

# Algorithmen für Routenplanung

8. Vorlesung, Sommersemester 2022

Adrian Feilhauer | 18. Mai 2022



# Kürzeste Wege in Straßennetzwerken

Beschleunigungstechniken (Fortsetzung)

## Thema: Graphpartitionierung

- Exkurs: dünn besetzte Gleichungssysteme
- Wiederholung: Inertial Flow
- PUNCH
- FlowCutter

# Exkurs: dünn besetzte Gleichungssysteme

- Lösen großer linearer Gleichungssysteme hat viele Anwendungen
- Schnelles Lösen ist wichtig
- Algorithmus von Gauß in  $O(n^3)$ , wobei  $n$  die Anzahl der Variablen ist
  - Oft zu langsam
  
- Oft sind Gleichungssysteme dünn besetzt
  - D. h. viele Koeffizienten sind 0
- Idee: Speichere 0-Koeffizienten nicht ab
- Aber: Wie 0-Koeffizienten während des Lösens erhalten?

Ziel: obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Nullen im oberen Dreieck

Ziel: obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ziel: obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ziel: obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Keine Nullen übrig  $\rightarrow :($

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

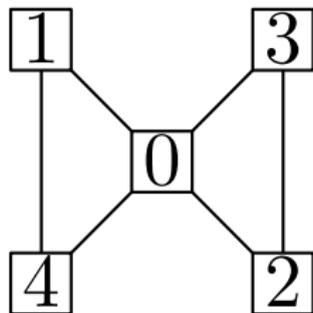
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alle 4 Nullen erhalten  $\rightarrow$  :)

Warum funktioniert das?

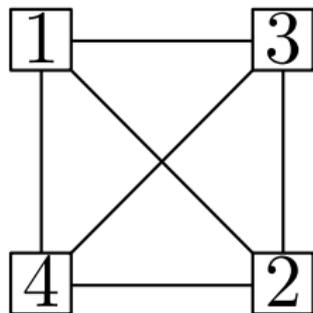
Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

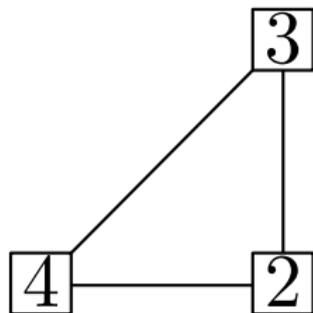
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

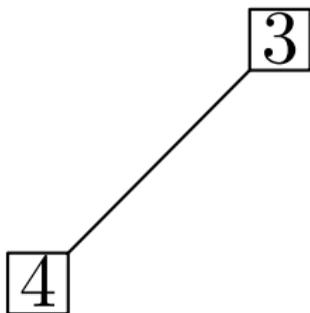
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$



Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

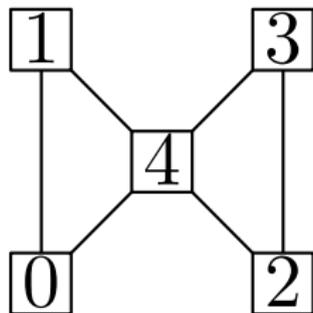
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

4

Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

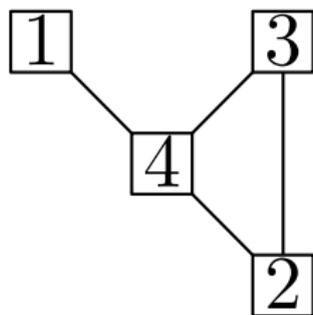
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

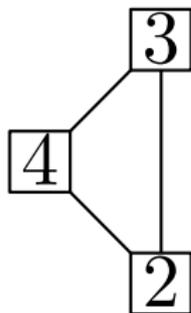
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

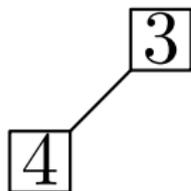
Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

4

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

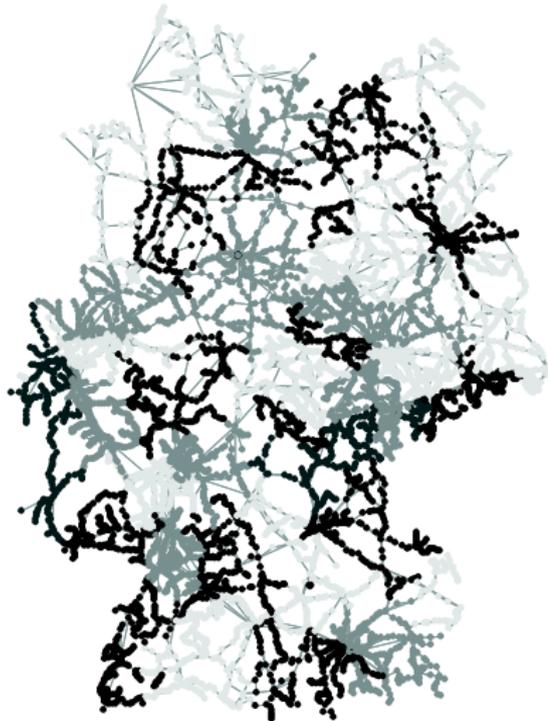
Variablenelimination  $\leftrightarrow$  Knotenkontraktion  
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Graphpartitionierung

# Partitionierung

## Anforderungen:

- ausbalanciert
- wenige Randknoten
- zusammenhängend

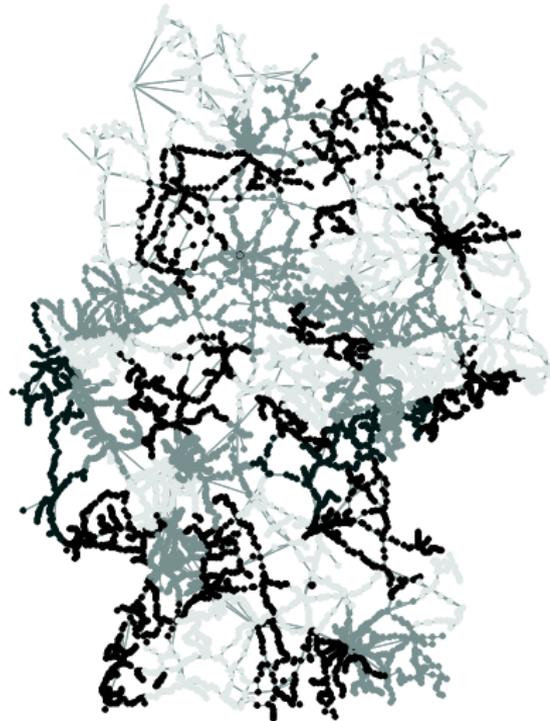


## Anforderungen:

- ausbalanciert
- wenige Randknoten
- zusammenhängend

## Black-Box-Partitionierer:

- benutzen keine Einbettung
- oft: teilen rekursiv Graphen in  $k$  Teile mit kleinem Schnitt
- lassen sich auf eine Vielzahl Graphklassen anwenden
- heute: spezielle Straßengraph-Partitionierer



- Informell: teile Graphen in lose verbundene Regionen (Zellen).

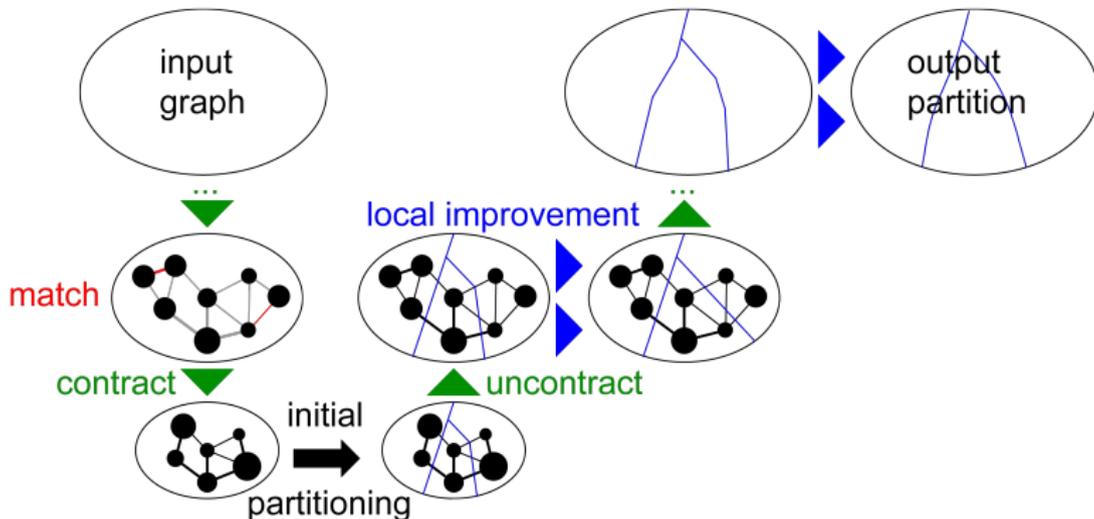


- Formale Definition:
  - Eingabe: ungerichteter Graph  $G = (V, E)$
  - Ausgabe: Partition von  $V$  in Zellen  $V_1, V_2, \dots, V_k$
  - Ziel: minimale Anzahl Kanten zwischen Zellen
- Standardvariante:  $|V_i| \leq U$  für festes  $U$ :
  - Anzahl Zellen kann variieren ( $\geq \lceil n/U \rceil$ ).
- Balancierte Variante:  $k$  Zellen und Unausgeglichenheit  $\epsilon$ :
  - genau  $k$  Zellen (können nicht-zusammenhängend sein), Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

- Formale Definition:
  - Eingabe: ungerichteter Graph  $G = (V, E)$
  - Ausgabe: Partition von  $V$  in Zellen  $V_1, V_2, \dots, V_k$
  - Ziel: minimale Anzahl Kanten zwischen Zellen
- Standardvariante:  $|V_i| \leq U$  für festes  $U$ :
  - Anzahl Zellen kann variieren ( $\geq \lceil n/U \rceil$ ).
- Balancierte Variante:  $k$  Zellen und Unausgeglichenheit  $\epsilon$ :
  - genau  $k$  Zellen (können nicht-zusammenhängend sein), Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

**beides NP-schwer  $\Rightarrow$  benutze Heuristiken**

- METIS [KK99]
- SCOTCH [PR96]
- DiBaP [MMS09]
- Kappa [HSS10], KaSPar [OS10], Kaffpa [SS11], KaffpaE [SS12]



## Schnitt

- Partition des Graphen in 2 Teile ( $V_1, V_2$ )
- Größe: Anzahl Schnittkanten ( $|S|$ )

## Minimaler $s$ - $t$ Schnitt

- entferne minimale Anzahl Kanten, sodass  $s$  und  $t$  im Graphen nicht mehr verbunden sind
- kann in maximalen Fluss überführt werden
- in Polynomialzeit zu berechnen

## Dünnster Schnitt

- Schnitt mit  $|S| / \min\{|V_1|, |V_2|\}$  minimal
- NP-schwer

## Exact Graph Bisection

- Schnitt mit  $|S|$  minimal und  $|V_1|, |V_2| < \lceil |V|/2 \rceil$
- NP-schwer

# Wiederholung: Inertial Flow

## Idee:

- Nutze geographische Einbettung
- Basiert auf Max-Flow / Min-Cut
- Berechnet eine Bipartitionierung

## Idee:

- Nutze geographische Einbettung
- Basiert auf Max-Flow / Min-Cut
- Berechnet eine Bipartitionierung

## Algo:

- Für beide Diagonalen, die Horizontale und die Vertikale:
  - Projiziere Knoten auf Gerade
  - Orderne Knoten nach Position
  - Mache die  $bn$  ersten/letzten Knoten zur Quelle/Senke (ein typischer Wert für  $b$  ist 0.25 - 0.45)
  - Berechne einen Min-Cut
- Nimm den besten der 4 berechneten Schnitte

## $k$ -Partitionierung

- Inertial Flow teilt den Graph in zwei Teile
- Um  $k$  Teile zu erhalten gibt es folgenden einfachen Algorithmus:
  - Solange man weniger als  $k$  Teile hat:  
→ Zerteile das größte Teil in zwei Teile

# PUNCH

# Natural Cuts

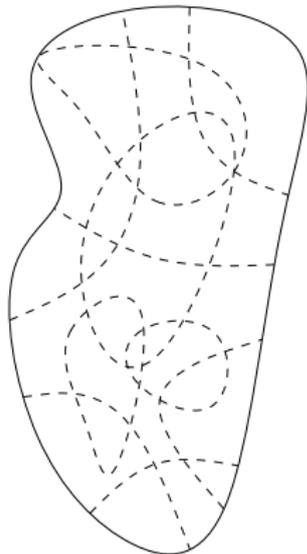


Straßengraphen: dichte Regionen (Gitter) abwechselnd mit **natürlichen Schnitten**

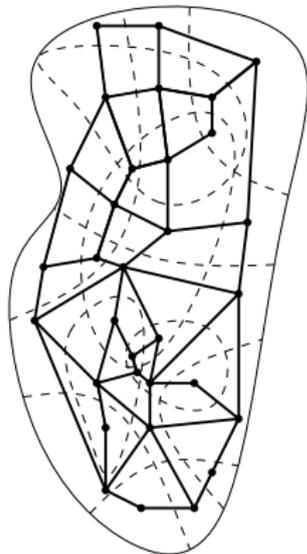
Flüsse, Berge, Wüsten, Wälder, Parks, Grenzen, Autobahnen, ...

