höchste Beschleunigung
  - $-$ zu lange Vorberechnung

Berechnung Landmarken

mehrere Ansätze:

- brute force: teste alle Knotenteilmengen der Größe $|L|$:
  $\mathcal{O}(n^{|L|} \cdot \underbrace{n(m + n \log n)}_{\text{all pair shortest path}})$
  - $+$ höchste Beschleunigung
  - $-$ zu lange Vorberechnung
- wähle zufällig
  - $+$ schnellste Vorberechnung
  - $-$ schlechte Beschleunigung

Berechnung Landmarken

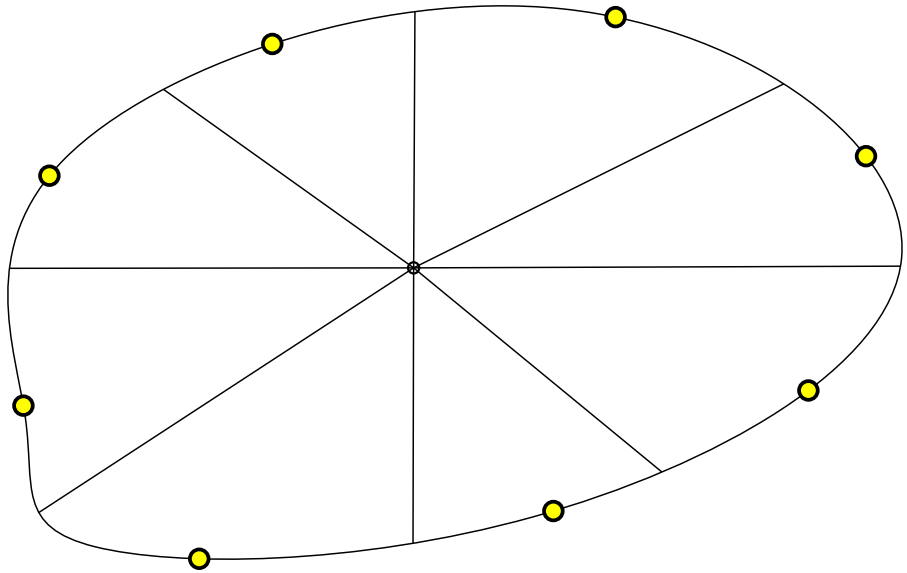
mehrere Ansätze:

- brute force: teste alle Knotenteilmengen der Größe $|L|$:
  $\mathcal{O}(n^{|L|} \cdot \underbrace{n(m + n \log n)}_{\text{all pair shortest path}})$
  - \+ höchste Beschleunigung
  - – zu lange Vorberechnung
- wähle zufällig
  - \+ schnellste Vorberechnung
  - – schlechte Beschleunigung
- mehrere Heuristiken, die versuchen den Rand zu finden
  - planar
  - farthest
  - avoid
  - lokale Optimierung (maxCover)

Planar-Landmarken

Vorgehen:

- suche Mittelpunkt c des Graphen
- teile Graphen in k Teile
- in jedem Teil wähle Knoten mit maximalen Abstand zu c als Landmarke



Anmerkungen:

- benötigt Einbettung
- am besten kombiniert mit weiteren Optimierungen

Farthest-Landmarken

Karlsruher Institut für Technologie

`Farthest-Landmarks`(G,k)

```
1 L ← ∅
2 while |L| < k do
3 |   if |L| = 0 then DIJKSTRA(G, RANDOMNODE)
4 |
5 |   else DIJKSTRA(G, L)
6 |
7 |   u ← last settled node
8 |   L ← L ∪ {u}
```

Anmerkungen:

- Multi-Startknoten Dijkstra
- schlecht für kleine k
- erste Landmarke schlecht
- weitere Landmarken massiv abhängig von erster

Avoid-Landmarken

Idee:

- Identifiziere rekursiv Teile des Graphen, für die die bisherigen Landmarken L keine guten Schranken liefern

Vorgehen:

- Berechne kürzeste-Wege-Baum T_r von (zufälligem) Knoten r
- Für jeden Knoten u: $weight(u) := d(r,u) - \pi_u^L(r)$
  Je größer das Gewicht desto schlechter die aktuelle Abschätzung für u
- Betrachte Teilbaum T_u: $size(u) := \begin{cases} 0 & L \cap T_u \neq \varnothing \\ \sum_{v \in T_u} weight(v) & sonst \end{cases}$
  Summe der Gewichte des Teilbaums von u
- Sei $w := \arg\max_{u \in T_r} size(u)$
  Teilbaum T_w hat (von r aus betrachtet) keine Landmarke "hinter" sich und in Summe die schlechteste Abschätzung
- Traversiere T_w, folge jeweils dem Kind maximaler Größe
- das erreichte Blatt wird zu L hinzugefügt

Optimierung von Landmarken

Karlsruher Institut für Technologie

Problem:

- konstruktive Heuristik
- anfangs gewählte Landmarken eventuell suboptimal

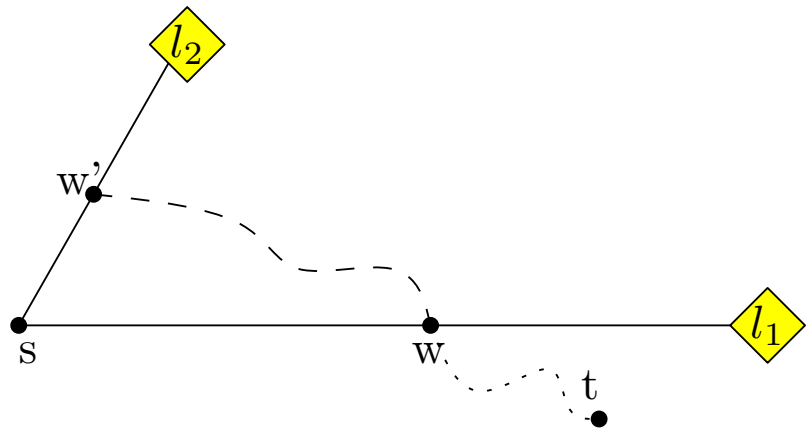
Idee:

- lokale Optimierung
- berechne mehr landmarken als nötig ($\approx 4k$)
- wähle beste durch Optimierungsfunktion, z.B.
  1. maximiere Anzahl überdeckter Kanten, d.h. $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) = 0$
  2. maximiere $\pi(s)$ für 1 Mio. s-t Paare (simuliert Anfragen)
- Avoid + Funktion 1 wird maxCover genannt

Anfragen: Aktive Landmarken

Problem:

- Landmarken können Suche in die falsche Richtung ziehen
- Auswertung von vielen Landmarken erzeugt großen overhead



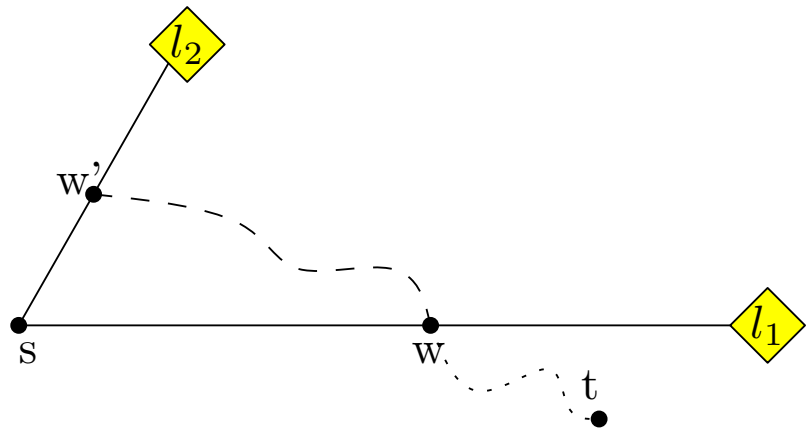
Lösung:

