Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

VL 10 – Eine kurze Geschichte vom Färben

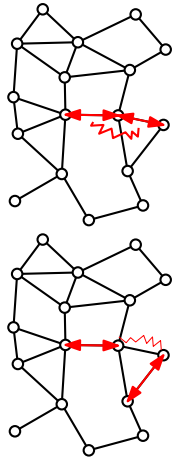
Dr. rer. nat. Bastian Katz

Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie

1. Juli 2009
(Version 3 vom 13. Juli 2009)

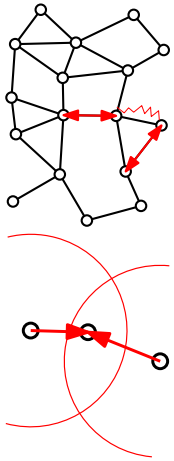
Motivation

- Kommunikation im drahtlosen Kanal ist nicht beliebig gleichzeitig möglich
  - kein Knoten kann gleichzeitig an zwei Übertragungen teilnehmen
  - benachbarte Knoten können nicht gleichzeitig übertragen/empfangen
- ⇒ Einfach drauflossenden ist keine Lösung!



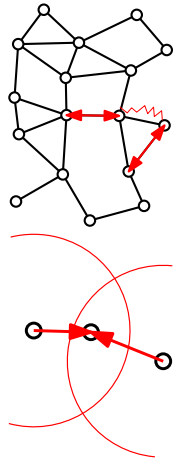
Ad-hoc-Lösung: CSMA/CD

- Ad-hoc-Lösung: CSMA/CD (wie Ethernet)
  - *Carrier Sense Multiple Access/Collision Detection*
  - Carrier Sense: Mithören, ob der Kanal frei ist
  - Collision Detection: Bei Kollision später wiederholen
  - Achtung: Anders als im Ethernet kann der Sender Kollisionen nicht immer erkennen!
  - Was, wenn der Empfänger von jemandem gestört wird, den der Sender nicht sieht? (Hidden Terminal Problem)



Ad-hoc-Lösung: CSMA/CA

- Ad-hoc-Lösung: CSMA/CA (ähnlich Ethernet)
  - *Carrier Sense Multiple Access/Collision Avoidance*
  - Carrier Sense: Mithören, ob der Kanal frei ist
  - Collision Avoidance: Kollisionen verhindern
  - Achtung: Anders als im Ethernet kann der Sender Kollisionen nicht immer erkennen!
  - Was, wenn der Empfänger von jemandem gestört wird, den der Sender nicht sieht? (Hidden Terminal Problem)
- CSMA/CA-Protokolle (gaaaaanz grob)
  - Sender wartet, bis er freien Kanal sieht
  - Sender schickt „Request To Send“
  - Empfänger bestätigt „Clear To Send“
    - (das hören hoffentlich auch alle Betroffenen!)
  - Sender schickt Daten
  - Empfänger bestätigt



Die koordinierte Lösung: TDMA

- Übertragungen bekommen Slots in Zeitraster zugewiesen
  - *Time Division Multiple Access*
  - entweder kurzfristig bei Bedarf oder sogar langfristig/periodisch
- Übertragungen sind auch *gleichzeitig* möglich, wenn mehrere Frequenzen/orthogonale Kodierungen zur Verfügung stehen
  - CDMA: Code Division ..
  - FDMA: Frequency Division ..

Übertragungen können sogar gleichzeitig dieselbe Ressource belegen, wenn sie weit genug auseinander liegen!