**PUNCH:** Partitioner Using Natural-Cut Heuristics

- 1 **Ausdünnung:**  
entspricht “match + contract” auf Folie 13
  - finde natürliche Schnitte (auf richtiger Skala)
  - behalte Schnittkanten, kontrahiere alle anderen
- 2 **Zusammensetzen:**
  - partitioniere (kleineren) kontrahierten Graphen  
“initial partitioning”
  - greedy + lokale Suche [+ Kombinationen]  
“uncontract + local improvements”

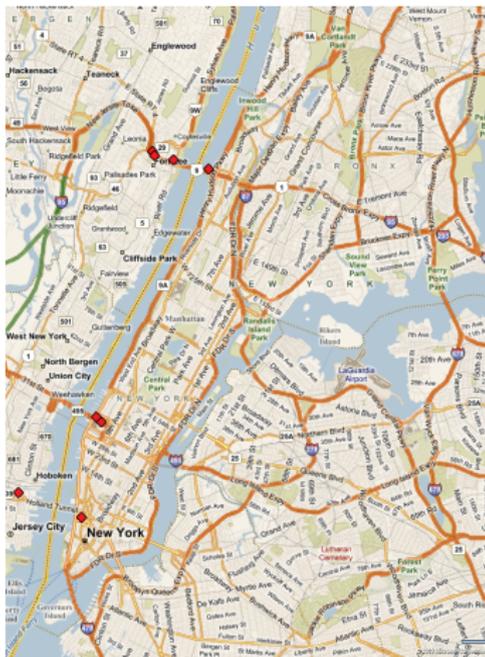


- 1 **Ausdünnung:**  
entspricht “match + contract” auf Folie 13
  - finde natürliche Schnitte (auf richtiger Skala)
  - behalte Schnittkanten, kontrahiere alle anderen
- 2 **Zusammensetzen:**
  - partitioniere (kleineren) kontrahierten Graphen  
“initial partitioning”
  - greedy + lokale Suche [+ Kombinationen]  
“uncontract + local improvements”



# Finde natürliche Schnitte

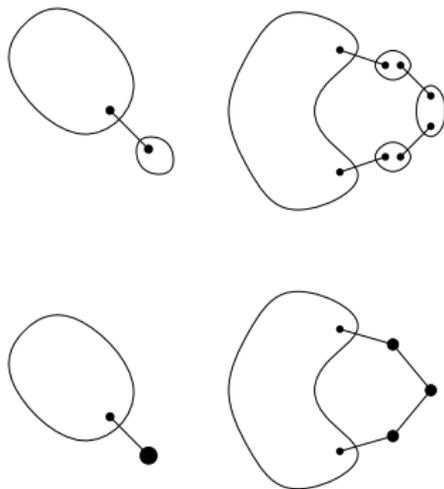
- Wir brauchen dünne Schnitte zwischen dichten Regionen kleiner gleich  $U$ :
- Dünnsster Schnitt?
  - Zu aufwendig.
- Berechne minimalen  $s$ - $t$  Schnitt (für zufällige  $s, t$ )?
  - Meist trivial: Knotengrade sind klein.
- Wir brauchen was anderes:
  - $s$ - $t$  Schnitte **zwischen Regionen**



# Finde natürliche Schnitte

Berechne **kleine Schnitte** zuerst:

- identifiziere 1- and 2-Schnitte
- reduziert Straßengraph um Faktor 2
- beschleunigt Schnittfindung



# Finde natürliche Schnitte

1 Wähle ein Zentrum  $v$ .



# Finde natürliche Schnitte

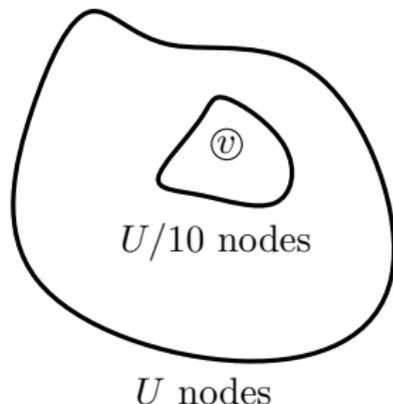
- 1 Wähle ein Zentrum  $v$ .
- 2 Breitensuche der Größe  $U$  um  $v$ :
  - Erste  $U/10$  Knoten: Kern
  - Verbliebene Knoten in der Queue: Ring



$U/10$  nodes

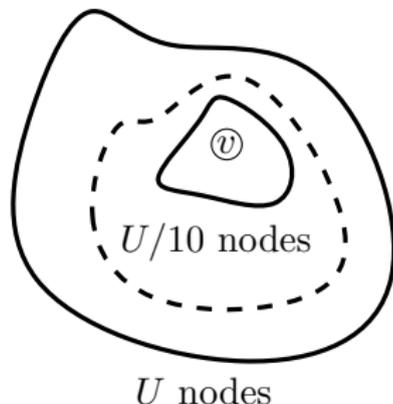
# Finde natürliche Schnitte

- 1 Wähle ein Zentrum  $v$ .
- 2 Breitensuche der Größe  $U$  um  $v$ :
  - Erste  $U/10$  Knoten: Kern
  - Verbliebene Knoten in der Queue: Ring

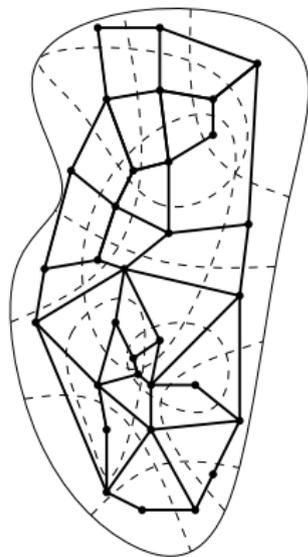


# Finde natürliche Schnitte

- 1 Wähle ein Zentrum  $v$ .
- 2 Breitensuche der Größe  $U$  um  $v$ :
  - Erste  $U/10$  Knoten: Kern
  - Verbliebene Knoten in der Queue: Ring
- 3 Finde minimum Kern/Ring Schnitt:
  - standard  $s-t$  minimaler Schnitt.
- 4 Wiederhole für verschiedene "zufällige"  $v$ :
  - bis jeder Knoten in  $\geq 2$  Kernen war



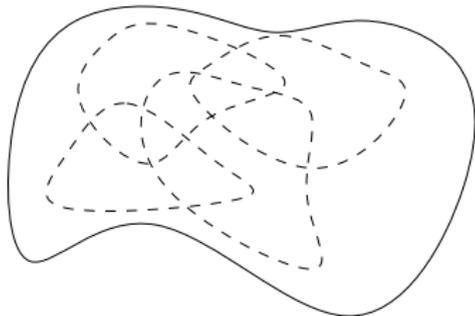
- 1 viele Kanten werden nie geschnitten
- 2 Schnittkanten partitionieren den Graphen in **Fragmente**
- 3 Fragmentgröße  $\leq U$  (meist viel kleiner)
  - Generiere **Fragmentgraph**:
    - Fragment  $\rightarrow$  gewichteter Knoten
    - benachbarte Fragmente  $\rightarrow$  gewichtete Kante



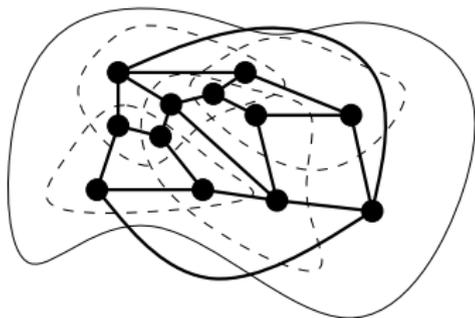
$U$	fragments	frag size
4 096	605 864	30
65 536	104 410	173
1 048 576	10 045	1 793

(Europe: 18M nodes)

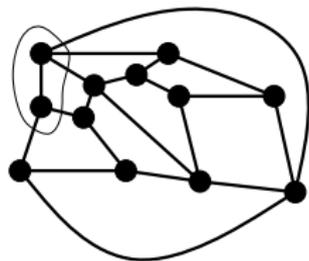
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:



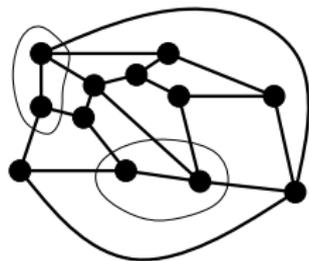
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment



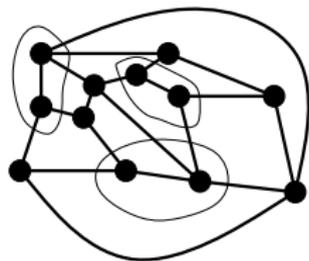
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment
  - kombiniere adjazente Zellen



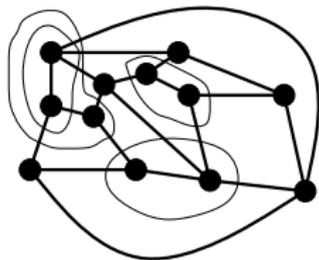
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment
  - kombiniere adjazente Zellen



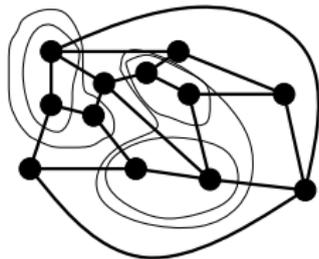
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment
  - kombiniere adjazente Zellen



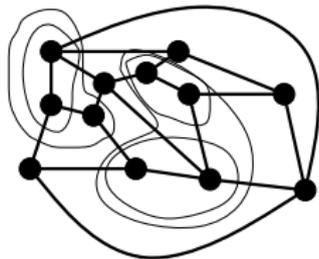
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment
  - kombiniere adjazente Zellen



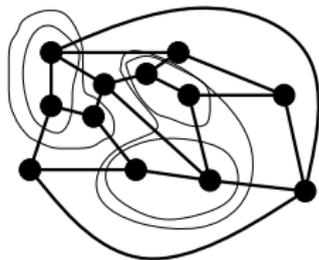
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment
  - kombiniere adjazente Zellen
  - stoppe wenn maximal



- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment
  - kombiniere adjazente Zellen
  - stoppe wenn maximal
- Zufällig greedy:
  - füge Fragmente zusammen, die stärker verbunden...
  - ...im Verhältnis zu ihrer Größe (= # Knoten, die sie repräsentieren).



- Fragmentgröße deutlich unterhalb von  $U$ , Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit einer Zelle pro Fragment
  - kombiniere adjazente Zellen
  - stoppe wenn maximal
- Zufällig greedy:
  - füge Fragmente zusammen, die stärker verbunden...
  - ...im Verhältnis zu ihrer Größe (= # Knoten, die sie repräsentieren).



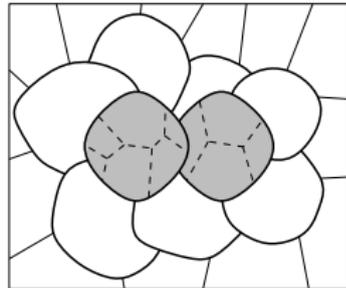
Ergebnis okay, aber es geht besser.

# Lokale Suche

(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

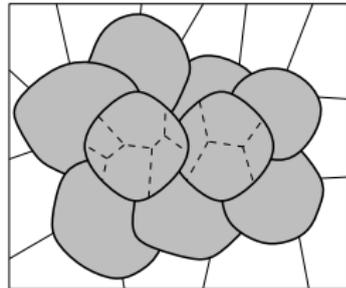
(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.



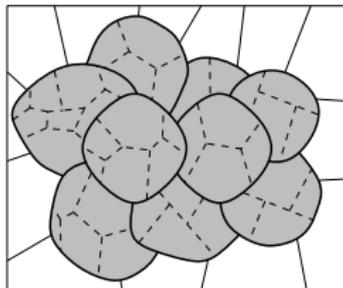
(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.
- Variante benutzt auch Nachbarzellen:
  - mehr Flexibilität;
  - beste Ergebnisse (Standard).



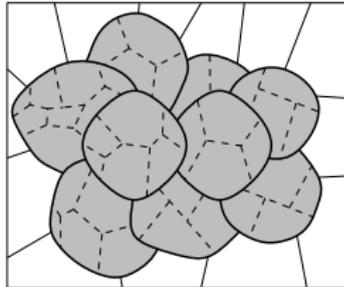
(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.
- Variante benutzt auch Nachbarzellen:
  - mehr Flexibilität;
  - beste Ergebnisse (Standard).
- Nachbarzellen können auch in Fragmente zerteilt werden:
  - Subprobleme zu groß;
  - schlechtere Ergebnisse.



(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

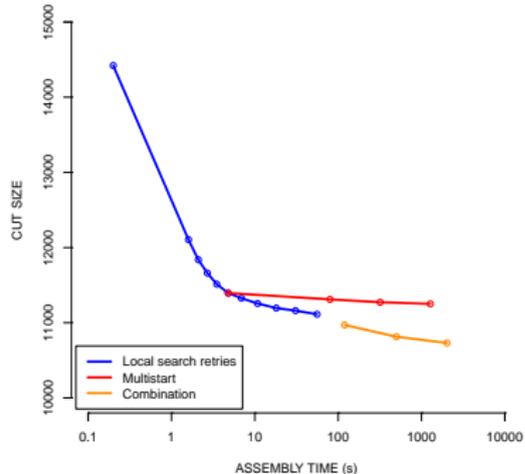
- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.
- Variante benutzt auch Nachbarzellen:
  - mehr Flexibilität;
  - beste Ergebnisse (Standard).
- Nachbarzellen können auch in Fragmente zerteilt werden:
  - Subprobleme zu groß;
  - schlechtere Ergebnisse.



Evaluieren Sie jedes Subproblem mehrmals (mit Zufall).

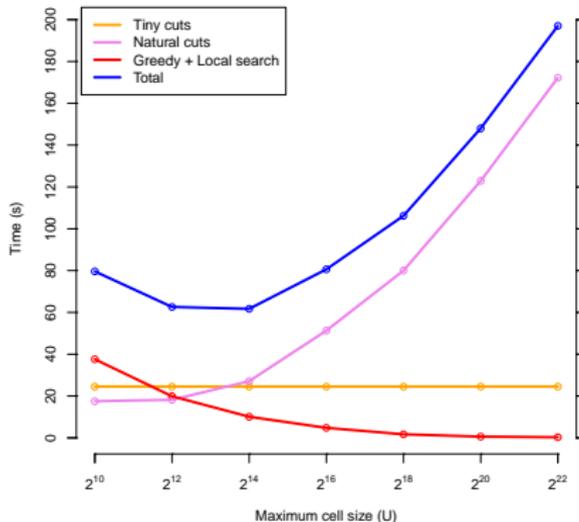
# Weitere Verbesserungen

- **Mehrfacher Test** für jedes Paar
  - lokale Suche hat Zufallskomponenten
- **Multistart:**
  - konstruktiv + lokale Suche;
  - behalte beste Lösung.
- **Kombination:**
  - kombiniere manche Lösungen;
  - merge + lokale Suche.