- wähle während Initialisierung eine Teilmenge von L als aktiv
- diese, für die $\pi_t^\ell(s)$ maximal sind
- Führe die Suche nur mit aktiven Landmarken aus

Anfragen: Aktive Landmarken

Problem:

- Landmarken können Suche in die falsche Richtung ziehen
- Auswertung von vielen Landmarken erzeugt großen overhead



Verbesserungen:

- Benutze Heuristik um während der Suche die Wahl der aktiven Landmarken anzupassen.
- Starte mit zwei Landmarken, füge während der Suche weitere hinzu.
- Schlechte Landmarken können auch wieder inaktiviert werden.

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

Der Suchraum von Dijkstra's Algorithmus

$$V(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) \leq d(s,t)\}$$

ist ein graphentheoretischer Kreis.

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s,t) \subseteq \{v \in V \mid d(s,v) + \pi^L(v) \leq d(s,t)\}$$

mit Potentialen

$$\begin{aligned} \pi_t^L(v) &= \max_{\ell \in L}\{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\} \\ \pi_t^{\ell+}(v) &= d(\ell,t) - d(\ell,v) \\ \pi_t^{\ell-}(v) &= d(v,\ell) - d(t,\ell) \end{aligned}$$

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s,t) \subseteq \{v \in V \mid d(s,v) + \pi^L(v) \leq d(s,t)\}$$

mit Potentialen

$$\begin{aligned} \pi_t^L(v) &= \max_{\ell \in L}\{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\} \\ \pi_t^{\ell+}(v) &= d(\ell,t) - d(\ell,v) \\ \pi_t^{\ell-}(v) &= d(v,\ell) - d(t,\ell) \end{aligned}$$

Wir betrachten jedes $\ell \in L$ einzeln, einsetzen oben:

$$V_{\ell+}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + \pi_t^{\ell+}(v) \leq d(s,t)\}$$

$$V_{\ell-}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + \pi_t^{\ell-}(v) \leq d(s,t)\}$$

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s,t) \subseteq \{v \in V \mid d(s,v) + \pi^L(v) \leq d(s,t)\}$$

mit Potentialen

$$\begin{aligned} \pi_t^L(v) &= \max_{\ell \in L}\{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\} \\ \pi_t^{\ell+}(v) &= d(\ell,t) - d(\ell,v) \\ \pi_t^{\ell-}(v) &= d(v,\ell) - d(t,\ell) \end{aligned}$$

Wir betrachten jedes $\ell \in L$ einzeln, einsetzen oben:

$$V_{\ell^+}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + d(\ell,t) - d(\ell,v) \leq d(s,t)\}$$

$$V_{\ell^-}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + d(v,\ell) - d(t,\ell) \leq d(s,t)\}$$

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s,t) \subseteq \{v \in V \mid d(s,v) + \pi^L(v) \leq d(s,t)\}$$

mit Potentialen

$$\begin{aligned} \pi_t^L(v) &= \max_{\ell \in L}\{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\} \\ \pi_t^{\ell+}(v) &= d(\ell,t) - d(\ell,v) \\ \pi_t^{\ell-}(v) &= d(v,\ell) - d(t,\ell) \end{aligned}$$

Wir betrachten jedes $\ell \in L$ einzeln, einsetzen oben:

$$V_{\ell^+}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) - d(\ell,v) \leq d(s,t) - d(\ell,t)\}$$

$$V_{\ell^-}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + d(v,\ell) \leq d(s,t) + d(t,\ell)\}$$

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

$$V_{\ell^-}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + d(v,\ell) \leq d(s,t) + d(t,\ell)\}$$

ist eine graphentheoretische Ellipse. (Mit Brennpunkten s und ℓ)

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

$$V_{\ell^-}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + d(v,\ell) \leq d(s,t) + d(t,\ell)\}$$

ist eine graphentheoretische Ellipse. (Mit Brennpunkten s und ℓ)

$$V_{\ell^+}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) - d(\ell,v) \leq d(s,t) - d(\ell,t)\}$$

ist eine graphentheoretische Hyperbel. (Mit Brennpunkten s und ℓ)

Eine Intuition für den ALT-Suchraum

$$V_{\ell^-}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) + d(v,\ell) \leq d(s,t) + d(t,\ell)\}$$

ist eine graphentheoretische Ellipse. (Mit Brennpunkten s und ℓ)

$$V_{\ell^+}(s,t) = \{v \in V \mid d(s,v) - d(\ell,v) \leq d(s,t) - d(\ell,t)\}$$

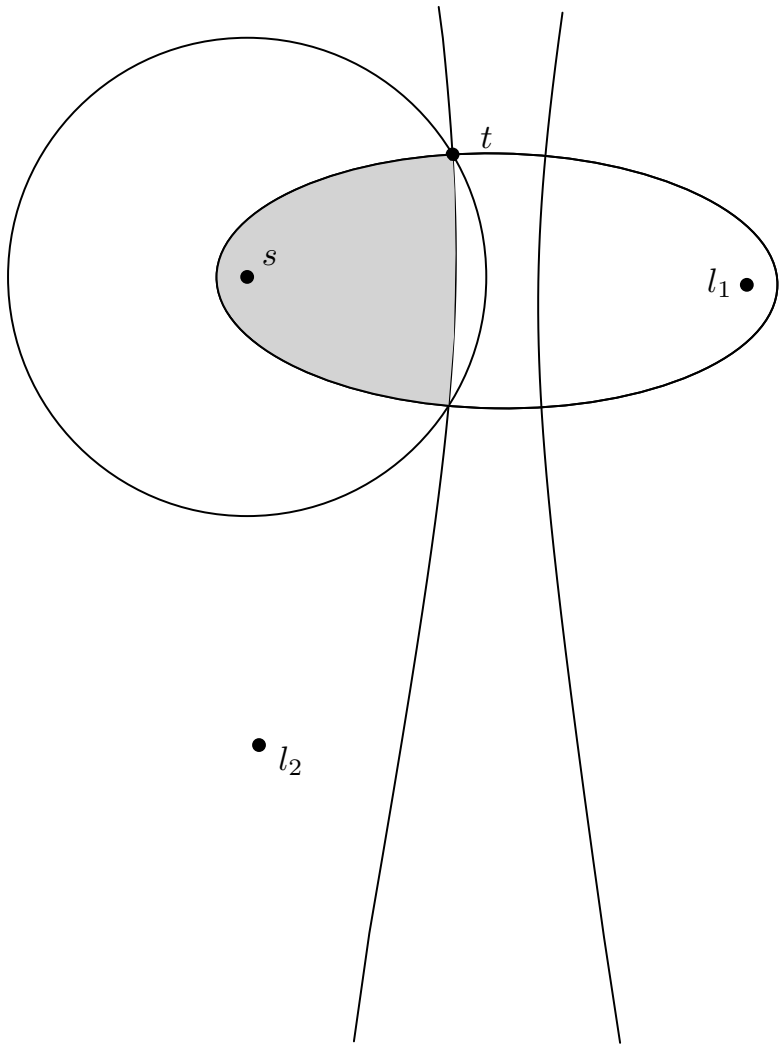
ist eine graphentheoretische Hyperbel. (Mit Brennpunkten s und ℓ)