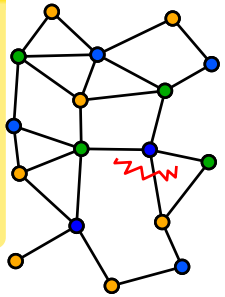
Knotenfärbung

Definition

Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \to \mathbb{N}$ so, dass für jede Kante die beiden Endpunkte unterschiedliche Farben haben, also

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

- Eine Färbung c hat die Größe $|c| = \max_{v \in V} c(v)$



- Jeder darf nur senden, wenn „seine Farbe“ dran ist
- Eigentlich bringt das gar nichts

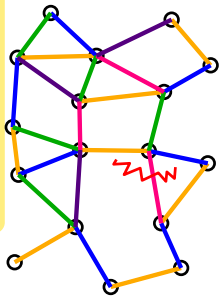
Kantenfärbung

Definition

Eine Kantenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : E \to \mathbb{N}$ so, dass für jeden Knoten alle inzidenten Kanten unterschiedliche Farben haben, also

$$\{u, v\}, \{u, w\} \in E \Rightarrow c(\{u, v\}) \neq c(\{u, w\})$$

- Eine Färbung c hat die Größe $|c| = \max_{e \in E} c(e)$

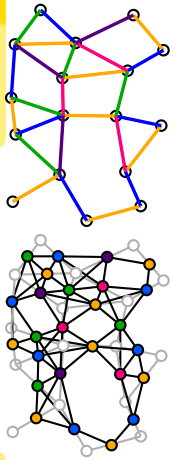


- Jeder darf nur über Kante kommunizieren, „deren Farbe“ dran ist
- schließt zumindest direkte Kollisionen aus

Knoten-, Kanten-, Abstand-d-Färbungen

Beobachtung

Eine Kantenfärbung ist eine Knotenfärbung im Graphen $G' = (E, E')$ mit
$E' := \{\{e_1, e_2\} : e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\}$



- Wir können Kantenfärbungen auf Knotenfärbungen zurückführen!
- das lät sich erweitern auf andere Färbungen
  - Abstand-d-Färbungen: Knoten mit Abstand $\leq d$ müssen unterschiedlich gefärbt werden
  - jede Bedingung, in der Ausschlüsse innerhalb von konstanter Entfernung liegen!

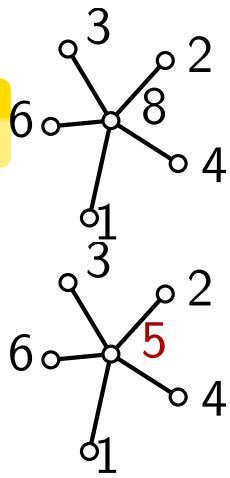
Deshalb kümmern wir uns nur um Knotenfärbungen!

Warm-up: Zentrale $\Delta + 1$-Färbung

Satz

Jeder Graph lässt sich mit $\Delta + 1$ Farben färben.

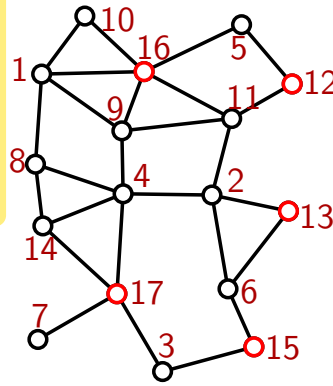
- Beweis: wenn es einen Knoten u gibt, der eine höhere Farbe hat als $\deg(u) + 1$, dann ist eine der „Farben“ $1, \ldots, \deg(u) + 1$ in der Nachbarschaft nicht verwendet worden
- besser wollen wir gar nicht sein, aber wie bekommen wir das *verteilt* hin?



Warm-up: Verteilte $\Delta + 1$-Färbung

Einfache Lösung

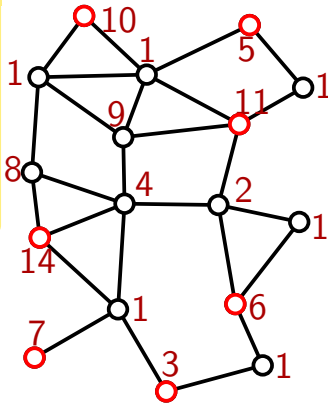
1. jeder färbt sich mit seiner ID
2. jeder Knoten u mit Farbe $c(u) \geq \deg(u) + 1$, der die höchste Farbe in seiner Nachbarschaft hat, wählt die kleinste Farbe aus $1, \ldots, \deg(u)$ aus, die keiner der Nachbarn hat