(Europe,  $U = 2^{16}$ )

längere Laufzeit → bessere Lösungen



Europe (18M vertices), 12 cores

Flaschenhälse: Aufbau für kleine  $U$ , Ausdünnung für große  $U$

$U$	$A$	$B$	$B/\sqrt{U}$	$B/\sqrt[3]{U}$
1 024	895	16.8	0.52	1.66
4 096	3 602	27.6	0.43	1.73
16 384	14 437	45.6	0.36	1.80
65 536	57 376	72.7	0.28	1.80
262 144	222 626	103.7	0.20	1.62
1 048 576	826 166	134.3	0.13	1.32
4 194 304	3 105 245	127.9	0.06	0.79

(Europe, 16 retries, no multistart/combination)

$U$ : maximal erlaubte Zellengröße

$A$ : durchschn. Zellengröße der Lösungen

$B$ : durchschn. Randknoten pro Zelle

Straßengraphen haben sehr kleine Separatoren

Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

Erweiterung von PUNCH:

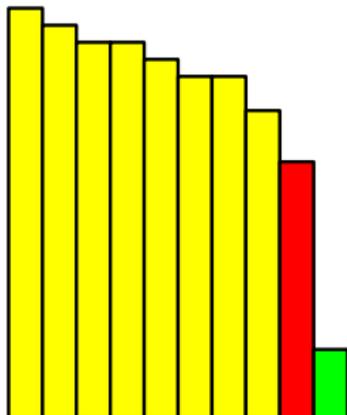
- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

Erweiterung von PUNCH:

- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

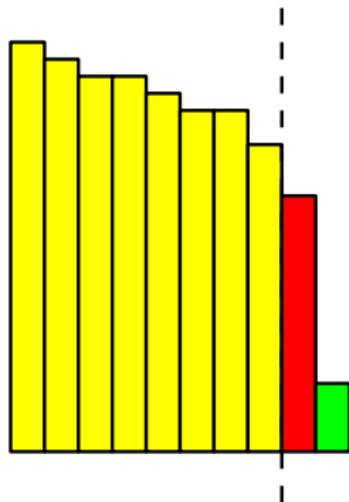


Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

Erweiterung von PUNCH:

- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

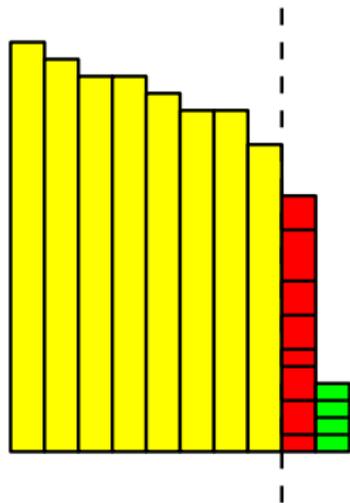


Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

Erweiterung von PUNCH:

- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)



Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

Erweiterung von PUNCH:

- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

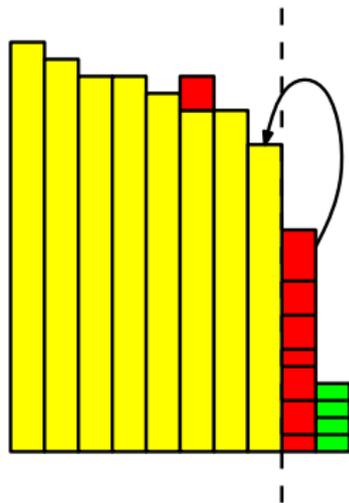


Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

Erweiterung von PUNCH:

- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

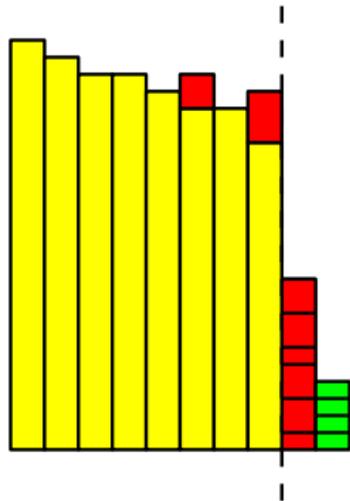


Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

Erweiterung von PUNCH:

- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

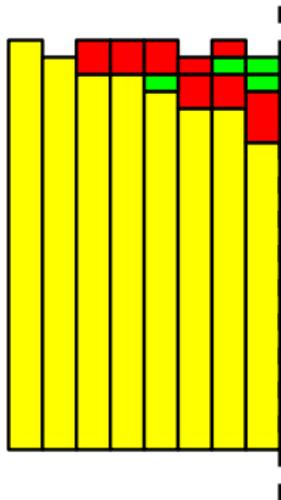


Andere Verfahren lösen **balancierte Variante**:

- finde  $k$  Zellen mit Größe  $\leq (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ .

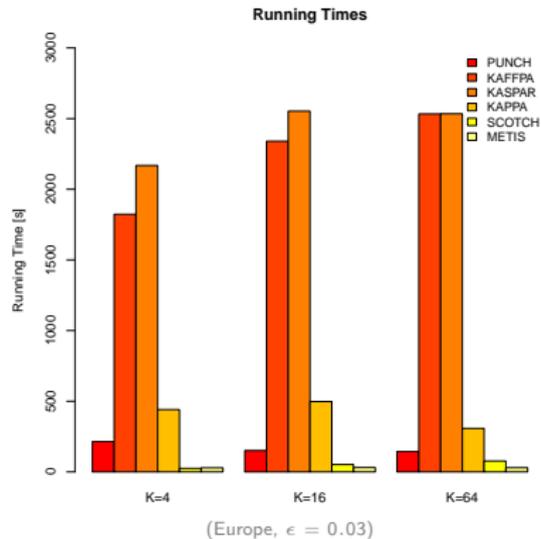
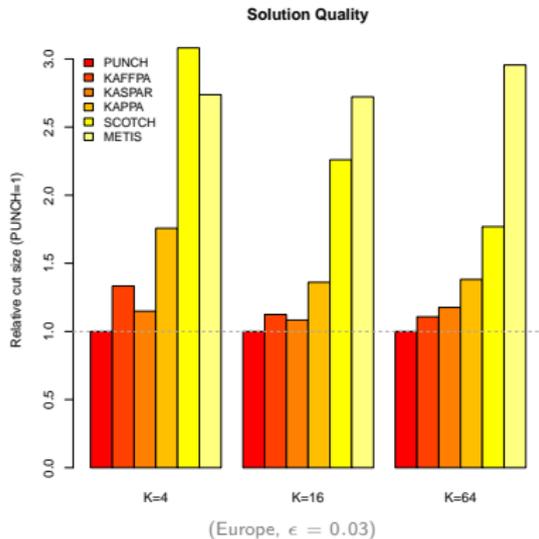
Erweiterung von PUNCH:

- 1 benutze Standard-PUNCH mit  $U = (1 + \epsilon) \lceil n/k \rceil$ ;
- 2 wähle  $k$  Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

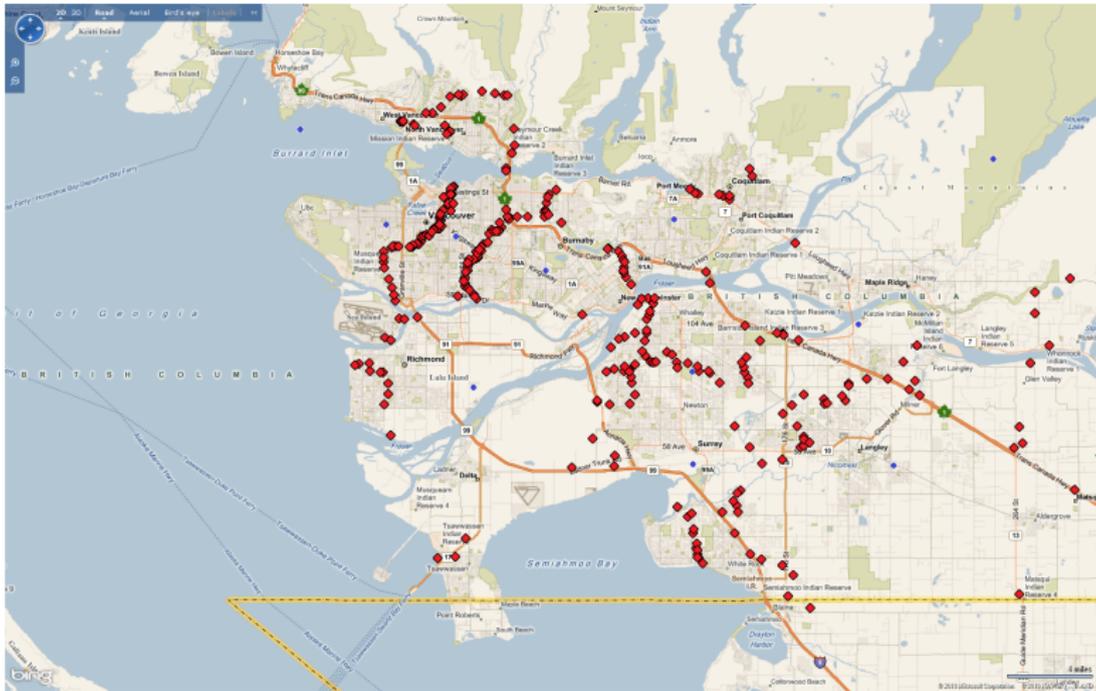


PUNCH: bessere Lösungen...

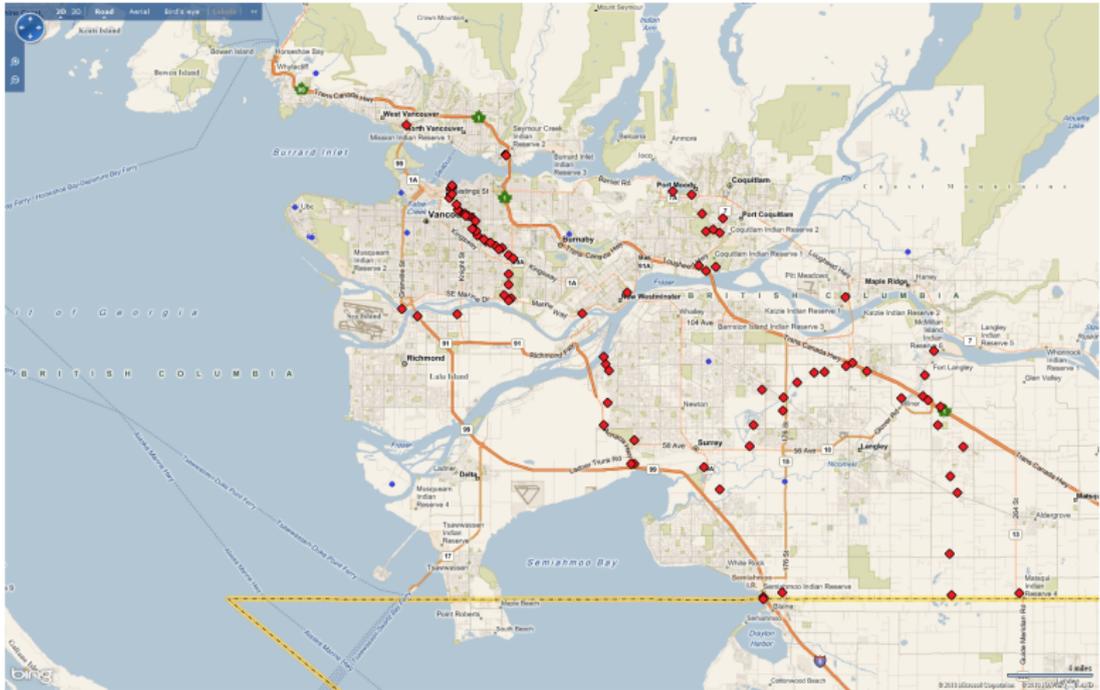
...in vernünftiger Zeit.



