Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Routenplanung
Sommersemester 2009
Daniel Delling, Thomas Pajor

Zweites Theorie-Übungsblatt

Ausgabe: 25. Mai 2009
Abgabe: 5. Juni, in der Vorlesung oder in Raum 322 (Informatik-Hauptgebäude, 3. Stock)

Aufgabe 1: Arc-Flags, Aufwärmübung *

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E, \text{len})$ mit einer Partition $\mathcal{P} := \{C_1, \ldots, C_k\}$ auf V. Das Arc-Flag einer Kante $e \in E$ bezüglich einer Zelle $C \in \mathcal{P}$ sei mit $\text{AF}_C(e)$ bezeichnet.

(a) Es sei $|\mathcal{P}| = 1$. Weiterhin werde die All-Pair-Shortest-Path-Variante für die Vorberechnung benutzt. Unterscheidet sich (wenn ja, worin) der Suchram, das heißt die Anzahl relaxierter Kanten bzw. abgearbeiter Knoten, des Arc-Flags-Algorithmus von Dijkstra's Algorithmus? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Es sei nun $|\mathcal{P}| = n$, das heißt jede Zelle enthält genau *einen* Knoten des Graphen. Zeigen Sie: Eine s-t-Anfrage besucht nur Knoten entlang des kürzesten s-t-Weges. Muss dazu der kürzeste Weg eindeutig sein?

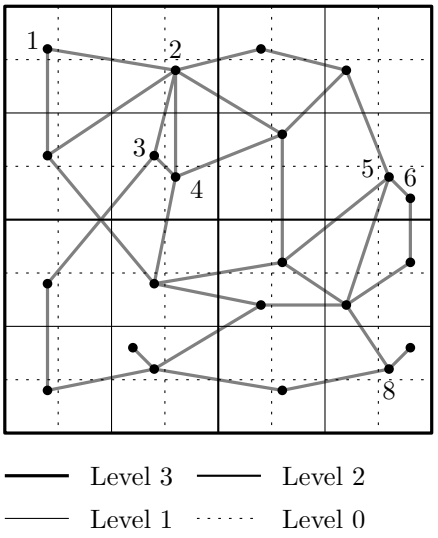
Aufgabe 2: Multi-Level Partitionierung **

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E, \text{len})$. Eine *multi-level Partition* $\mathcal{P}$ mit k Levels sei rekursiv wie folgt definiert:

- $\mathcal{P}_k := \{V\}$
- $\mathcal{P}_i = \bigcup_{C \in \mathcal{P}_{i+1}} P_C$ wobei P_C eine Partition der Zelle C ist. Jede Zelle C der Partition $\mathcal{P}_{i+1}$ wird also "verfeinert".

Bemerkung: Arc-Flags $\text{AF}_C^{(i)}(e)$ auf Level i beziehen sich auf Zellen $C \in \mathcal{P}_{i-1}$.

Weiterhin sei der *gemeinsame Level* zweier Knoten u und v das kleinste Level i für das eine Zelle $C \in \mathcal{P}_i$ existiert die sowohl u als auch v enthält.



(a) Betrachten Sie den Graphen aus obiger Abbildung. Geben Sie das gemeinsame Level der Knotenpaare $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(5, 6)$ und $(3, 8)$ an.

(b) Geben Sie ein effizientes (algorithmisches) Verfahren zur Bestimmung des gemeinsamen Levels zweier Knoten u und v an.

Hinweis: Benutzen Sie eine geschickte Nummerierung der Zellen auf dem untersten Level, die Sie an die Knoten speichern.

Aufgabe 3: Multi-Level Arc-Flags **

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E, \text{len})$ und eine multi-level Partition $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_k\}$.

(a) Sei $P := [s, v_1, v_2, \ldots, v_k, t]$ ein kürzester s-t-Weg in G. Zeigen Sie: Der gemeinsame Level der Knoten v_i und t nimmt mit zunehmendem i nicht notwendigerweise monoton ab.

(b) Welche Konsequenz ergibt sich daraus für die Vorberechnung von Arc-Flags basierend auf Randknoten?

(c) Geben Sie den Algorithmus zur Vorberechnung basierend auf Randknoten in Pseudo-Code an. Sie können dabei DIJKSTRA's Algorithmus als Baustein verwenden.

(d) Erweitern Sie DIJKSTRA's Algorithmus zu einer multi-level Arc-Flags-Query. Beschreiben Sie die notwendigen Änderungen in Pseudo-Code.

(e) Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus aus Aufgabe (d) wenn Sie die Vorberechnung aus Aufgabe (c) benutzen.

Aufgabe 4: Self-Bounding Bidirectional Reach-Algorithmus **

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E, \text{len})$. Der *reach* eines Knotens u bezüglich eines kürzesten Weges $P := [s, \ldots, u, \ldots, t]$ ist definiert als $r_P(u) := \min(\text{dist}(s, u), \text{dist}(u, t))$. Der reach in G von u ist das Maximum aller reach-Werte von u bezüglich aller kürzesten Wege durch u, also

$$r(u) := \max\{r_P(u) \mid P \text{ ist ein kürzester Weg der } u \text{ enthält}\}.$$

Studieren Sie den Self-Bounding Bidirectional Reach-Algorithmus aus der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie, dass der kürzeste Weg unter Benutzung des Abbruchkriteriums des normalen bidirektionalen DIJKSTRA-Algorithmus nicht notwendigerweise im Suchraum enthalten ist.

(b) Zeigen Sie die Korrektheit des Abbruchkriteriums aus der Vorlesung.