Der Suchraum von ALT

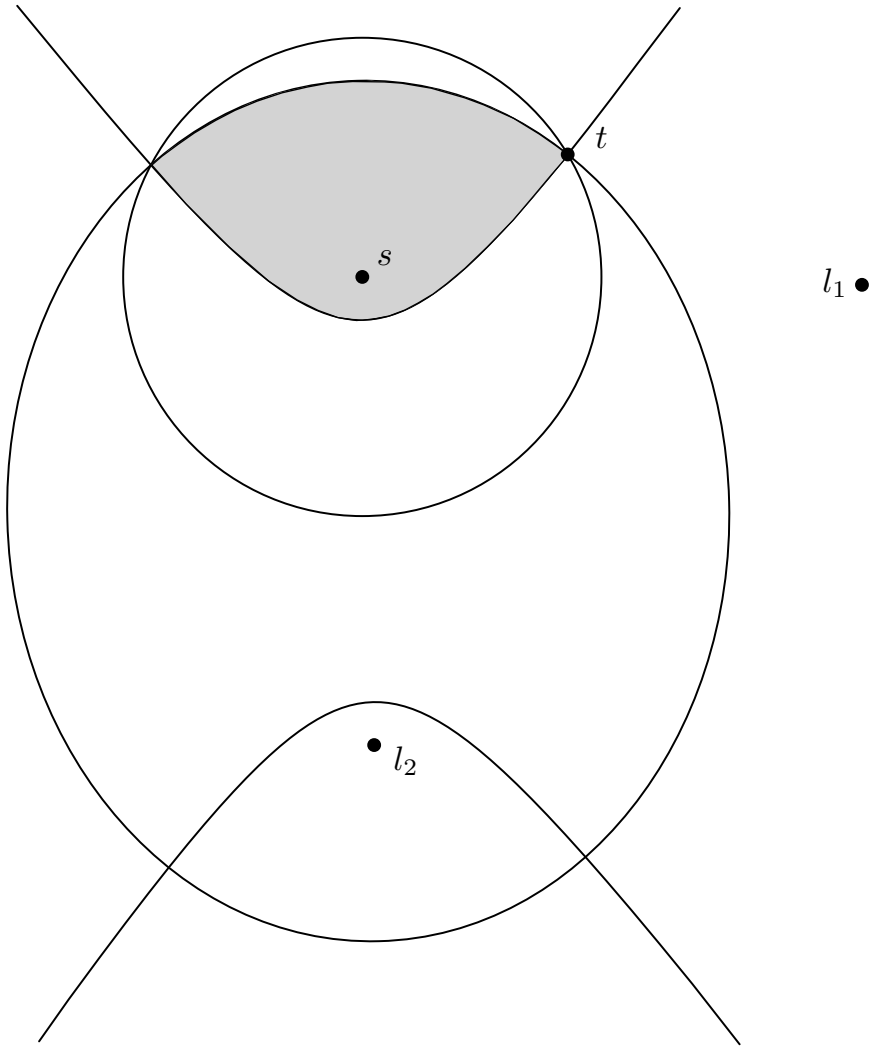
$$V^L(s,t) \subseteq \{v \in V \mid d(s,v) + \pi^L(v) \leq d(s,t)\}$$

ist also die Schnittmenge aus den Ellipsen und Hyperbeln über alle Landmarken in L.

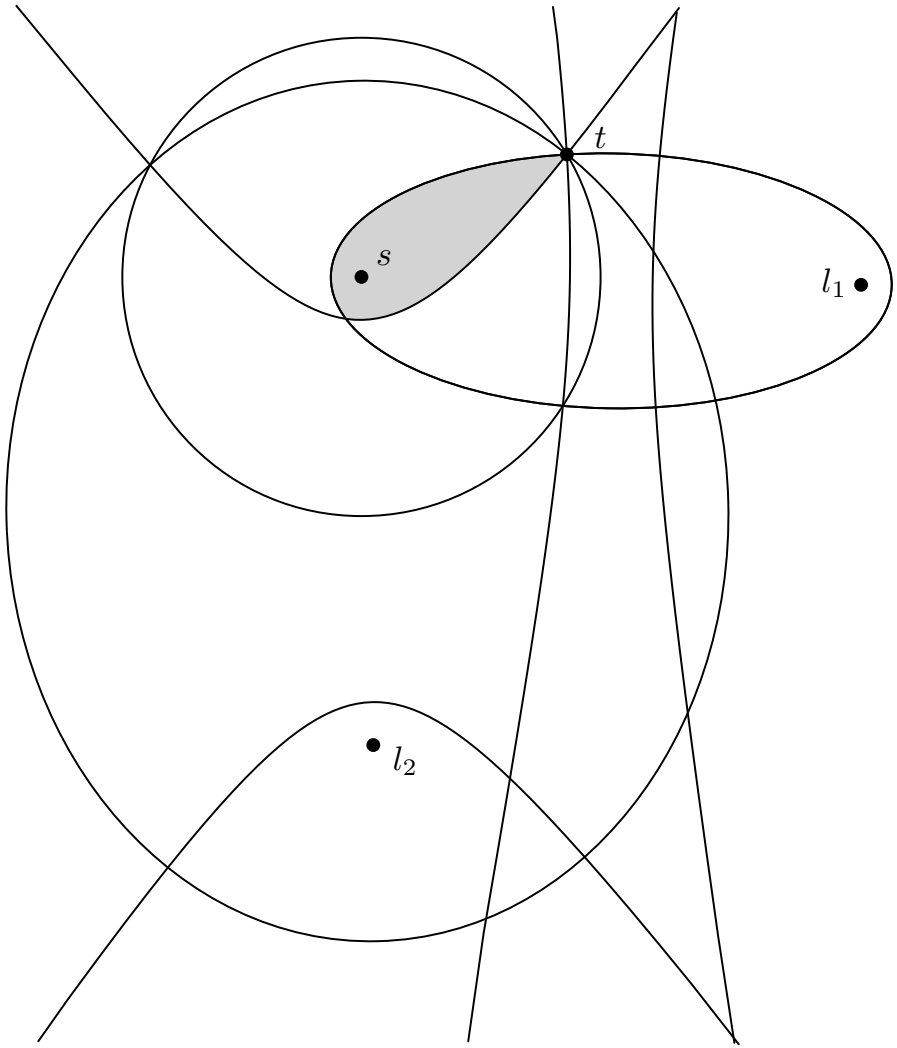
Eine Intuition für den ALT-Suchraum



Eine Intuition für den ALT-Suchraum



Eine Intuition für den ALT-Suchraum



Experimente

Eingaben:

- Straßennetzwerke
  - Europa: 18 Mio. Knoten, 42 Mio. Kanten
  - USA: 22 Mio. Knoten, 56 Mio. Kanten

Evaluation:

- Vorberechnung in Minuten und zusätzliche Bytes pro Knoten
- durchschnittlicher Suchraum (# abgearbeitete Knoten) und Suchzeiten (in *ms*) von 10 000 Zufallsanfragen

Zufallsanfragen ALT

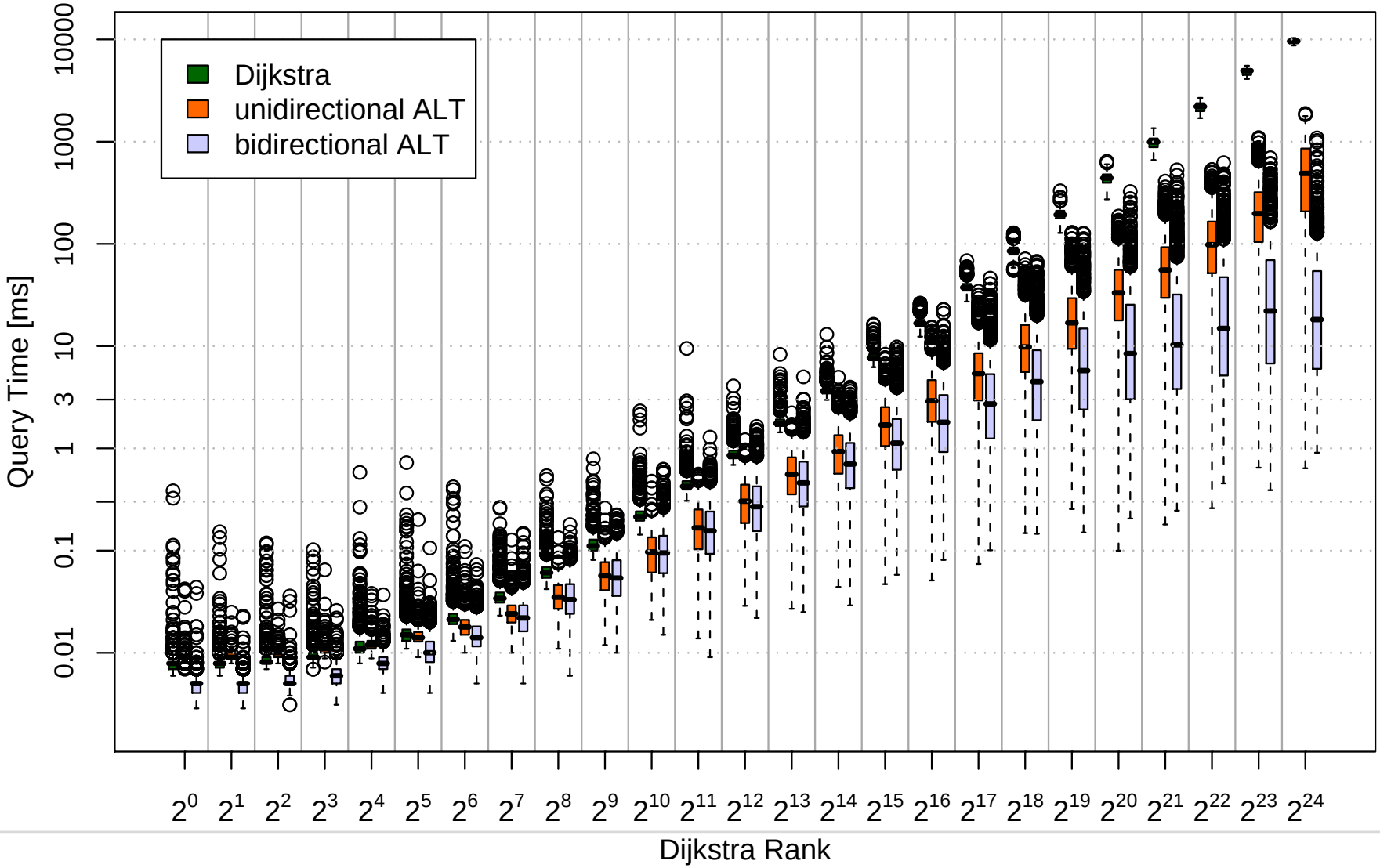
Vorberechnung: Bis 24 Landmarken maxCover, sonst avoid.

		Prepro		Query Unidir.			Query Bidir.		
		time	space	# settled	time	spd	# settled	time	spd
	algorithm	[min]	[B/n]	nodes	[ms]	up	nodes	[ms]	up
EUR	Dijkstra	0	0	9 114 385	5 591.6	1.0	4 764 110	2 713.2	2.1
	ALT-4	12.1	32	1 289 070	469.1	11.9	355 442	254.1	22.0
	ALT-8	26.1	64	1 019 843	391.6	14.3	163 776	127.8	43.8
	ALT-16	85.1	128	815 639	327.6	17.1	74 669	53.6	104.3
	ALT-24	145.2	192	742 958	303.7	18.4	56 338	44.2	126.5
	ALT-32	27.1	256	683 566	301.4	18.6	40 945	29.4	190.2
	ALT-64	68.2	512	604 968	288.5	19.4	25 324	19.6	285.3
USA	Dijkstra	0	0	11 847 523	6 780.7	1.0	7 345 846	3 751.4	1.8
	ALT-8	44.5	64	922 897	329.8	20.6	328 140	219.6	30.9
	ALT-16	103.2	128	762 390	308.6	22.0	180 804	129.3	52.4
	ALT-32	35.8	256	628 841	291.6	23.3	109 727	79.5	85.3
	ALT-64	92.9	512	520 710	268.8	25.2	68 861	48.9	138.7