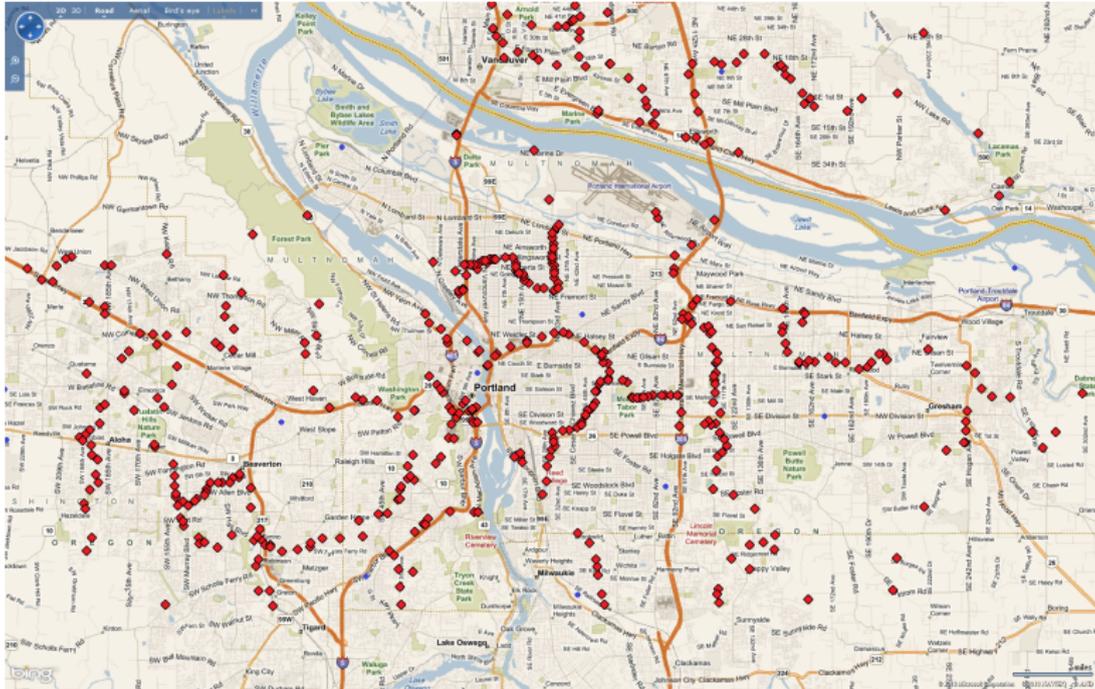
# Vancouver mit METIS



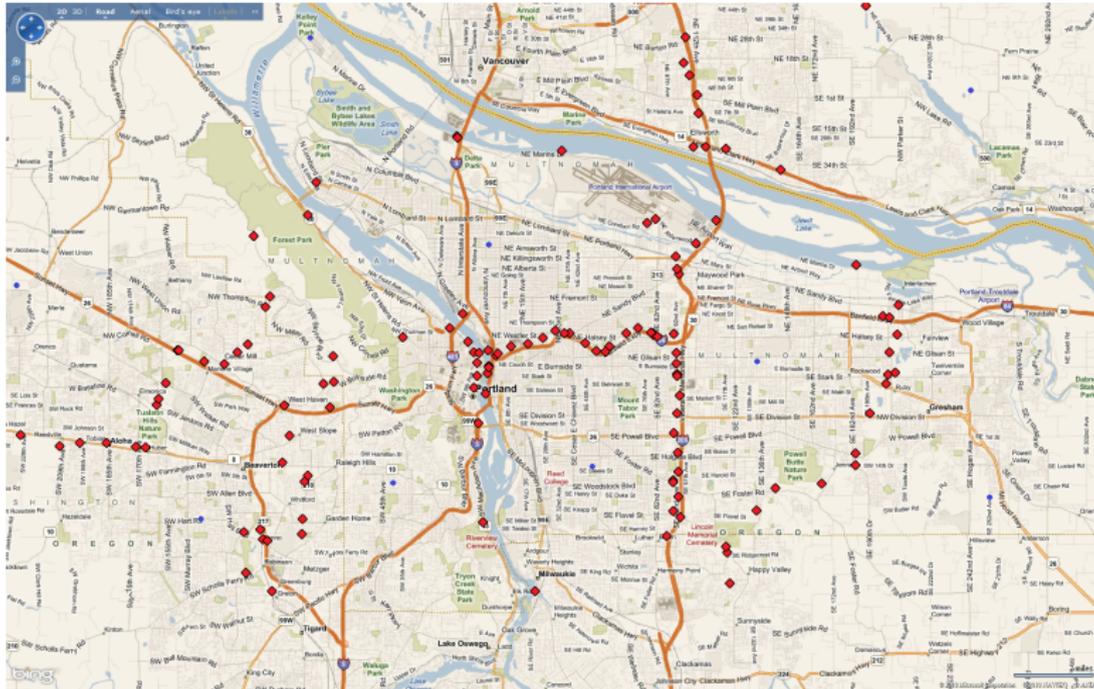
# Vancouver mit PUNCH



# Portland mit METIS



# Portland mit PUNCH

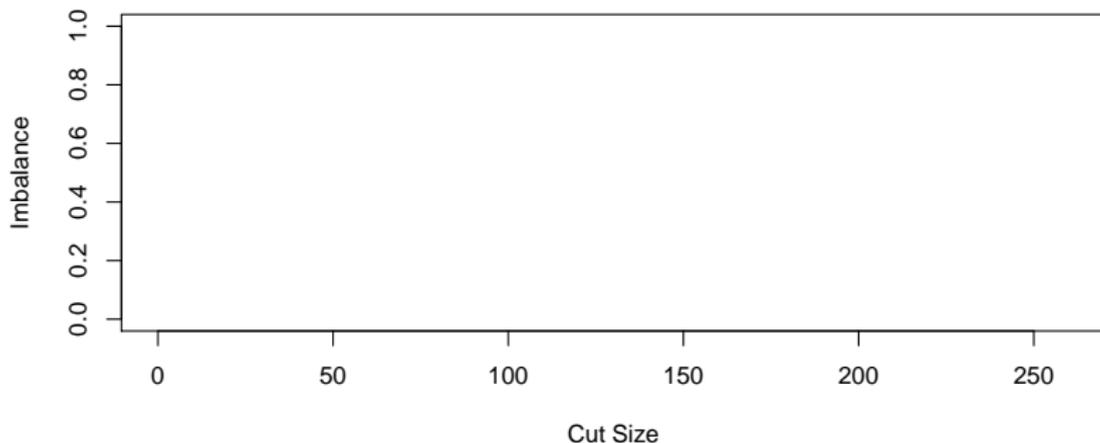


- reduziert Randknoten gegenüber METIS um mehr als Faktor 2
- Beschleunigung von Arc-Flags Vorberechnung um Faktor 2
- auch Multilevel-Partitionen berechenbar  
top-down liefert beste Ergebnisse
- dabei Vorteile gegenüber METIS sogar größer
- Wie weit vom Optimum entfernt?
- Wird für die Bing Routing Engine benutzt.



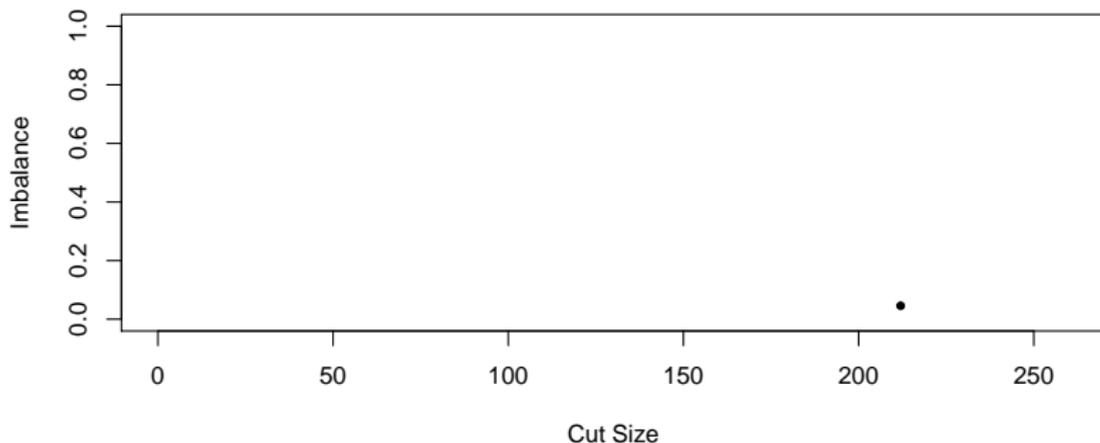
# FlowCutter

# “Gute” Schnitte



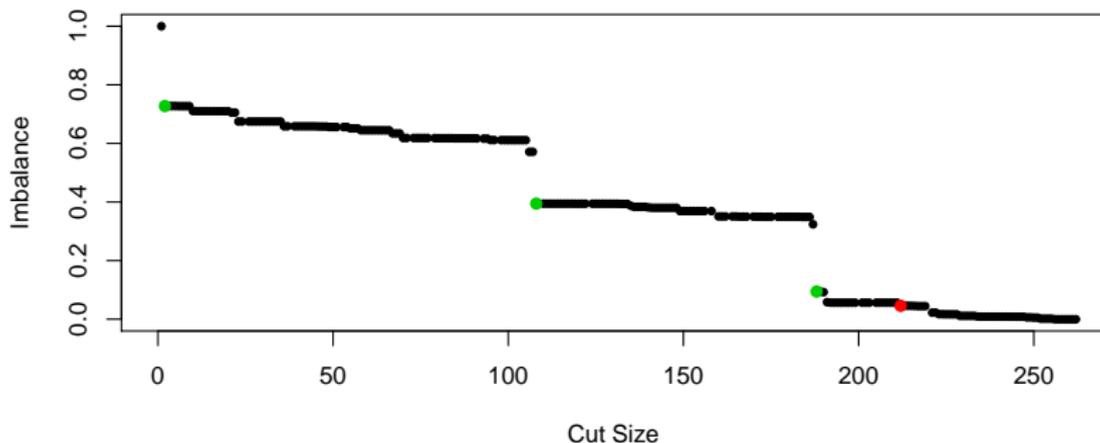
- Imbalance = 0 → Schnitt perfekt balanciert
- Imbalance = 1 → alle Knoten auf einer Seite

# “Gute” Schnitte



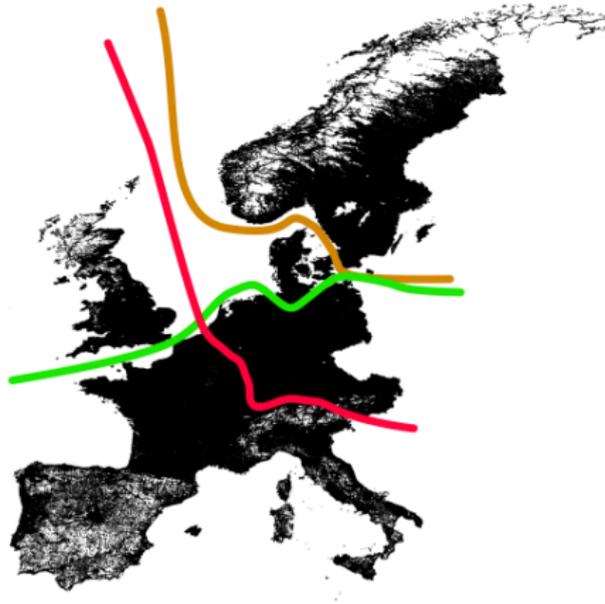
- Europa Graph mit  $18 \cdot 10^6$
- Ergebnis für maximale imbalance von 5%
- Ist der Schnitt gut?  
(Vielleicht, da  $212 \lll 18 \cdot 10^6$ ?)

# “Gute” Schnitte



- Grün markierte Schnitte bieten besseren Trade-Off
- Pareto-Front benötigt um gute Schnitte zu wählen

# “Gute” Schnitte Visualisiert



## FlowCutter

- Heuristischer Algorithmus zum Finden balancierter  $st$ -Schnitte
- Liefert zusammenhängende Partitionen
- Findet Pareto-optimale Lösungen für Imbalance und Schnittgröße

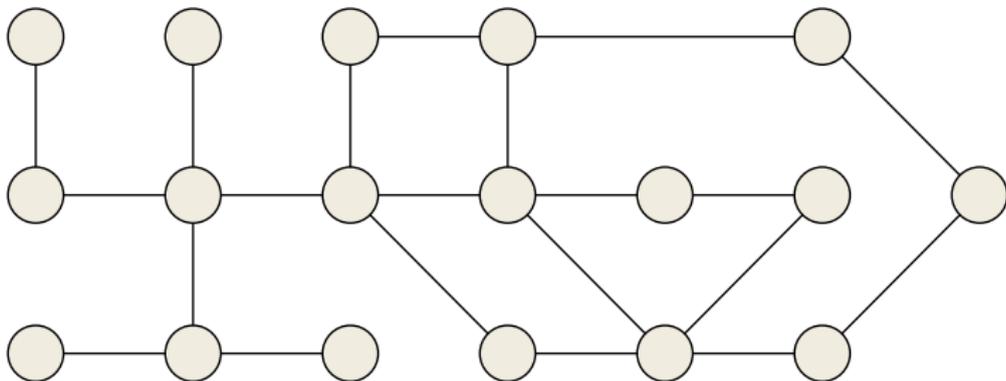
## FlowCutter

- Heuristischer Algorithmus zum Finden balancierter *st*-Schnitte
- Liefert zusammenhängende Partitionen
- Findet Pareto-optimale Lösungen für Imbalance und Schnittgröße

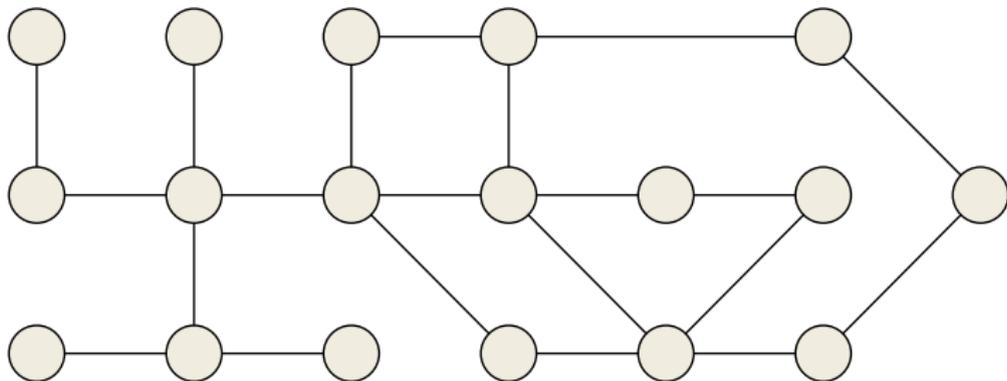
## Idee

- Füge schrittweise Start- und Zielknoten hinzu um Schnitt zu ändern
  - Erweitere Start-/Zielregion bis zum Schnitt (kleinere Seite)
  - Füge einen Knoten jenseits des Schnitts hinzu
- Berechne neuen Schnitt

# Beispiel FlowCutter



# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

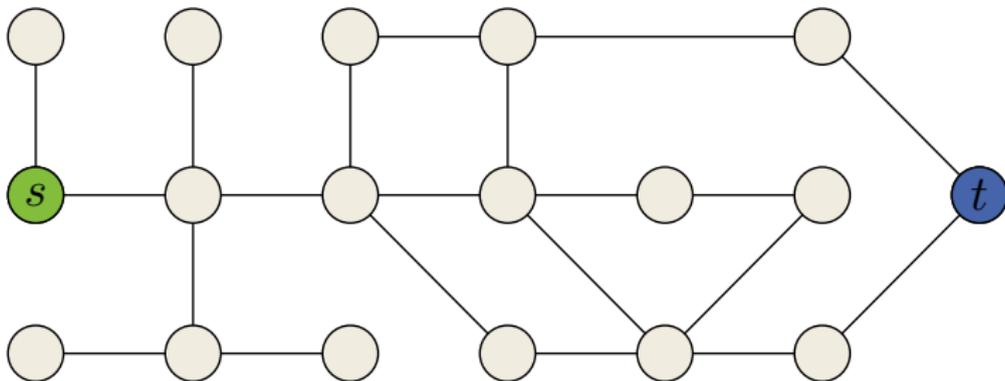
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

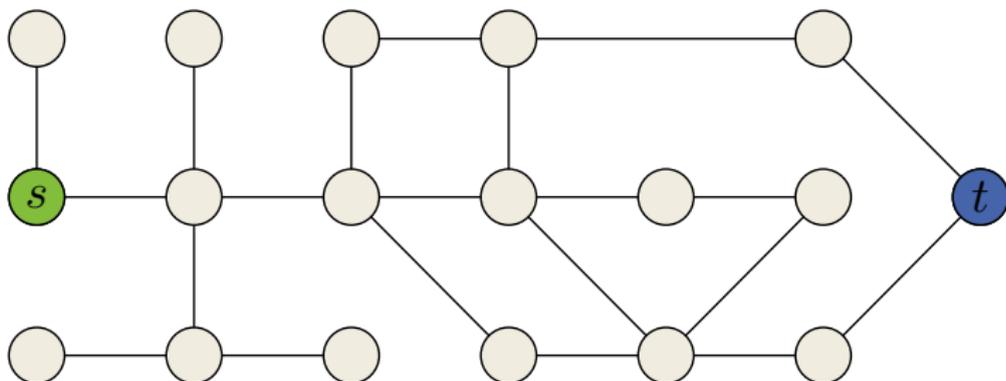
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