Warm-up: Verteilte $\Delta + 1$-Färbung

Einfache Lösung

1. jeder färbt sich mit seiner ID
2. jeder Knoten u mit Farbe $c(u) \geq \deg(u) + 1$, der die höchste Farbe in seiner Nachbarschaft hat, wählt die kleinste Farbe aus $1, \ldots, \deg(u)$ aus, die keiner der Nachbarn hat

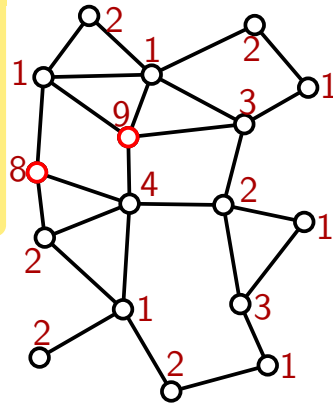


Warm-up: Verteilte $\Delta + 1$-Färbung

Einfache Lösung

1. jeder färbt sich mit seiner ID
2. jeder Knoten u mit Farbe $c(u) \geq \deg(u) + 1$, der die höchste Farbe in seiner Nachbarschaft hat, wählt die kleinste Farbe aus $1, \ldots, \deg(u)$ aus, die keiner der Nachbarn hat

- Das ist eine $\Delta + 1$-Färbung! ✓
  - üblicherweise sogar was besseres
- das dauert (mal wieder) linear viele Schritte!
  - man nehme einen Pfad mit geordneten IDs...



Erinnerung: MAC-Layer

- Übertragungen können nicht beliebig parallel stattfinden
  - Interferenzen naher Übertragungen verhindert erfolgreiches Dekodieren
- Lösung 1: CSMA/CA
  - Spontane Benutzung des Mediums, aber vorsichtig
  - Warten auf freien Kanal, Anfragen beim Empfänger
  - Übliche Lösung, kostet aber Energie (Kollisionen, Mithören)
- Lösung 2: TDMA/CDMA/FDMA
  - feste Zuweisung von Zeiten/Codierung/Frequenzen an Sender/Übertragungen
  - gleiche Ressource immer nur so genutzt, dass es keine Konflikte geben sollte
  - (Noch) wenig populär in WSN

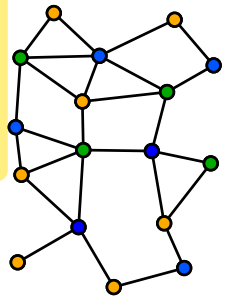
Erinnerung: Färbungen

Definition

Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \to \mathbb{N}$ so, dass für jede Kante die beiden Endpunkte unterschiedliche Farben haben, also

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

- Eine Färbung c hat die Größe $|c| = \max_{v \in V} c(v)$



- darauf lassen sich allgemeinere Färbungsprobleme reduzieren
- es gibt immer eine $\Delta + 1$-Färbung
  - in jeder schlechteren Färbung kann man die Farbe eines Knotens herabsetzen
  - das ging auch verteilt, aber bisher nur langsam

Satz

Satz

Es gibt einen verteilten Algorithmus, der eine $\Delta + 1$-Färbung in $O(\Delta^2 + \log_2^*(n))$ Schritten berechnet.

- $\log^*(n)$: Anzahl der Anwendungen von log, bevor das Argument unter 1 fällt. (Bsp: $\log_2^*(10^{50}) = 5$)
- einfacher zu merken:

$$\log_2^*(x) = 5 \Leftrightarrow 2^{2^{2^2}} < x \leq 2^{2^{2^{2^2}}}$$

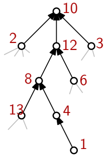
Beweisstruktur

Beweisstruktur

- es gibt einen Algorithmus, der in einem Baum in $\log^*(n)$ Schritten eine 6-Färbung berechnet
- es gibt einen Algorithmus, der in einem Baum in k Runden eine Färbung mit $3 + k$ Farben auf 3 Farben reduziert
- beide Verfahren funktionieren auch auf „Pseudo-Bäumen“
- jeder Graph läßt sich in Δ Schritten in Δ Pseudo-Bäume zerlegen
- Δ Färbungen mit je 3 Farben lassen sich in Δ^2 Runden auf $\Delta + 1$ Farben reduzieren