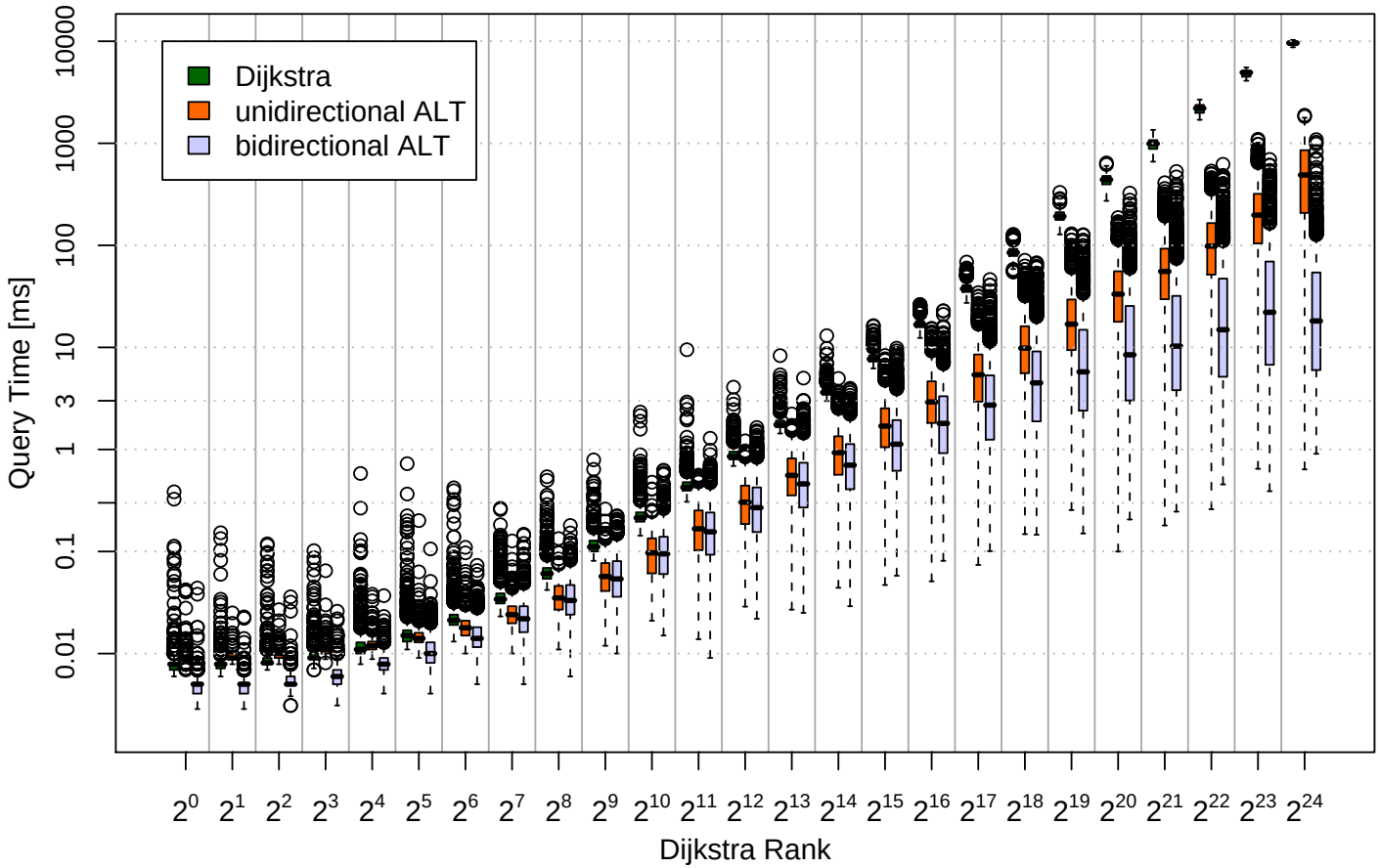
Beobachtungen

- bidirektionale Suche: Beschleunigung von 2
- unidirektionaler ALT: mehr als 16 Landmarken nicht sinnvoll
- bidirektionaler ALT: verdoppelung der Landmarken halbiert den Suchraum (ungefähr)
- 16 Landmarken: Beschleunigung ≈ 100 für Europa
- 64 Landmarken: Beschleunigung ≈ 300 für Europa
- hoher Speicherverbrauch (Graph-DS: 424 MB, pro Landmarke: 144 MB, Europa)
- USA schlechter als Europa (Vermutung: schlechtere Hierarchie)

Dijkstra-Rank – Bidirektionale Suche



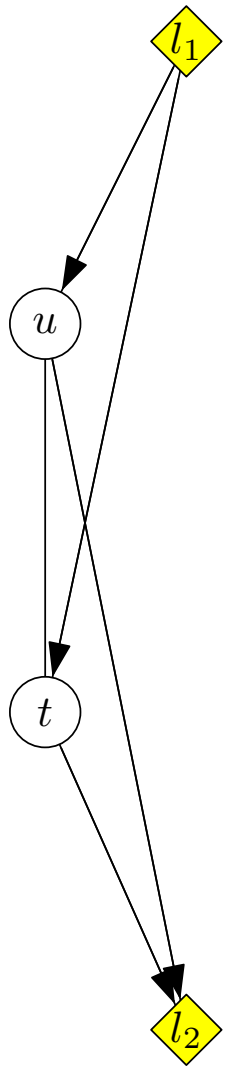
Dijkstra-Rank – Bidirektionale Suche



- Beschleunigung steigt mit Rang, gering für nahe Anfragen
- hohe Varianz, Ausreißer bis zu Faktor 100 langsamer als Median

Zusammenfassung ALT

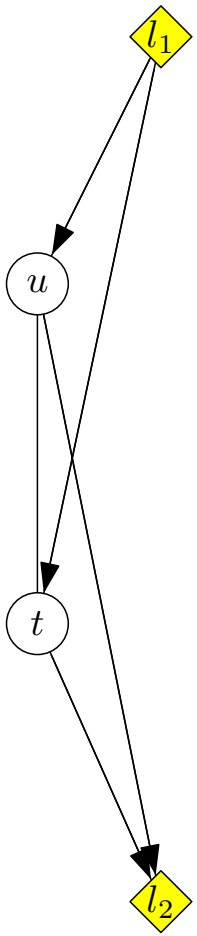
- Zielgerichtet durch geänderte Reihenfolge, wie Knoten abgearbeitet werden
- wird erreicht durch hinzufügen eines Knotenpotentials π
- korrekt wenn $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für alle Kanten
- Potentiale durch Landmarken
- kann bidirektional gemacht werden
- Beschleunigung von bis zu 300 gegenüber Dijkstra
- aber hoher Platzverbrauch (Reduktion später)
- hohe Varianz (manche Anfragen haben keine guten Landmarken)