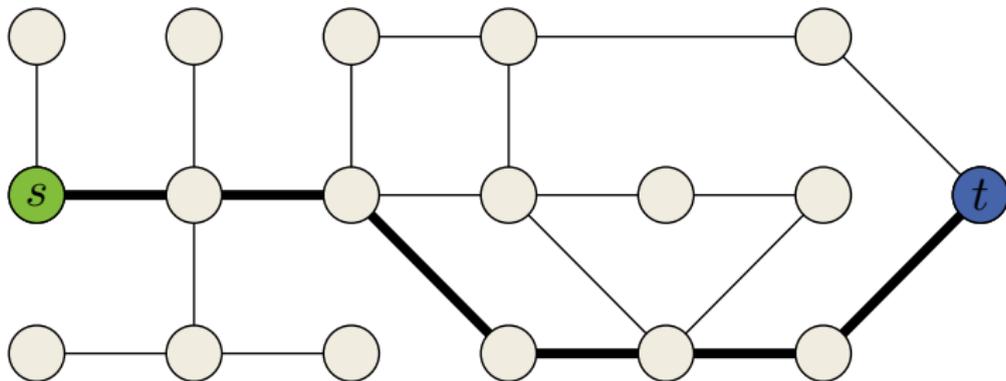
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

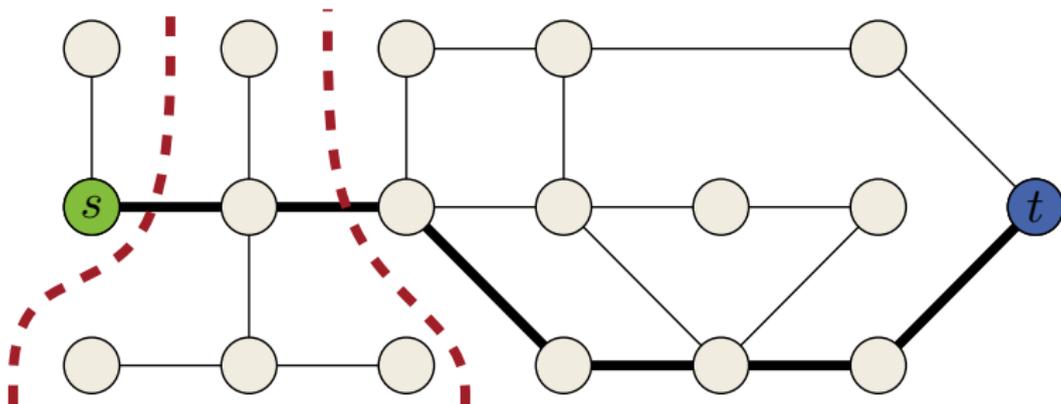
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

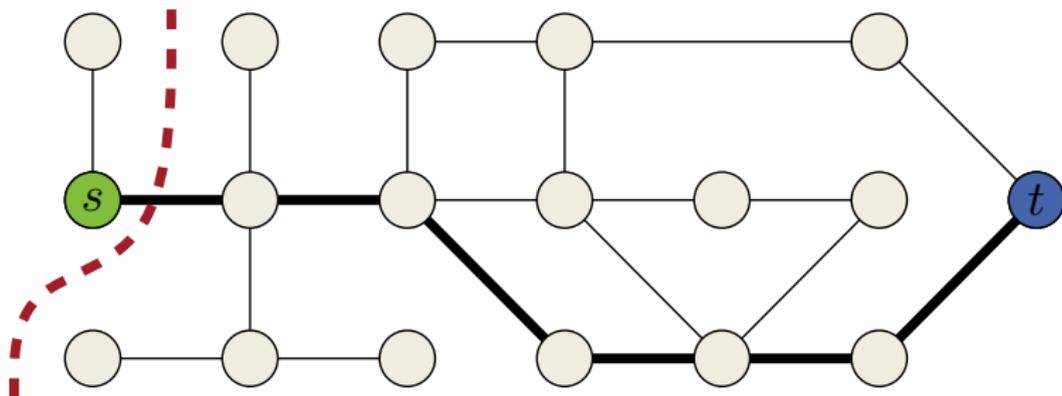
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

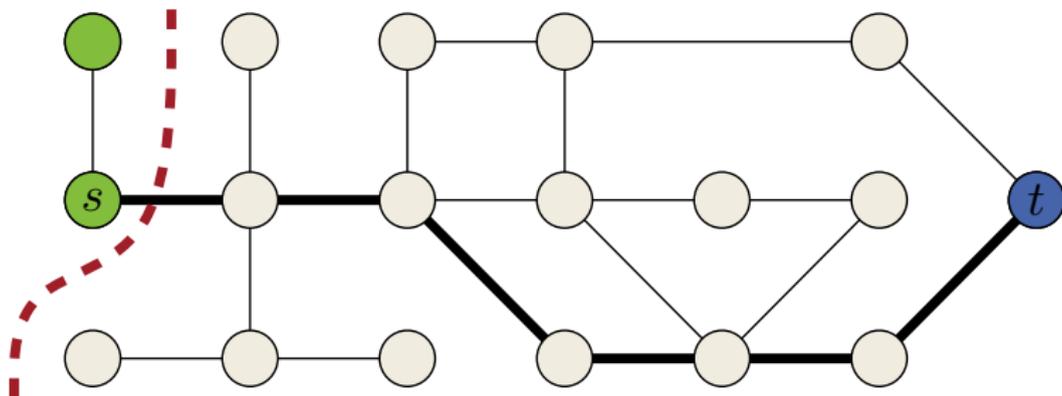
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

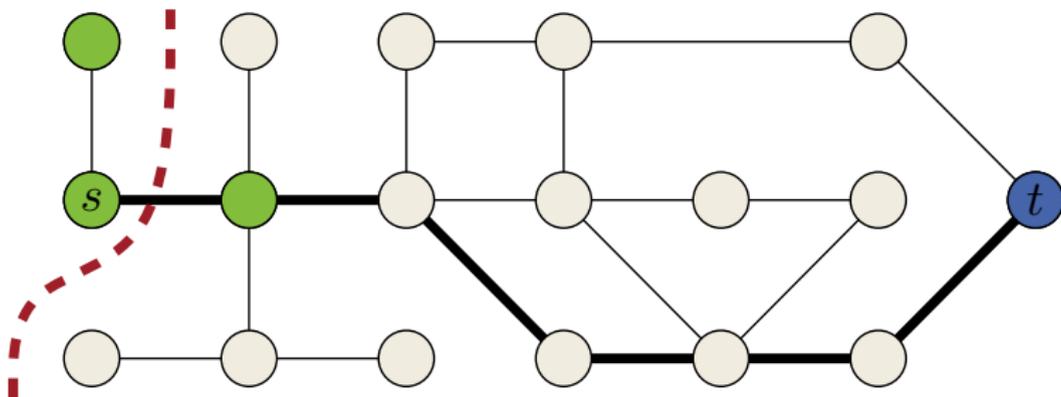
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

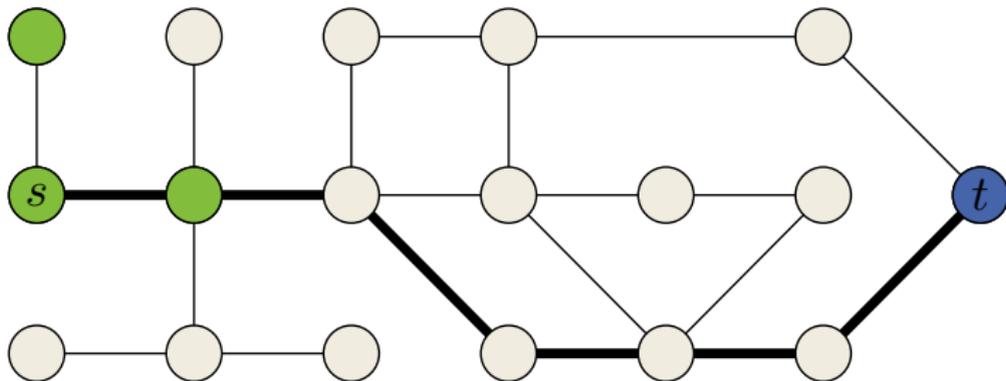
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

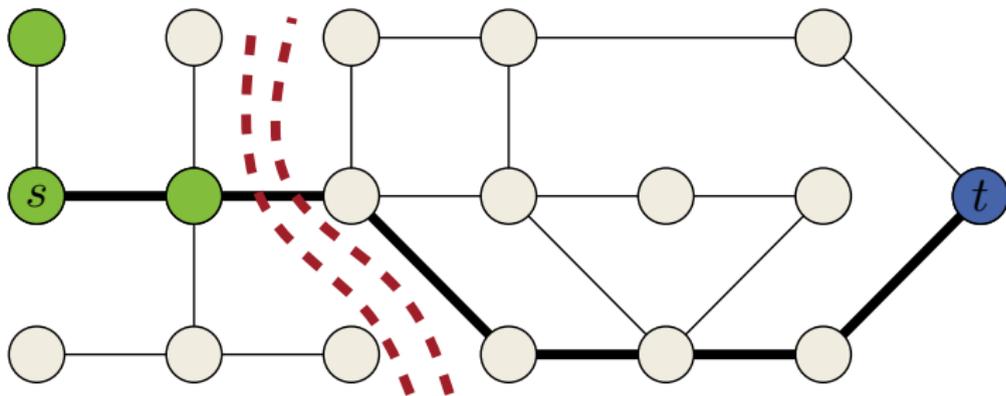
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

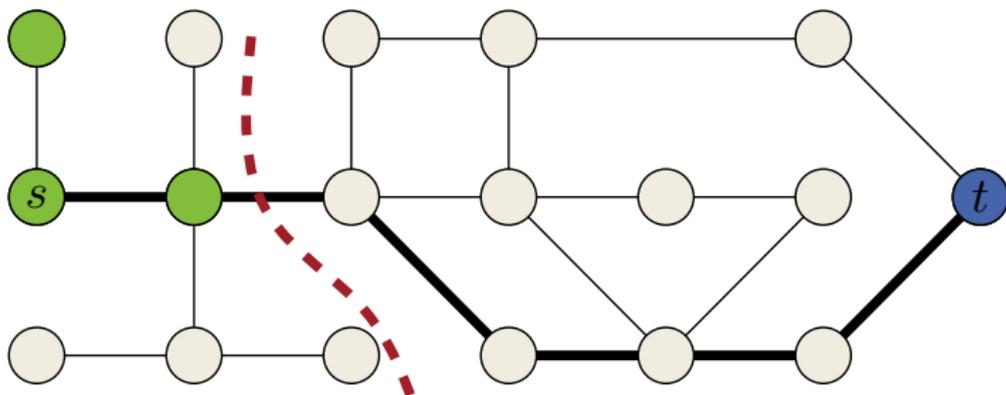
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

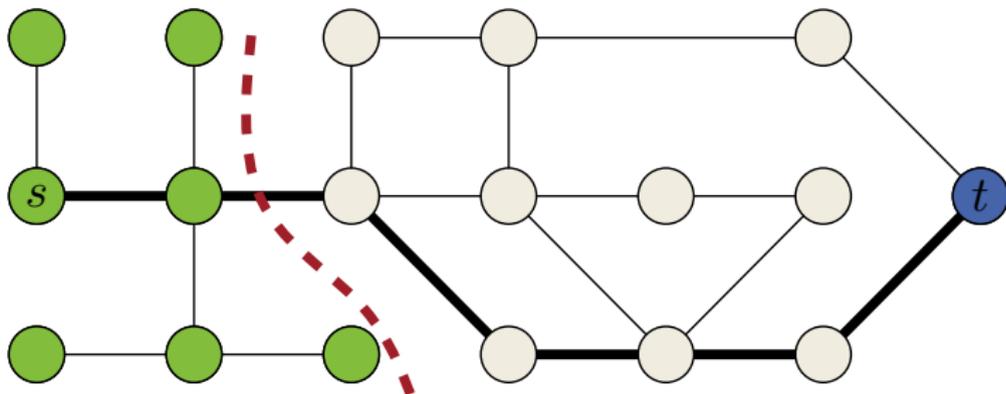
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

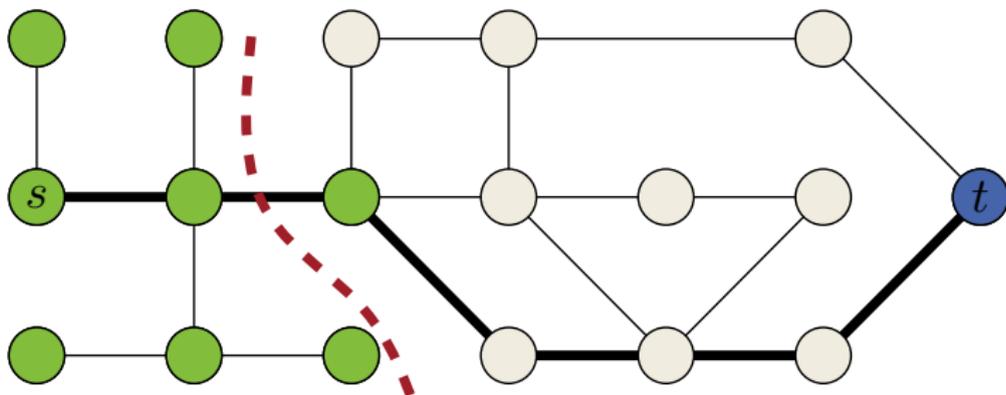
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

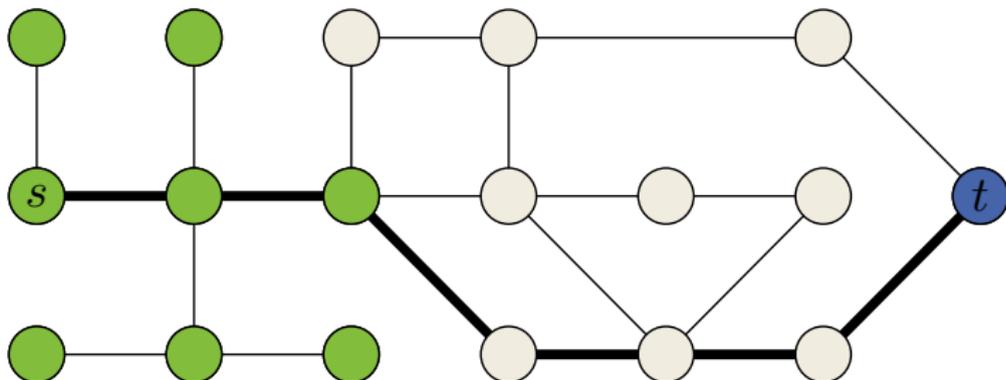
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