6-Färbung eines Baumes

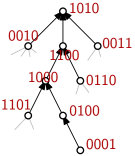
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)

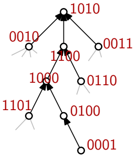


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
14/ 24

6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)

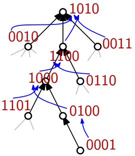


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
14/ 24

6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)

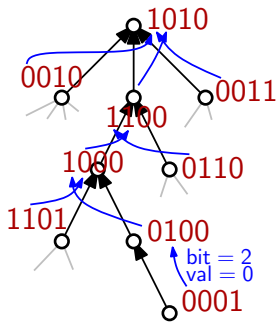


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
14/ 24

6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

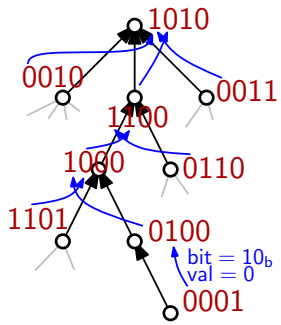
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - ≫ (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - ≫ suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - ≫ kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - ≫ verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - ≫ die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - ≫ setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - ≫ (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - ≫ suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - ≫ kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - ≫ verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - ≫ die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - ≫ setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)

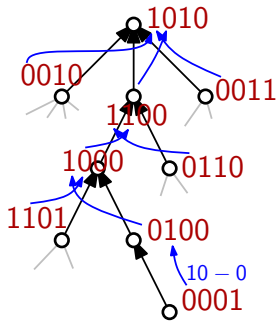


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
14/ 24

6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - ≫ (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - ≫ suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - ≫ kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - ≫ verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - ≫ die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - ≫ setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)

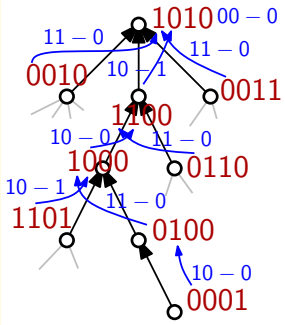


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
14/ 24

6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - ≫ (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - ≫ suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - ≫ kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - ≫ verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - ≫ die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - ≫ setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)

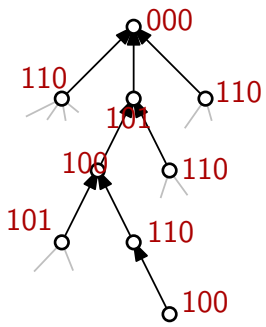


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
14/ 24

6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - ≫ (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannte sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - ≫ suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - ≫ kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - ≫ verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - ≫ die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - ≫ setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



Korrektheit Baum-6-Färbung

Satz

Der beschriebene Algorithmus berechnet eine 6-Färbung.

- ≫ Nach jeder Runde liegt eine Färbung des Baumes vor
  - ≫ Annahme: zwei Knoten haben nach einer Runde dasselbe Label
  - ≫ dann haben sie beide dasselbe Bit ausgewählt und hatten dort vorher denselben Wert stehen
  - ≫ aber das Kind sollte Bit wählen, in dem es sich vom Vorgänger unterscheidet! Widerspruch!
- ≫ Die Färbung enthält zum Schluss maximal 6 Farben
  - ≫ L ist immer aktuelle Labellänge
  - ≫ wenn $L \leq 3$, wird noch eine Runde ausgeführt.
  - ≫ dann reichen die drei Beschriebungen $00, 01, 10$ für die Position
  - ≫ dann gibt es nur noch die Labels $000, 001, 010, 011, 100, 101$

Laufzeit Baum-6-Färbung

Satz

Der beschriebene Algorithmus terminiert nach $O(\log^*(n))$ Schritten.

