Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für planare Graphen
SS 06
D. Wagner, S. Mecke, M. Holzer

Viertes Übungsblatt

Ausgabe: 6. Juni 2006
Abgabe: 13. Juni, in der Vorlesung oder in Raum 307

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1:

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

(a) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten

(b) eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

Definition: Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist (d.h. falls jeder Knoten „gematcht“ wird).

Problem 2:

Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching ?

(a) P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)

(b) C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten)

(c) Q_n

(d) K_n

(e) $K_{n,m}$

Problem 3:

Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph (jede Kante hat einen Knoten in V_1 und einen in V_2). Weiter sei v ein Knoten und M' ein kardinalitätsmaximales Matching für $G - v$, wobei v nicht ,,gematcht" ist (d.h. v ist zu keiner Kante aus M' inzident). Gesucht ist nun ein kardinalitätsmaximales Matching für G. Dazu soll Lemma 5.2 der Vorlesung benutzt werden: Falls es keinen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt, ist M' bereits das gesuchte Matching. Ansonsten müssen wir einen erhöhenden Weg P bzgl M' mit Endknoten v bestimmen, dann ist $(M' \cup P) \setminus (M' \cap P)$ das gewünschte Matching.

Geben Sie einen Algorithmus an, der feststellt, ob es einen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt und diesen gegebenenfalls bestimmt. Die Laufzeit soll linear in der Anzahl der Kanten von G sein.
(Hinweis: Modifizieren Sie eine Breitensuche mit Startknoten v)

Problem 4:

Um die Position im dreidimensionalen Raum von n Objekten $O_1, \dots O_n$ zu bestimmen, werden zwei Sensoren S_1 und S_2 verwendet, die jeweils die Objekte anpeilen können und somit für jedes Objekt eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ bestimmen, auf der der Sensor S und das Objekt O_k liegen. Angenommen, keine dieser Geraden fallen zusammen, so schneiden sich jeweils die Geraden S_1O_k und S_2O_k.

Das Problem ist nun einerseits, dass S_1 die Geraden $L_{1,i}$ und S_2 die Geraden $L_{2,j}$ liefert, aber wir wissen zu keiner dieser Geraden, welches Objekt angepeilt wurde. Andererseits messen die Sensoren nicht exakt, sondern es treten Messfehler auf, so dass sich zugehörige Geraden nicht unbedingt schneiden. Jedoch gilt für die Geraden $L_{1,i}$ und $L_{2,j}$, für die dasselbe Objekt angepeilt wurde, dass der Abstand $d(L_{1,i}, L_{2,j})$ dieser Geraden sehr klein ist.

Bestimmen Sie eine Zuordnung der Geraden, also n Paare (i_k, j_k) $(k = 1, \dots, n)$, so dass die Summe der Abstände

$$\sum_{k=1}^{n} d(L_{1,i_k}, L_{2,j_k})$$

minimiert wird. Formulieren sie dazu das Problem als Matching Problem.