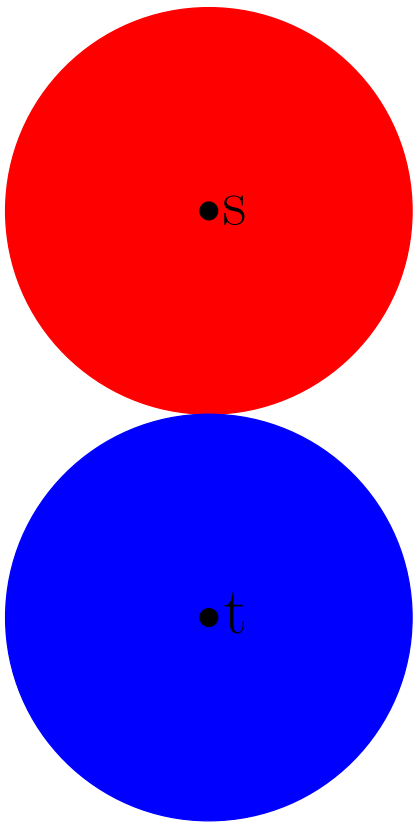


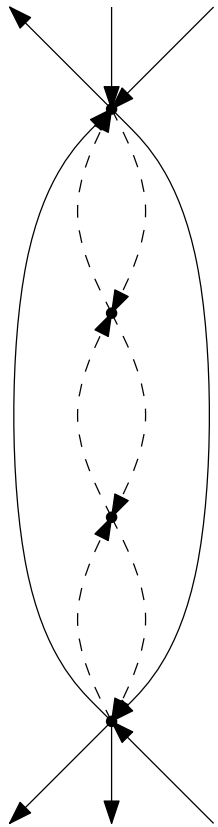
CALT

Core-ALT

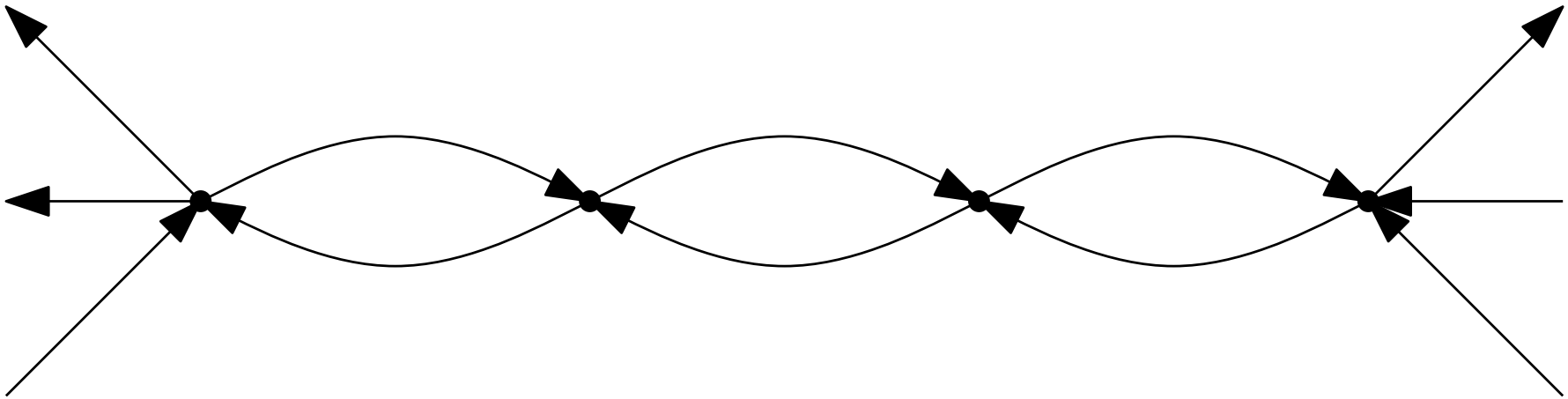
Landmarken | Bidirektionale Suche | Kontraktion | Arc-Flags | Table-Lookups



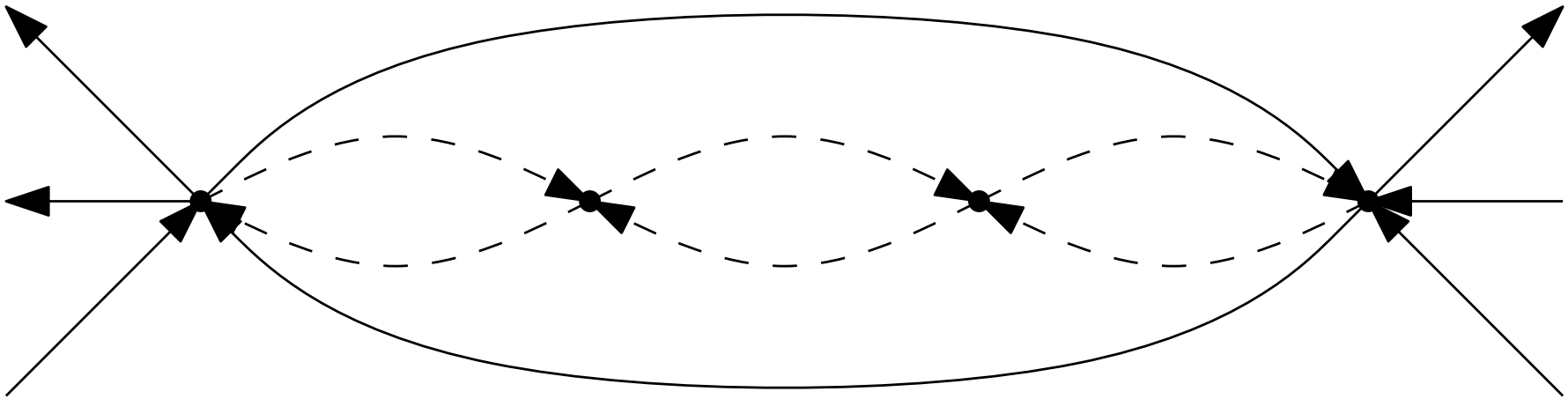




Wdh: Kontraktion



Wdh: Kontraktion



- Identifiziere “unwichtige” Knoten
- Menge “unwichtige” Knoten: Component, verbliebene: Core
- Füge Shortcuts zwischen Core-Knoten hinzu, um Distanz innerhalb Core zu erhalten
- Generelles Query-Framework: Betrachte ggfs. Component um s und t, nutze sonst nur Core und Shortcuts

Core-ALT

Motivation:

- ALT ist robust gegenüber der Eingabe
- aber hoher Speicherverbrauch

Hauptidee:

- berechne ALT nur auf kleinem Subgraphen

Core-ALT

Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)

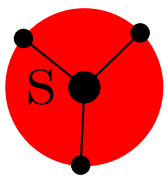
Vorberechnung

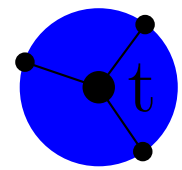
- kontrahiere Graphen zu Kern
- Landmarken nur im Kern

Core-ALT

Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)





Vorberechnung

- kontrahiere Graphen zu Kern
- Landmarken nur im Kern

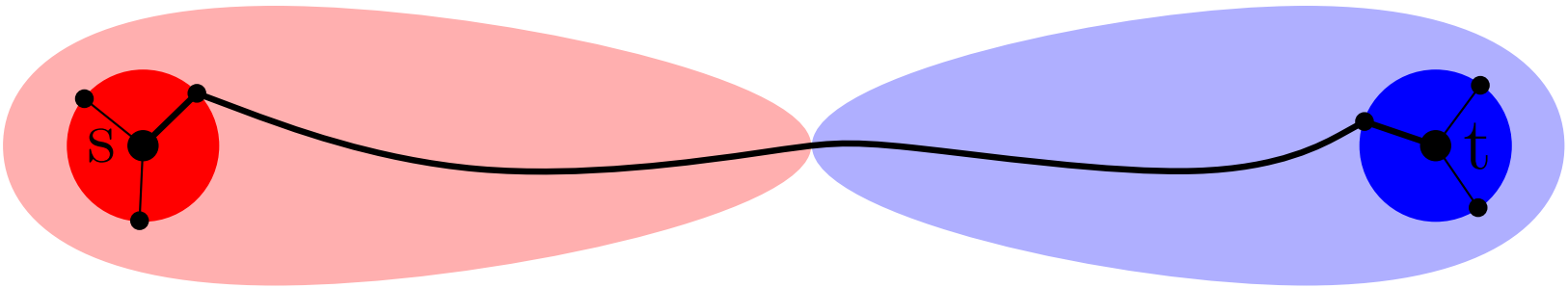
Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra

Core-ALT

Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)



Vorberechnung

- kontrahiere Graphen zu Kern
- Landmarken nur im Kern

Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra
- Im Kern: benutze Landmarken und Shortcuts(!)