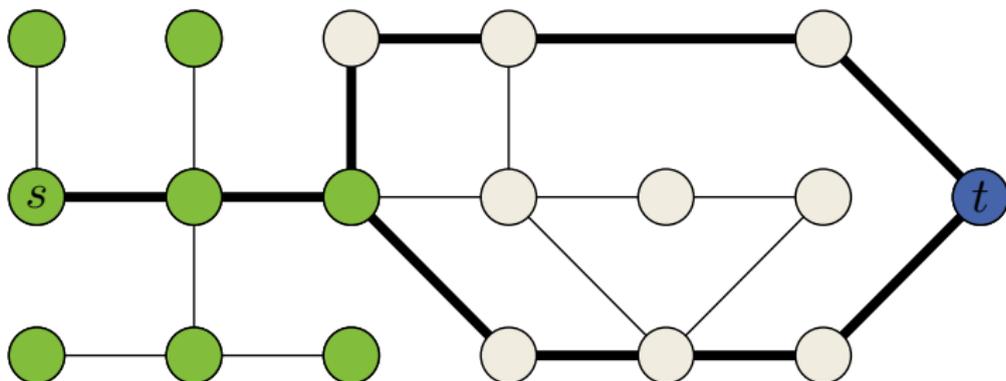
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

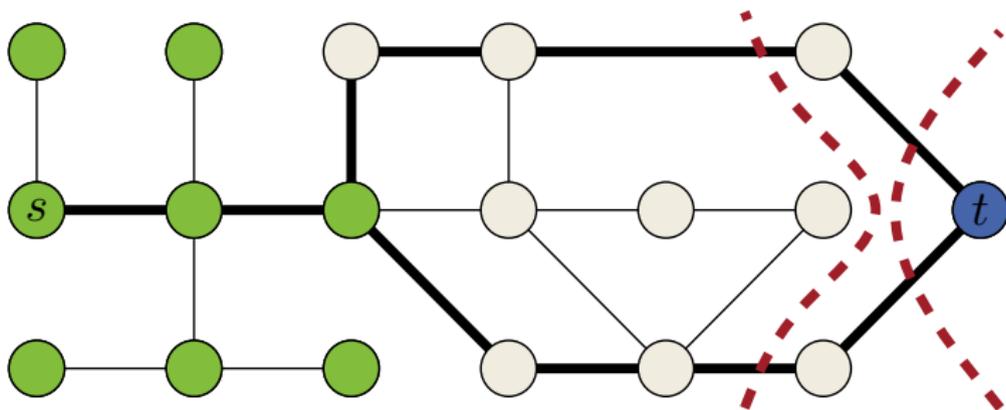
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

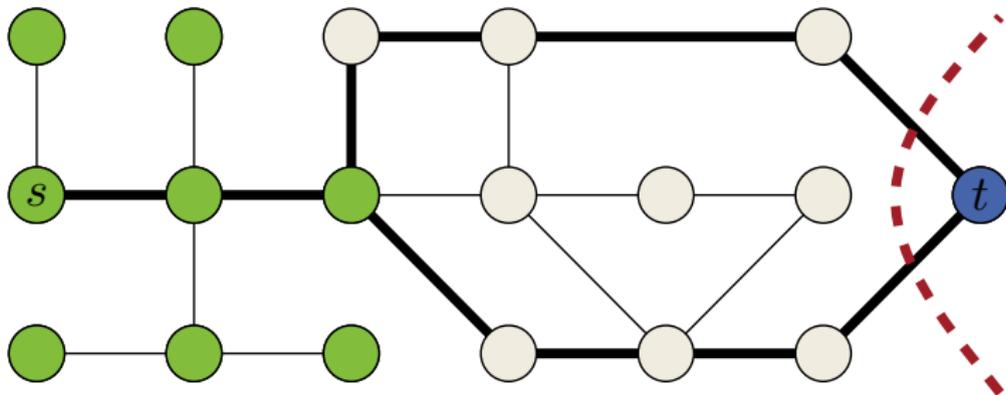
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

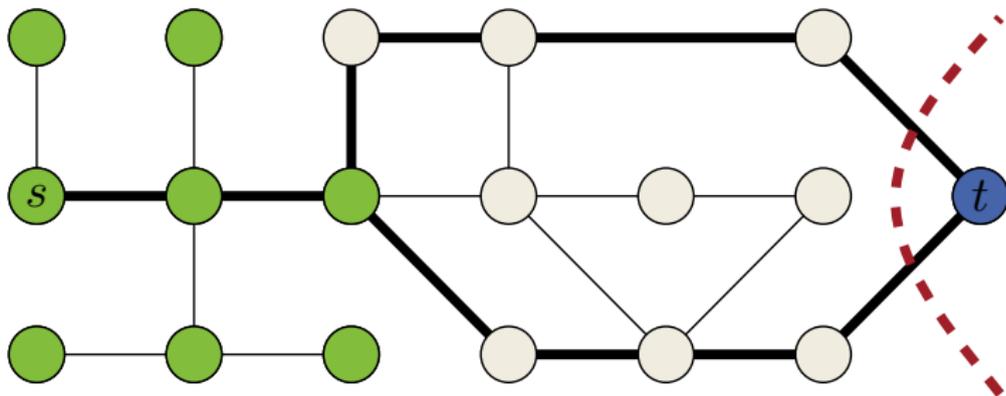
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



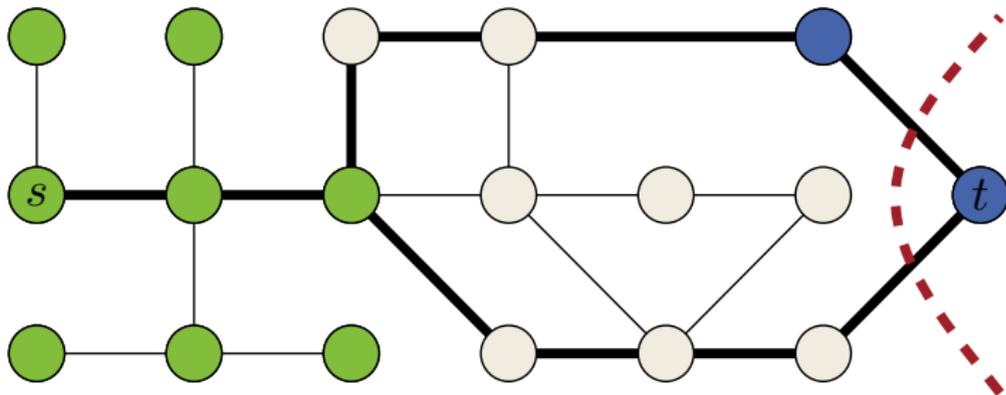
1. Erhöhe Fluss

2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt



1. Erhöhe Fluss

2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

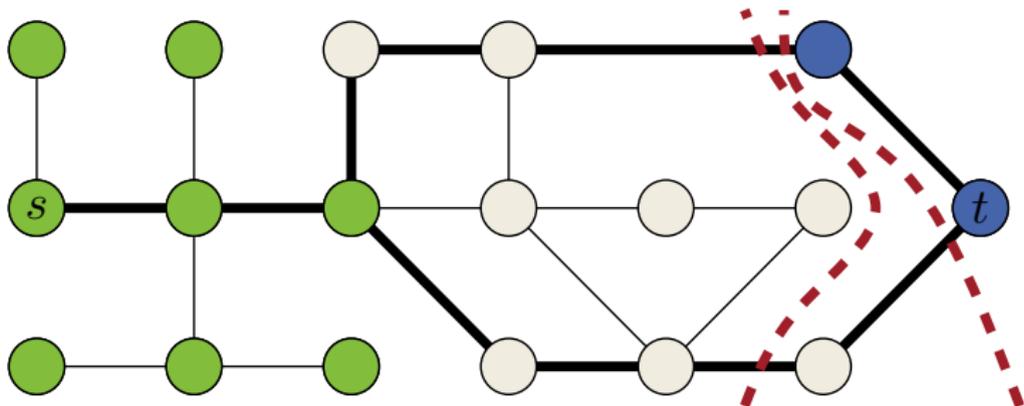
3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt



# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

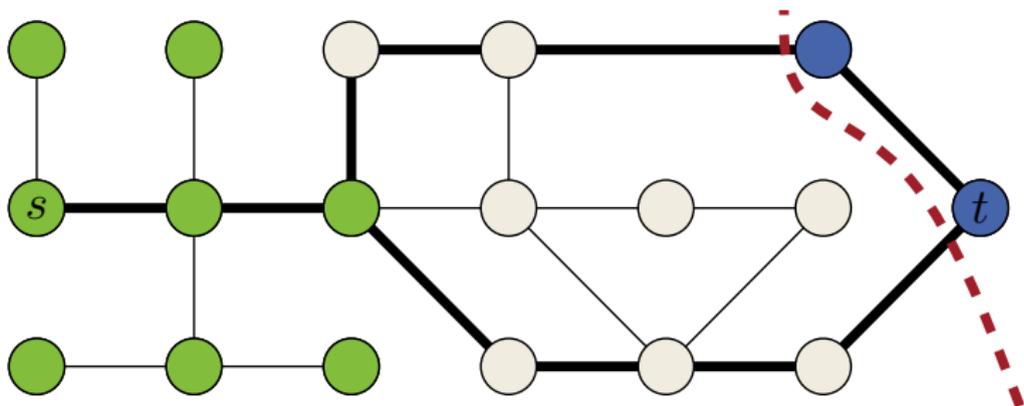
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

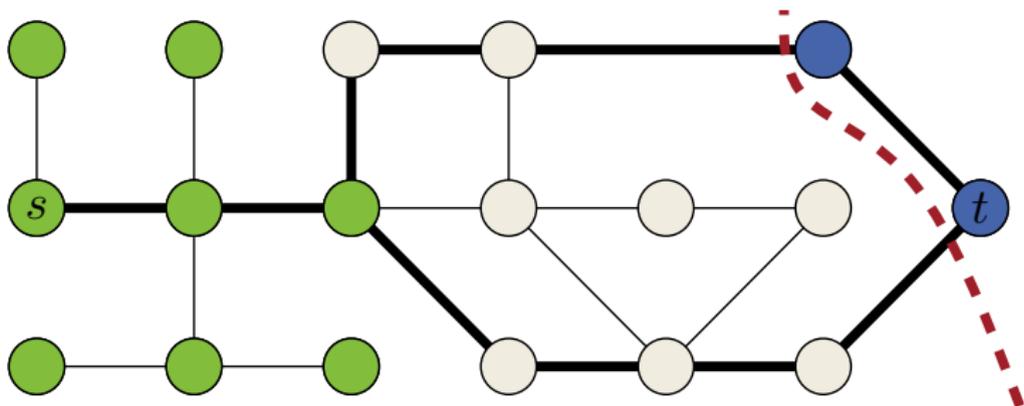
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

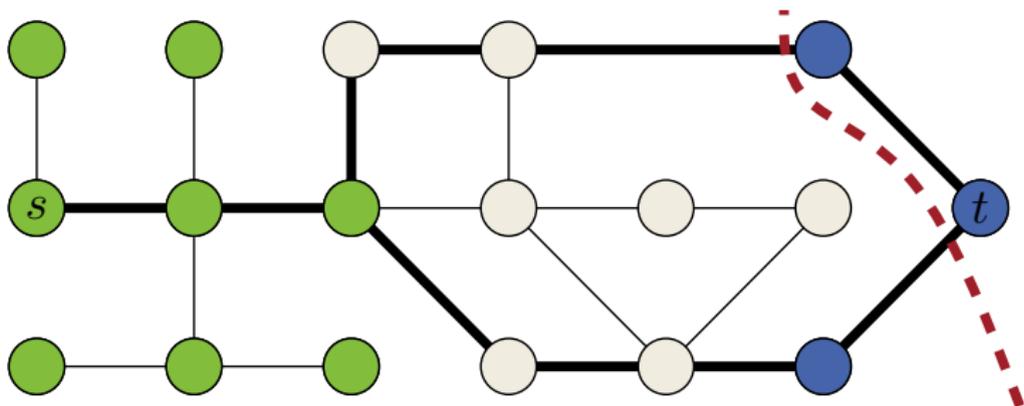
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

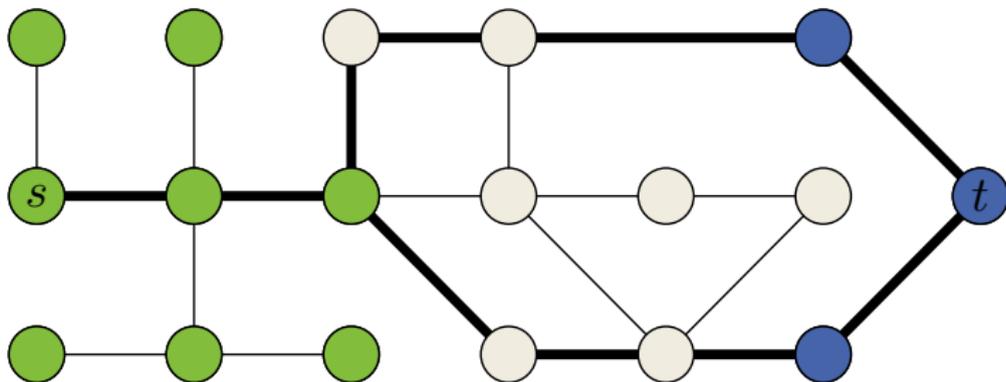
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

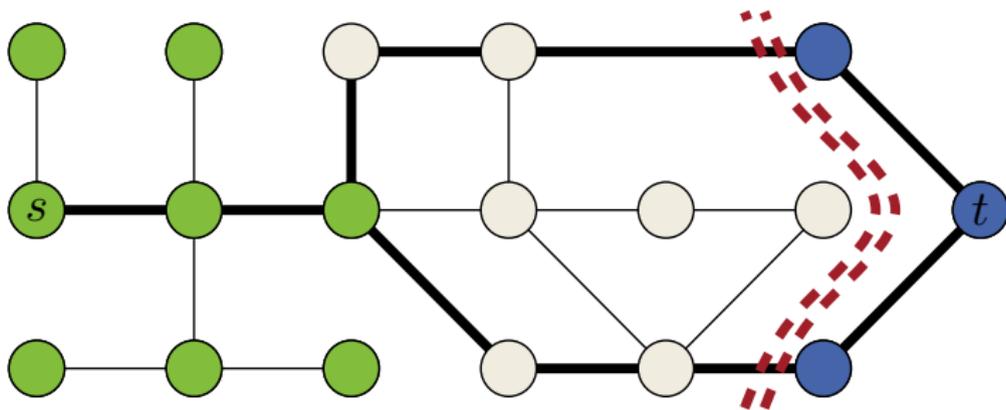
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

