Algorithmen zur Visualisierung von Graphen
Sommersemester 2009
Dozent: Martin Nöllenburg

UNIVERSITÄT KARLSRUHE
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

4. Übungsblatt

Ausgabe: 8. Juni 2009

Besprechung: 16. Juni 2009, Raum 131, 9:45 Uhr

Aufgabe 1

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz aus dem Satz zur Charakterisierung aufwärtsplanarer Graphen:

Ein gerichteter azyklischer Graph $D = (V, A)$ ist genau dann aufwärtsplanar wenn D aufspannender Teilgraph eines planaren s-t-Graphen $H = (V, A')$ mit $A \subseteq A'$ ist.

Zur Erinnerung: Ein s-t-Graph ist ein Graph, der eine eindeutige Quelle s, eine eindeutige Senke t und die Kante (s, t) enthält.

Aufgabe 2

Sei $D = (V, A)$ ein planarer s-t-Graph. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) D ist bimodal.

(b) Auf dem Rand jeder Facette f in einer planaren Zeichnung von D liegt genau eine Quelle $q(f)$ und genau eine Senke $z(f)$.

(c) Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es einen einfachen, gerichteten s-t-Pfad, der v enthält.

Aufgabe 3

Sei D ein planar eingebetteter s-t-Graph. Für eine gerichtete Kante $e = (u, v)$ bezeichne $l(e)$ die Facette links von e und $r(e)$ die Facette rechts von e. OBdA ist D so eingebettet, dass $r(s, t)$ die äußere Facette ist. Der gerichtete Dualgraph $D^\star = (V^\star, A^\star)$ von D ist wie folgt definiert:

- $V^\star$ ist die Menge der Facetten von D, wobei $s^\star = r(s, t)$ und $t^\star = l(s, t)$.
- $A^\star = \{(l(e), r(e)) \mid e \in A \setminus \{(s, t)\}\} \cup \{(s^\star, t^\star)\}$

(a) Zeigen Sie, dass $D^\star$ ein planarer s-t-Graph ist.

bitte umblättern

(b) Zeigen Sie, dass für zwei Facetten f und g von D genau eine der folgenden Eigenschaften zutrifft:

i) D hat einen gerichteten Pfad von $z(f)$ nach $q(g)$

ii) D hat einen gerichteten Pfad von $z(g)$ nach $q(f)$

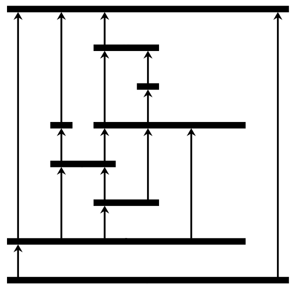
iii) $D^\star$ hat einen gerichteten Pfad von f nach g

iv) $D^\star$ hat einen gerichteten Pfad von g nach f

Hinweis: Betrachten Sie eine topologische Nummerierung $\sigma : V \to \mathbb{N}$ der Knoten von D, so dass für jede Kante $(u, v) \in A$ gilt $\sigma(u) < \sigma(v)$.

Aufgabe 4

Eine Sichtbarkeitsrepräsentation ist eine Zeichnung eines Graphen, in der jeder Knoten v als horizontale Strecke $\tau(v)$ gezeichnet ist und jede Kante (u, v) als vertikale Strecke $\tau(u, v)$, so dass gilt



- alle Knotenstrecken sind paarweise disjunkt
- allen Kantenstrecken sind paarweise disjunkt
- die Endpunkte der Strecke $\tau(u, v)$ liegen auf $\tau(u)$ und $\tau(v)$ und $\tau(u, v)$ schneidet keine weiteren Knotenstrecken ($\tau(u)$ "sieht" $\tau(v)$).

Zeigen Sie, dass folgendes Verfahren eine Sichtbarkeitsrepräsentation eines planaren s-t-Graph berechnet, wobei $l(v)$ die Facette links der am weitesten links liegenden ausgehenden Kante sei und $r(v)$ die Facette rechts der am weitesten rechts liegenden ausgehenden Kante.

(1) Berechne eine topologische Nummerierung Y der Knoten von D

(2) Berechne eine topologische Nummerierung X der Knoten von $D^\star$

(3) Zeichne $\tau(v)$ als horizontale Strecke $\overline{pq}$ mit $p = (X(l(v)), Y(v))$ und $q = (X(r(v)) - 1, Y(v))$

(4) Zeichne $\tau(u, v)$ als vertikale Strecke $\overline{p'q'}$ mit $p' = (X(l(u, v)), Y(u))$ und $q' = (X(l(u, v)), Y(v))$