Proxy Knoten

Problem:

- ALT braucht Potential von jedem Knoten zu t und s
- s und/oder t könnten außerhalb des Kerns liegen
- somit keine Abstandswerte von den Landmarken zu s und t

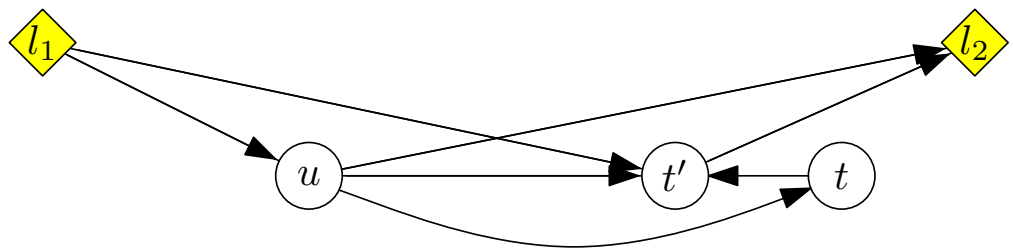
Proxy Knoten

Problem:

- ALT braucht Potential von jedem Knoten zu t und s
- s und/oder t könnten außerhalb des Kerns liegen
- somit keine Abstandswerte von den Landmarken zu s und t

Lösung:

- bestimme Proxy-Knoten t' für t (s analog), t' im Kern
- neue Ungleichungen:



$$d(u,t) \geq d(u,l_2) - d(t',l_2) - d(t,t')$$
$$d(u,t) \geq d(l_1,t') - d(l_1,u) - d(t,t')$$

Einfluss Anzahl Landmarken

	no cont. (c=0.0, h=0)				low cont. (c=1.0, h=20)			
	Prepro.		Query		Prepro.		Query	
$\|L\|$	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]
8	26.1	64	163 776	127.8	7.1	10.9	12 529	10.25
16	85.2	128	74 669	53.6	9.4	14.9	5 672	5.77
32	27.1	256	40 945	29.4	6.8	23.0	3 268	2.97
64	68.2	512	25 324	19.6	8.5	36.2	2 233	2.16

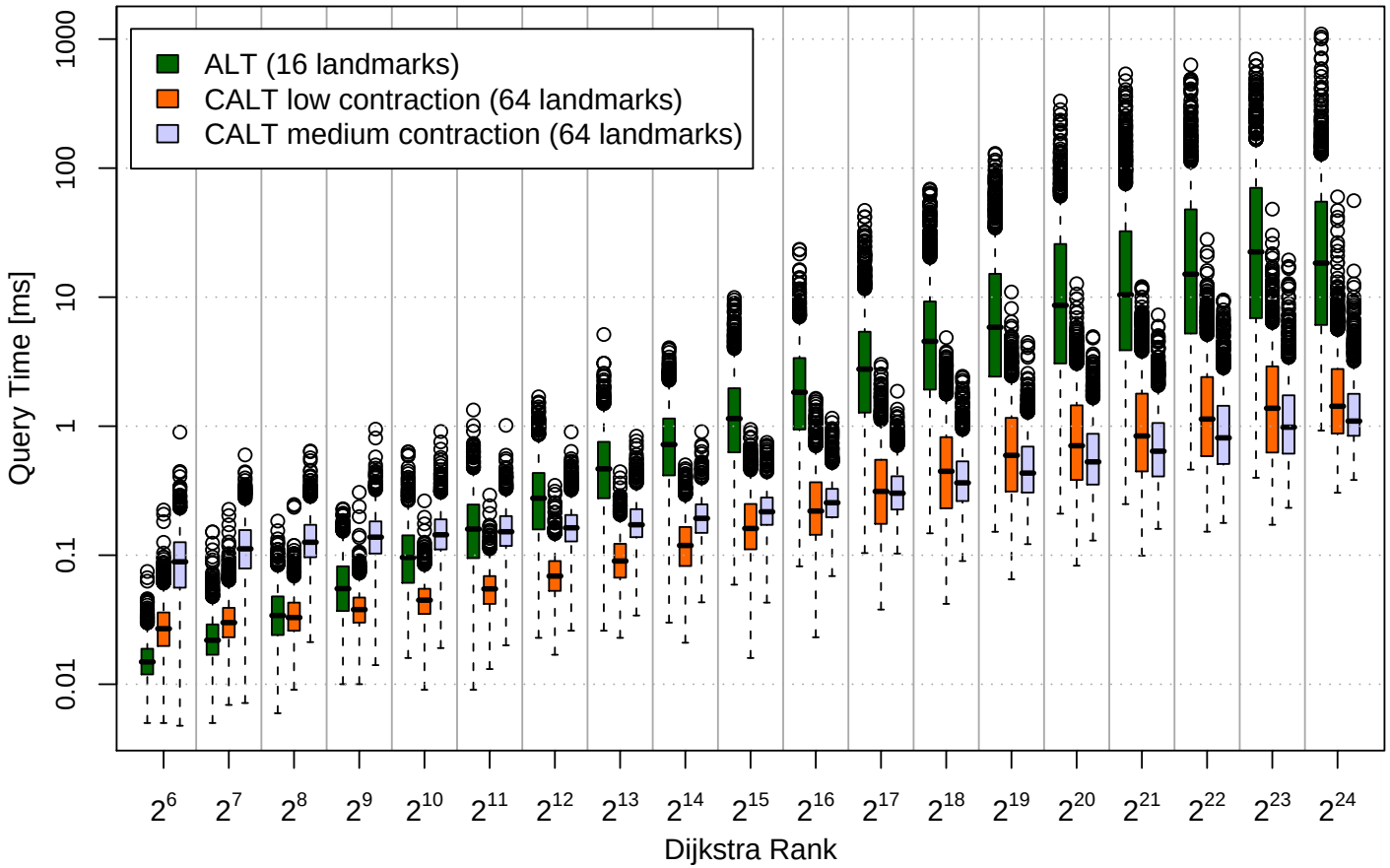
	med: c=2.5, h=50				high: c=5.0, h=100			
	Prepro.		Query		Prepro.		Query	
$\|L\|$	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]
8	10.1	7.0	4 431	3.98	17.8	5.9	4 106	2.51
16	11.0	8.2	2 456	2.33	18.3	6.5	3 500	2.23
32	10.0	10.6	1 704	1.66	17.7	7.6	3 264	2.01
64	10.5	15.4	1 394	1.34	18.0	9.8	3 126	1.67