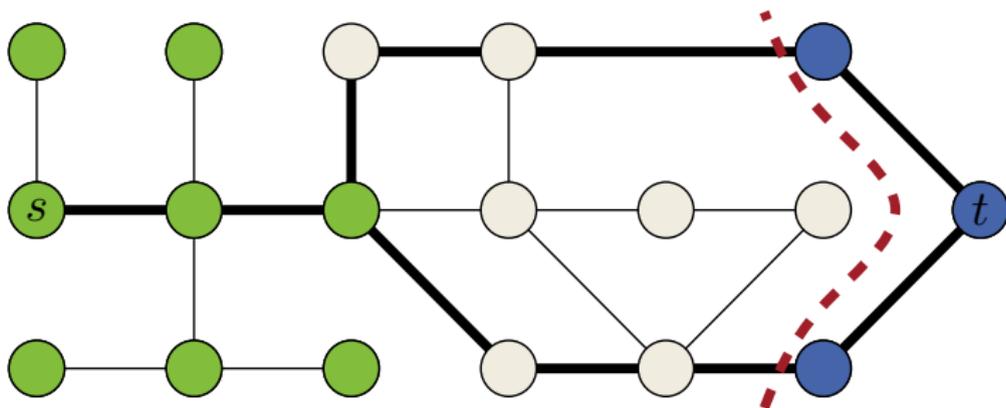
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

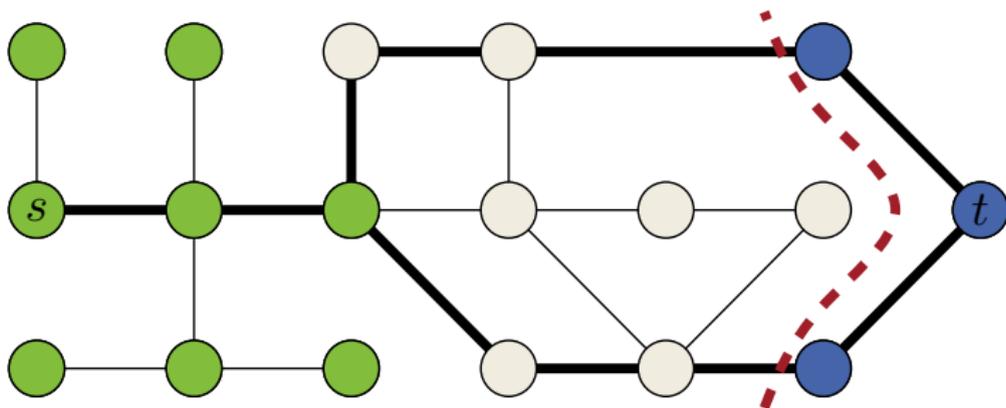
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



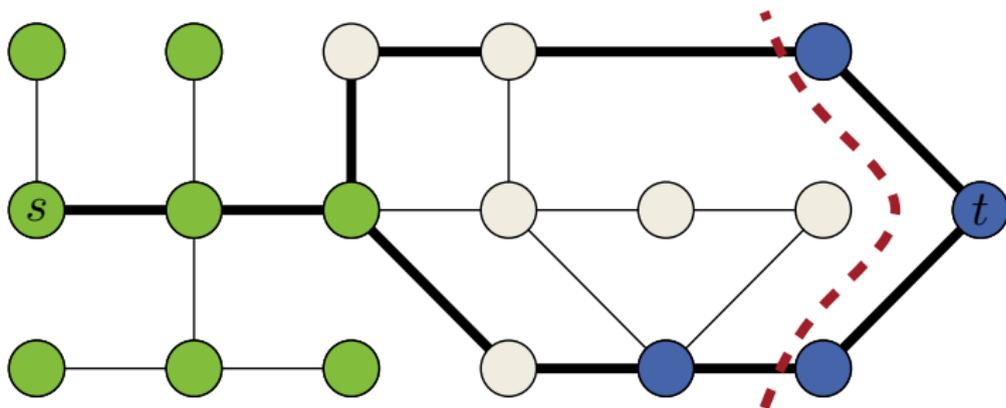
1. Erhöhe Fluss

2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt



1. Erhöhe Fluss

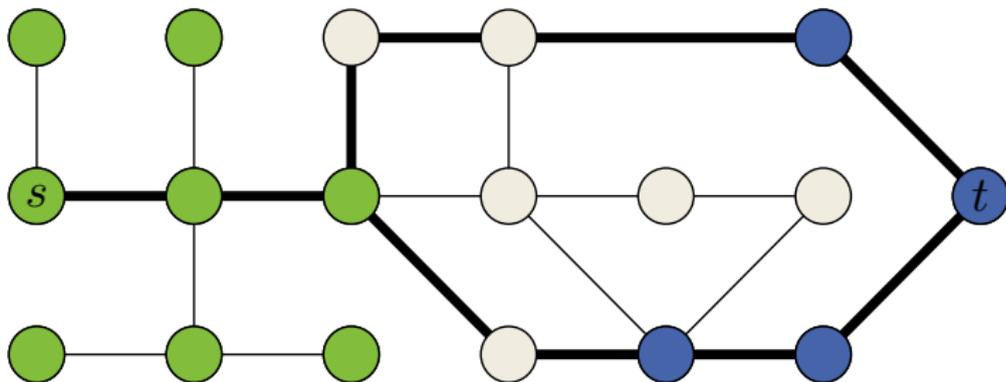
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

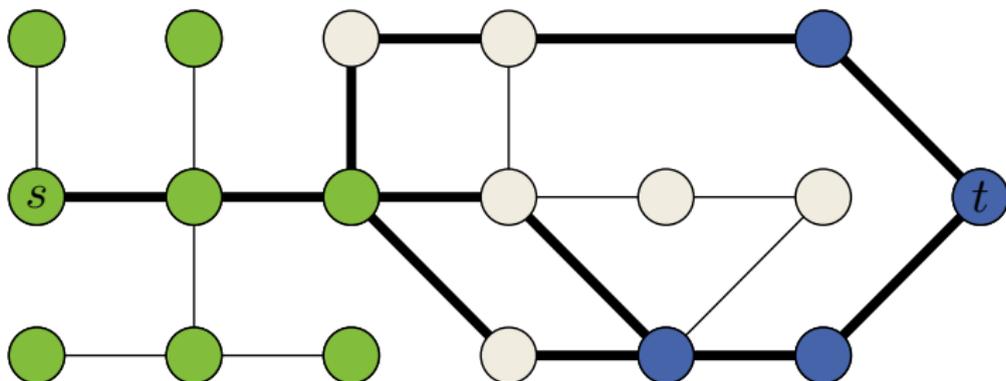
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

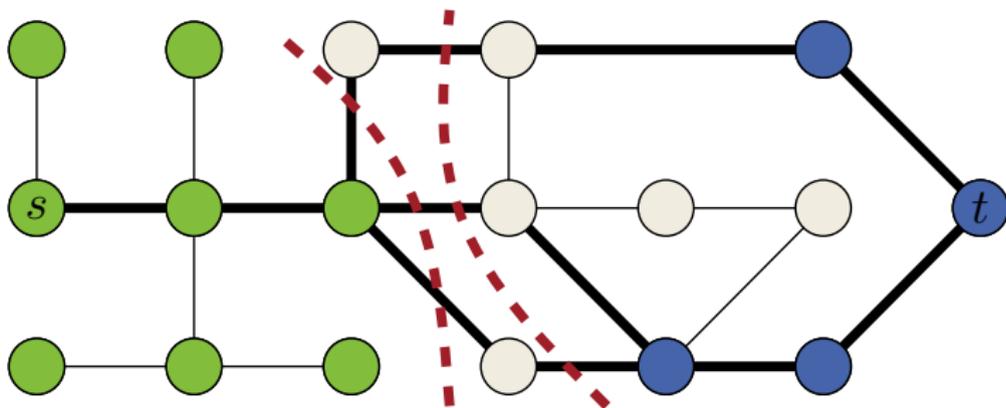
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

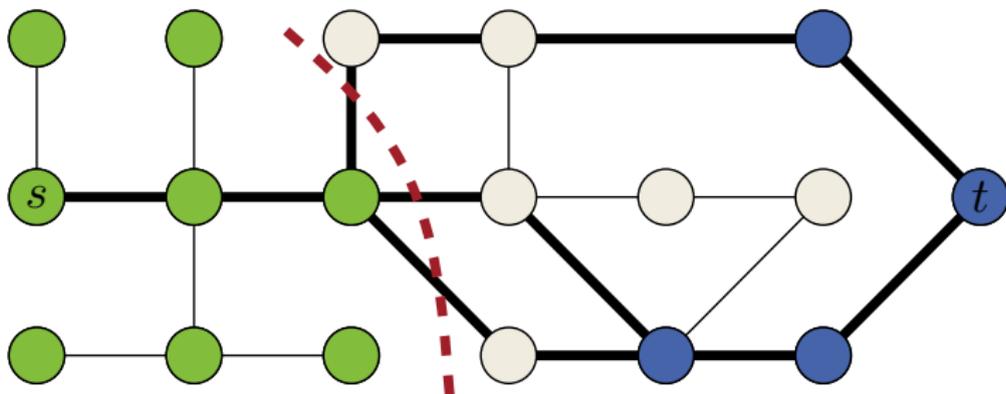
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

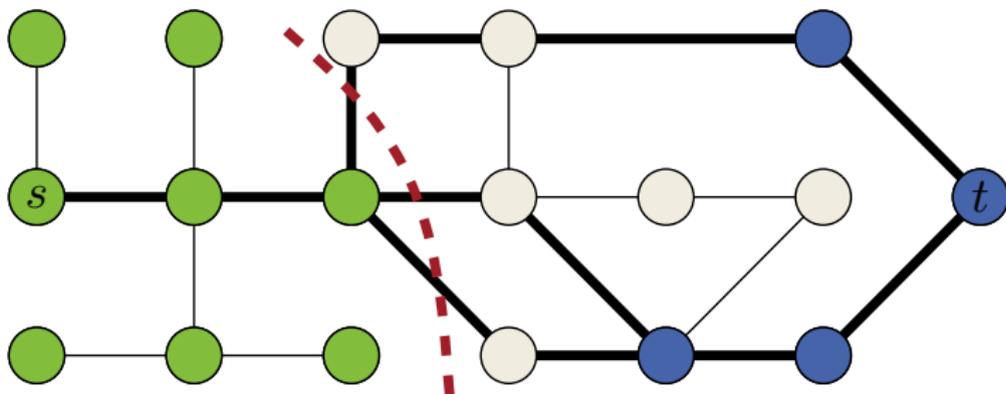
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

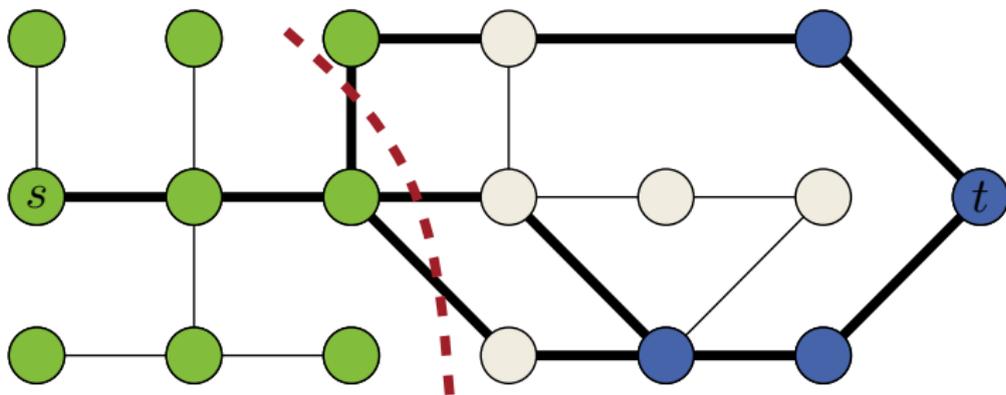
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

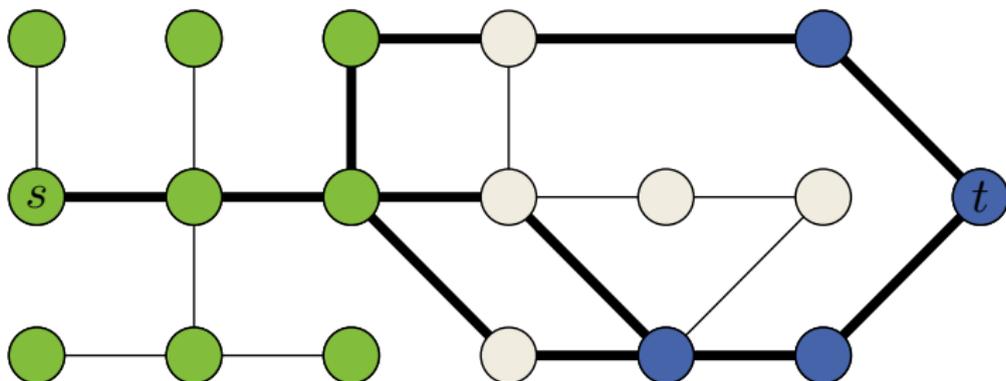
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

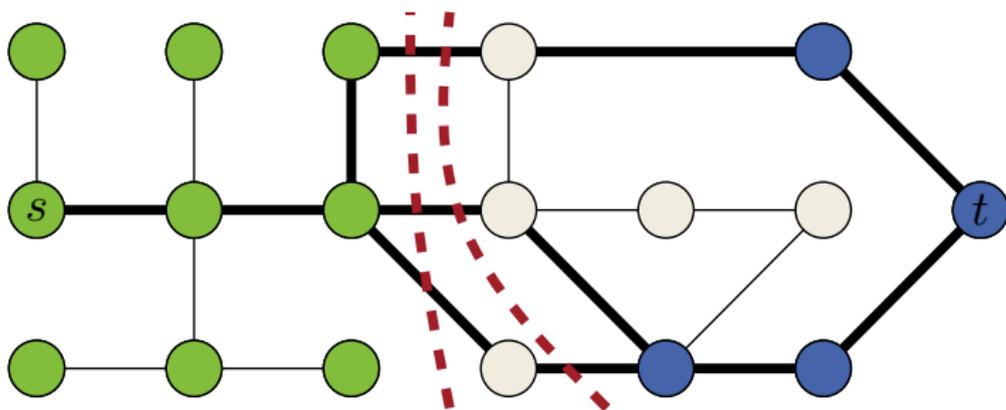
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