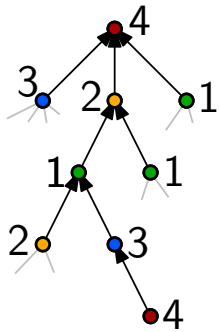
- ≫ Das werden wir nicht beweisen.
- ≫ Grobe Vorstellung:
  - ≫ in jeder Runde wird die Labellänge von L auf $\log_2(L) + 1$ gedrückt
  - ≫ ohne das $+1$ wäre die Aussage klar
  - ≫ ein bißchen Formelschieberei löst das Problem
  - ≫ (wer nicht ohne Leben kann – siehe Buch)

Das war schon Teil 1: Wir können einen Baum in $O(\log^*(n))$ Schritten mit 6 Farben färben!

Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3 + k), \ldots, 4$ tue folgendes:

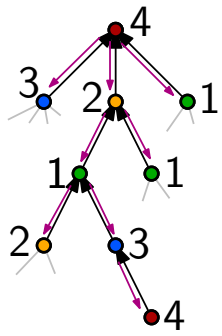


Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3+k), \ldots, 4$ tue folgendes:

1. jeder Knoten nimmt die Farbe seines Vorgängers an („shift down“)
   - ≫ Wurzel nimmt *neue Farbe* aus $\{1, 2, 3\}$

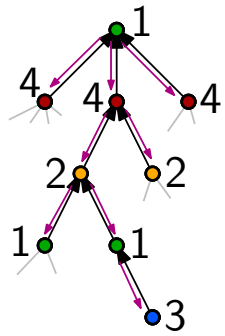


Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3+k), \ldots, 4$ tue folgendes:

1. jeder Knoten nimmt die Farbe seines Vorgängers an („shift down“)
   - ≫ Wurzel nimmt *neue Farbe* aus $\{1, 2, 3\}$



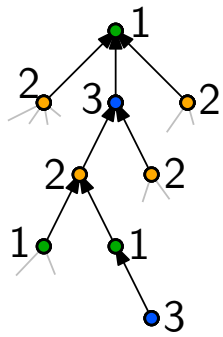
Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
17/ 24

Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3+k), \ldots, 4$ tue folgendes:

1. jeder Knoten nimmt die Farbe seines Vorgängers an („shift down“)
   - ≫ Wurzel nimmt *neue Farbe* aus $\{1, 2, 3\}$
2. jeder Knoten mit Farbe i wählt Farbe aus $\{1, 2, 3\}$, die kein Nachbar hat



- ≫ Korrektheit:
  - ≫ nach einem Shift hat jeder Knoten die Farbe seines Vorgängers, und seine Kinder seine alte Farbe
    - ≫ das ist eine Färbung!
    - ≫ jeder Knoten „sieht“ nur 2 benachbarte Farben
  - ≫ in jeder Runde werden wir Farbe i los!
- ≫ nach k Runden je 2 Schritte haben wir noch 3 Farben!

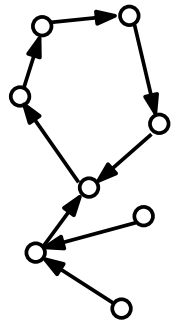
Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
17/ 24

Pseudo-Wälder (klingt schlimmer als es ist)

Definition Pseudo-Wald

Ein gerichteter Graph heißt *Pseudo-Wald*, wenn jeder Knoten höchstens eine ausgehende Kante hat.

- ≫ jeder Knoten zeigt auf maximal einen „Vorgänger“
  - ≫ Vorsicht: Graph kann gerichtete Kreise enthalten



Satz

Die Dreifärbung von Pseudo-Wäldern funktioniert exakt wie bei Bäumen.