$|L| <= 16$: maxcover, $|L| >= 32$: avoid

h: shortcut max hop number

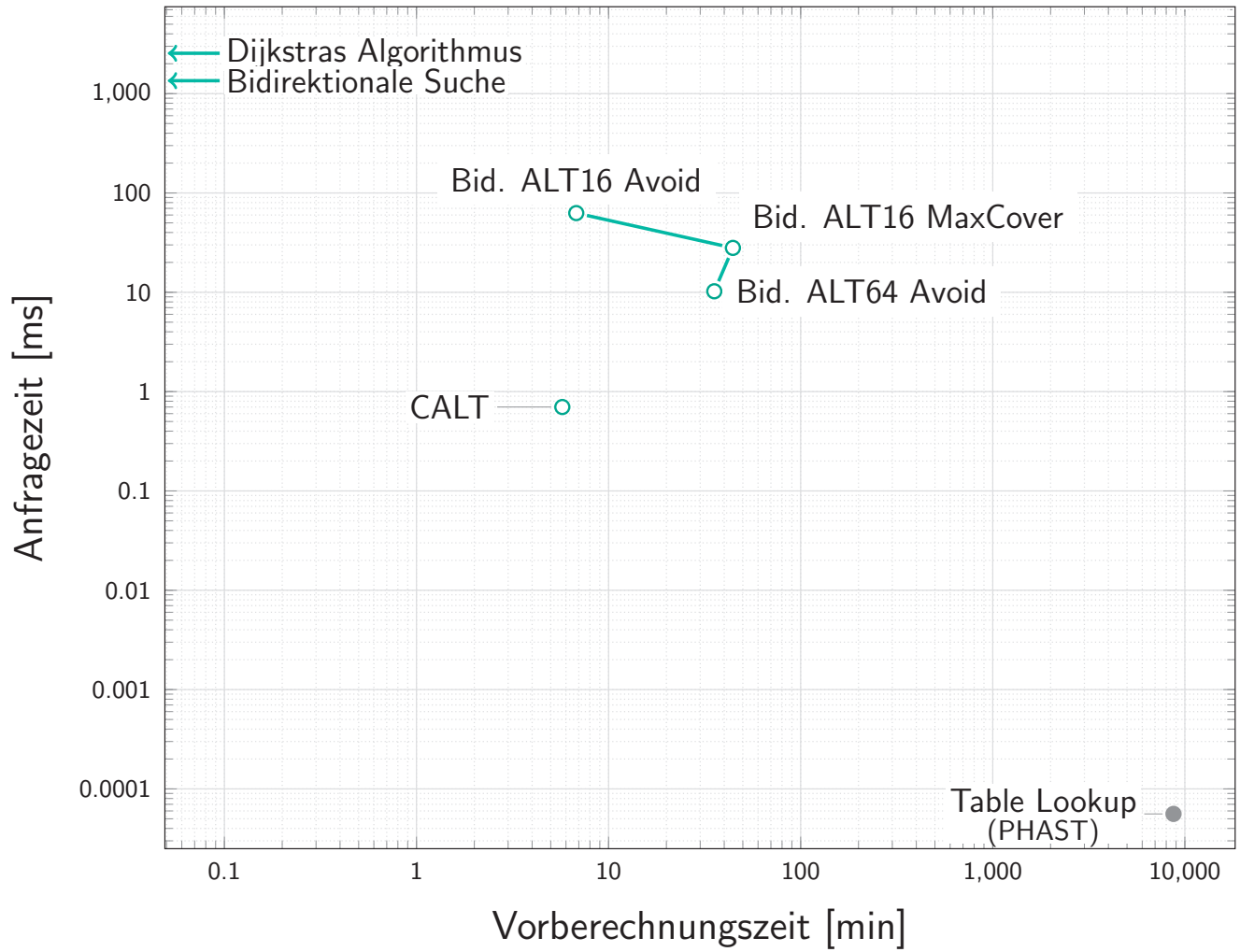
c: contraction parameter (inserted shortcuts / node degree)

Dijkstra Rank ALT vs CALT

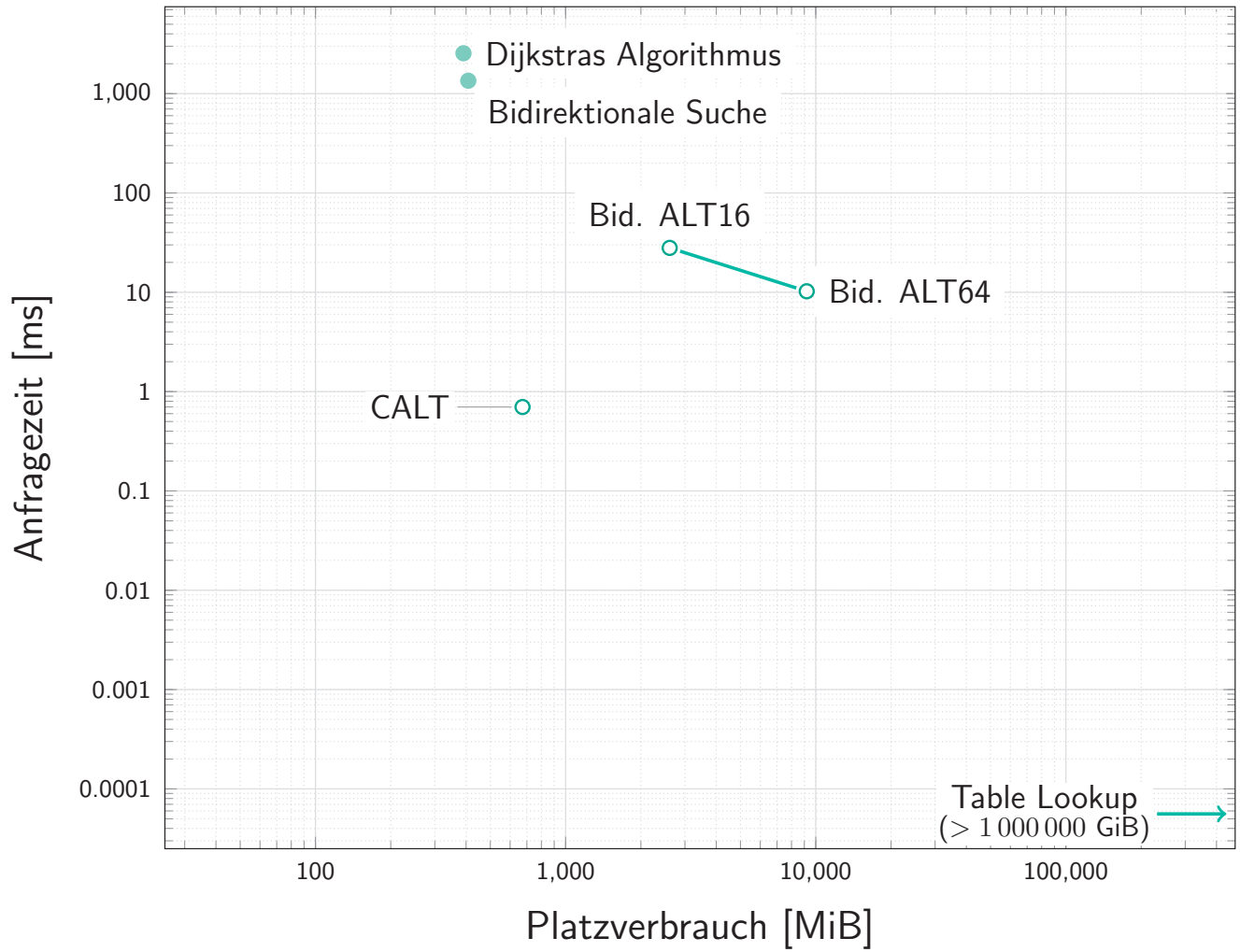


- Weit: CALT mehr als eine Größenordnung schneller als ALT, wobei kleinerer Kern (“medium contraction”) besser
- Nah: je kleiner Kern, desto langsamer (da Initialphase unbeschl.)

Übersicht bisherige Techniken



Übersicht bisherige Techniken



Nächster Termin

Karlsruher Institut für Technologie

Mittwoch, 4. Mai 2022

Literatur I

Reinhard Bauer, Daniel Delling, Peter Sanders, Dennis Schieferdecker, Dominik Schultes, and Dorothea Wagner.

Combining Hierarchical and Goal-Directed Speed-Up Techniques for Dijkstra's Algorithm.

ACM Journal of Experimental Algorithmics, 15(2.3):1–31, January 2010.

Special Section devoted to WEA'08.

Andrew V. Goldberg and Chris Harrelson.

Computing the Shortest Path: A* Search Meets Graph Theory.

In *Proceedings of the 16th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'05)*, pages 156–165. SIAM, 2005.

Andrew V. Goldberg and Renato F. Werneck.

Computing Point-to-Point Shortest Paths from External Memory.

In *Proceedings of the 7th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'05)*, pages 26–40. SIAM, 2005.