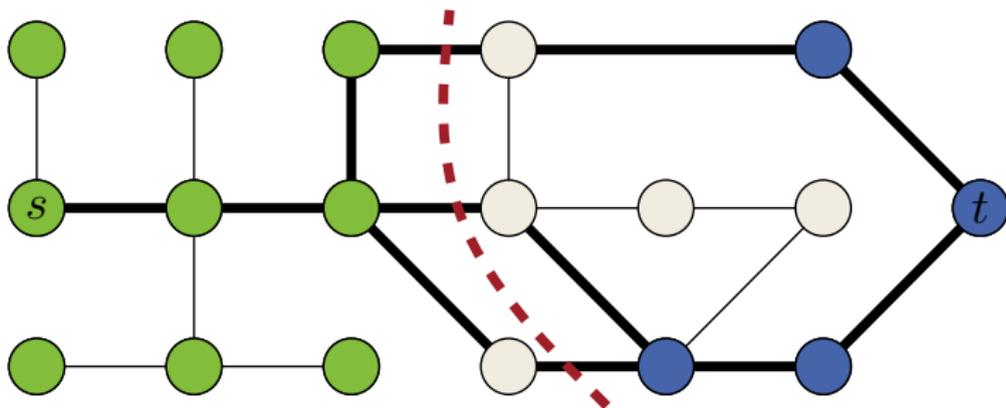
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

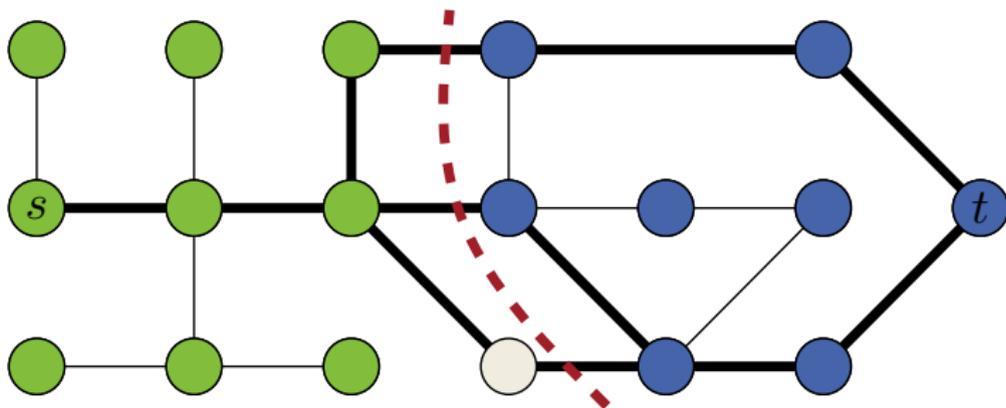
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



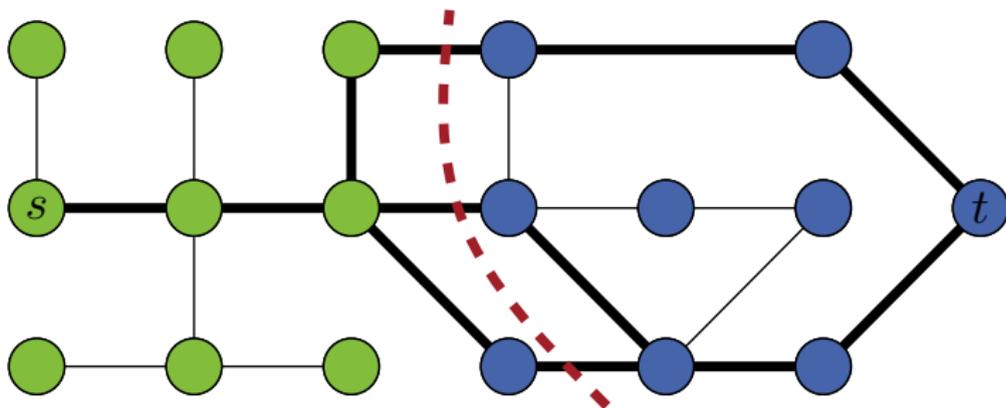
1. Erhöhe Fluss

2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt



1. Erhöhe Fluss

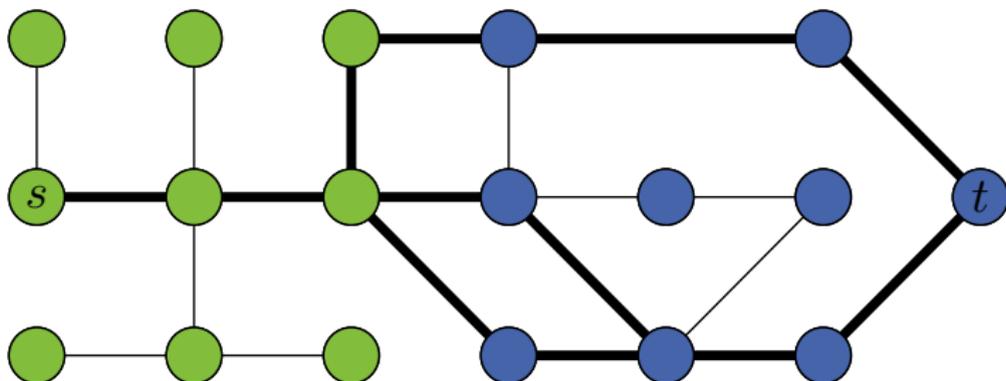
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

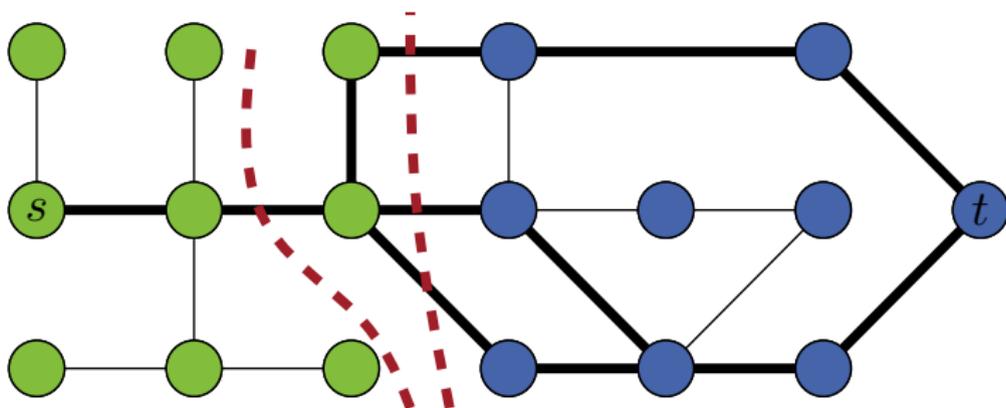
2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

# Beispiel FlowCutter



1. Erhöhe Fluss

2. Finde  $s$ - und  $t$ -Schnitt

3. Wähle kleinere Seite

4. Assimiliere Seite

5. Pierce Schnitt

- Jeder gefundene Schnitt ist eine gültige Partitionierung
- Schnitt wird nie kleiner
- Balanciertheit wird (für gleiche Schnittgröße) nie schlechter

- Jeder gefundene Schnitt ist eine gültige Partitionierung
  - Schnitt wird nie kleiner
  - Balanciertheit wird (für gleiche Schnittgröße) nie schlechter
- Schritte liefern (Pareto) Verbesserungen
- Überschreibe letztes Ergebnis, wenn Schnitt gleich groß ist

- Jeder gefundene Schnitt ist eine gültige Partitionierung
  - Schnitt wird nie kleiner
  - Balanciertheit wird (für gleiche Schnittgröße) nie schlechter
- Schritte liefern (Pareto) Verbesserungen
- Überschreibe letztes Ergebnis, wenn Schnitt gleich groß ist

Findet Pareto Optimale Menge an Schnitten (heuristisch)

## Auswahl des Piercing Knotens:

- Optimale Wahl vermutlich NP-hart
- Heuristisch

## Orakel zur Piercing Knoten Wahl:

- **Wichtigste Regel:**  
Wenn möglich, wähle Knoten, der Schnitt nicht vergrößert
- **Nachgelagerte Regel:**
  - Für Start-Seite: Maximiere  $\text{dist}(x, t) - \text{dist}(s, x)$
  - Für Ziel-Seite: Minimiere  $\text{dist}(x, t) - \text{dist}(s, x)$

## Konstanten:

- $c$ : Größe des letzten berechneten Schnitts
- $m$ : Anzahl an Kanten

## Laufzeit Optimierung:

- Fluss wird  $c$  Mal augmentiert
  - mit der richtigen Implementierung:  $O(m)$  pro Augmentierung
- $O(cm)$  Laufzeit

## Knoten Separatoren

- Wähle inzidente Knoten zu Schnittkanten (größere Seite)

## Knoten Separatoren

- Wähle inzidente Knoten zu Schnittkanten (größere Seite)

## Schnitt (ohne spezifische $s, t$ )

- Wähle  $s$  und  $t$  zufällig (gleichverteilt)
- Lasse FlowCutter mehrfach laufen
- Findet (probabilistisch) Schnitte mit guter Balanciertheit

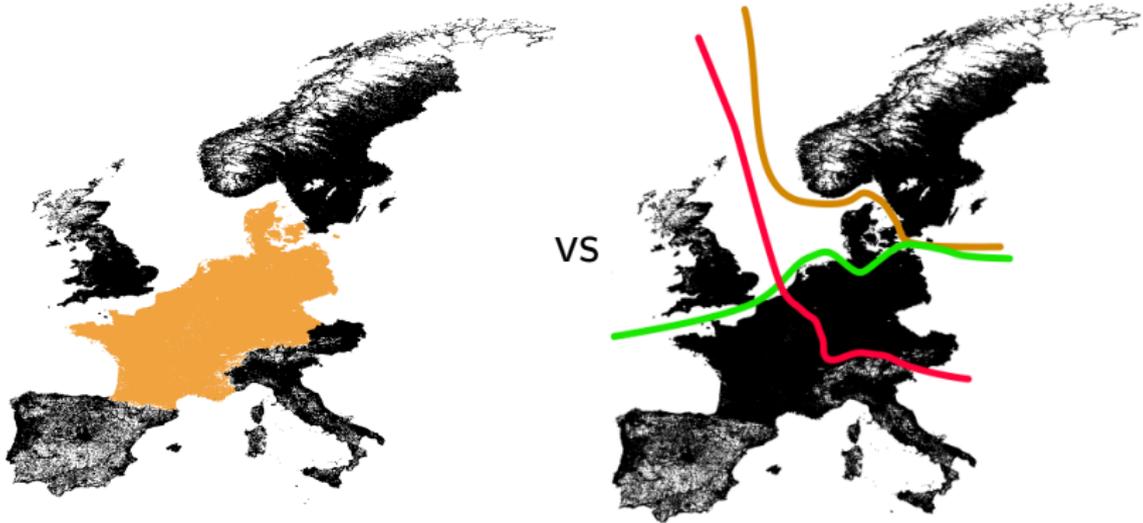
	Search Space		#Arcs		Running times		
	# Nodes		in CCH [ $\cdot 10^6$ ]	#Tri. [ $\cdot 10^6$ ]	Order [min]	Cust. [ms]	Query [ $\mu$ s]
	Avg.	Max.					
M	1 223	1 983	69.9	1 390	<b>2</b>	2 242	1 162
K	639	1 224	73.9	578	$\leq 3 552$	975	304
I	733	1 569	67.4	590	17	932	385
F3	734	1 159	60.3	519	42	853	366
F20	<b>616</b>	<b>1 102</b>	<b>58.8</b>	<b>460</b>	281	<b>780</b>	<b>271</b>

Europe Graph

M = Metis, K = KaHip, I = InertialFlow

F<sub>x</sub> = FlowCutter with *x* *st*-pairs

# Top Level Schnitt Europa



max $\epsilon$ [%]	Achieved $\epsilon$ [%]			
	F20	K	M	I
0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.132	0.998	0.000	0.089
3	0.132	0.457	0.000	0.008
5	4.894	0.464	0.000	0.857
10	9.330	0.043	0.000	0.375
20	10.542	3.139	0.000	0.132
30	10.542	3.139	0.017	7.384
50	44.386	3.139	33.336	10.542
70	66.655	3.139	41.178	44.386
90	84.199	3.139	83.087	84.257

- Graph von Zentraleuropa (keine Insel Spezialfälle)
- FlowCutter kommt gewünschter Balanciertheit am nächsten

max $\epsilon$	Cut Size			
	F20	K	M	I
[%]				
0	<b>240</b>	716	369	1 180
1	<b>220</b>	245	360	391
3	<b>220</b>	227	372	319
5	<b>213</b>	227	369	276
10	<b>180</b>	228	375	241
20	<b>162</b>	250	375	220
30	<b>162</b>	250	369	203
50	<b>155</b>	250	9 881	<b>162</b>
70	<b>86</b>	250	14 375	<b>155</b>
90	<b>13</b>	250	28	17

- Graph von Zentraleuropa (keine Insel Spezialfälle)
- FlowCutter liefert kleinste Schnitte

# Andere Graphen (keine Straße)

- Beliebter Walshaw Datensatz:
  - FlowCutter liefert beste bekannte Lösungen für Imbalance = 5%
  - FlowCutter liefert zusammenhängende Partitionen
- Nur solche Graphen wurden betrachtet
- 24 Graphen

- Beliebter Walshaw Datensatz:
  - FlowCutter liefert beste bekannte Lösungen für Imbalance = 5%
  - FlowCutter liefert zusammenhängende Partitionen
- Nur solche Graphen wurden betrachtet
- 24 Graphen
  
  - Bei 18 Graphen perfekte Übereinstimmung mit Referenzlösung
  - Bei 3 Graphen Fehler kleiner als 5 Kanten
  - Laufzeit:
    - Schnell für kleine  $c$
    - Wenn  $c$  in Größenordnung von  $m$  liegt wird Performance schlechter

-  Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Ilya Razenshteyn, and Renato F. Werneck.  
Graph Partitioning with Natural Cuts.  
In *25th International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'11)*, pages 1135–1146. IEEE Computer Society, 2011.
-  Michael Hamann and Ben Strasser.  
Graph Bisection with Pareto-Optimization.  
In *Proceedings of the 18th Meeting on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'16)*. SIAM, 2016.
-  George Karypis and Gautam Kumar.  
A Fast and Highly Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs.  
*SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1):359–392, 1999.

 Peter Sanders and Christian Schulz.  
Distributed Evolutionary Graph Partitioning.  
In *Proceedings of the 14th Meeting on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'12)*, pages 16–29. SIAM, 2012.

 Aaron Schild and Christian Sommer.  
On Balanced Separators in Road Networks.  
In *Proceedings of the 14th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'15)*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2015.