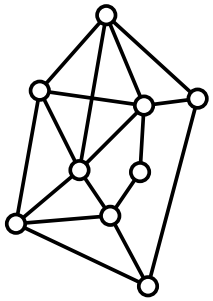
- ≫ Beweise gehen *exakt* wie vorher, nur gibt es ggf. mehrere Knoten ohne Vorgänger

Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie

Pseudo-Wald-Dekomposition

Definition

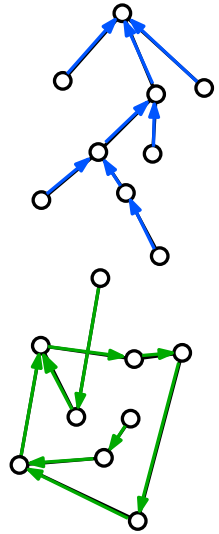
Eine *Pseudo-Wald-Dekomposition* eines Graphen G ist eine Menge von Pseudo-Wäldern $F_1, \ldots, F_\Delta$, so dass jede Kante von G in mindestens einem F_i vorkommt (in beliebiger Richtung).



Pseudo-Wald-Dekomposition

Definition

Eine *Pseudo-Wald-Dekomposition* eines Graphen G ist eine Menge von Pseudo-Wäldern $F_1, \ldots, F_\Delta$, so dass jede Kante von G in mindestens einem F_i vorkommt (in beliebiger Richtung).

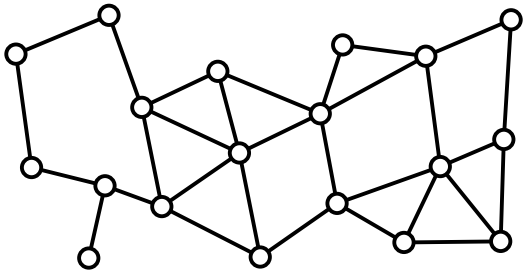


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
19/ 24

Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

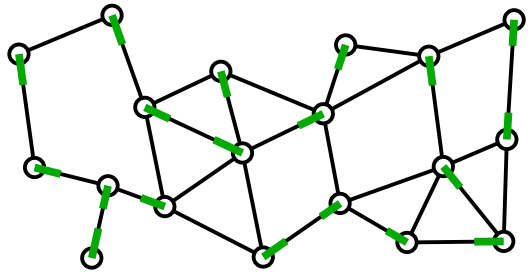
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.

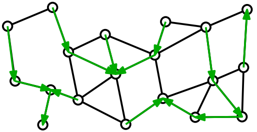


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
20/ 24

Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

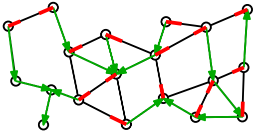
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

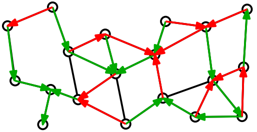
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

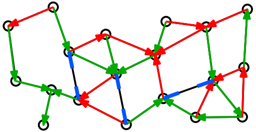
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

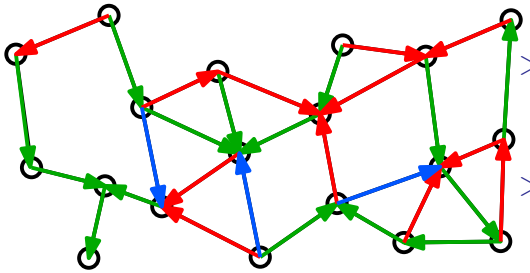
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



- nach Δ Runden (oder früher) sind alle Kanten markiert
- in jeder Runde wird ein Pseudo-Wald gewählt

Wo stehen wir?

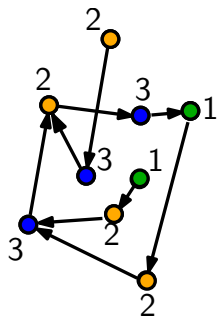
- Wir können den Graphen in Δ Schritten in Δ Pseudo-Wälder dekomponieren
- Wir können Bäume und Pseudo-Wälder verteilt mit 3 Farben einfärben
  - erst färben wir in $\log^*(n)$ Runden mit konstant vielen Schritten 6-farbig,
  - dann reduzieren wir die Farben in 3 Runden mit konstant vielen Schritten auf 3
- $\Rightarrow$ Wir können in $O(\log^*(n))$ Schritten jeden der Pseudo-Wälder 3 dreifärben
  - das kann ja in allen Pseudowäldern parallel geschehen

was fangen wir mit Δ 3-Färbungen für die Pseudo-Wälder an? Wir wollen eine $\Delta + 1$-Färbung des Graphen!

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

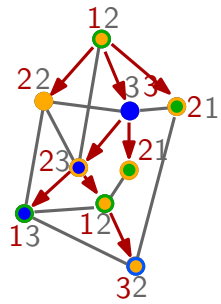
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

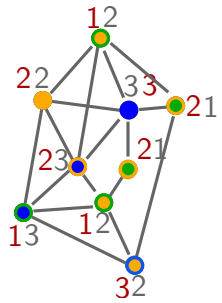
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

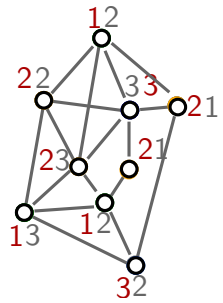
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

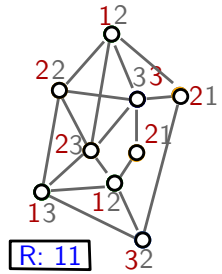


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

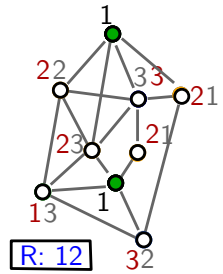


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

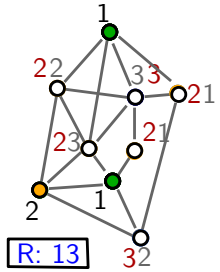


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

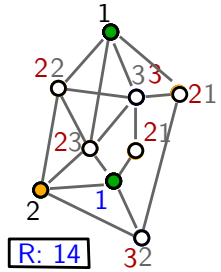
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

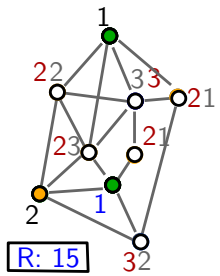


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

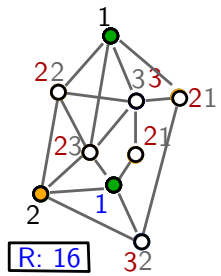


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

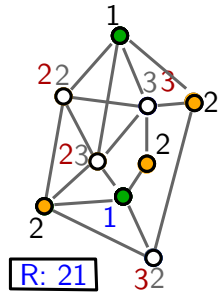


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

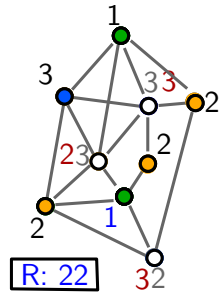
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

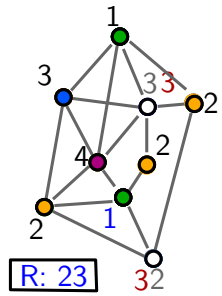


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat

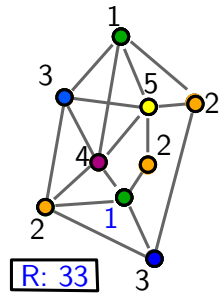


Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



- das sind $\Delta \cdot 3\Delta = 3\Delta^2$ Runden zum Zusammenführen

Bastian Katz – Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze
Lehrstuhl für Algorithmik I
Institut für theoretische Informatik
Universität Karlsruhe (TH)
Karlsruher Institut für Technologie
22/ 24

Wo stehen wir jetzt?

- Wir können den Graphen in Δ Schritten in Δ Pseudo-Wälder dekomponieren
- Wir können Bäume und Pseudo-Wälder verteilt mit 3 Farben einfärben
  - erst färben wir in $\log^*(n)$ Runden mit konstant vielen Schritten 6-farbig,
  - dann reduzieren wir die Farben in 3 Runden mit konstant vielen Schritten auf 3
- $\Rightarrow$ Wir können in $O(\log^*(n))$ Schritten jeden der Pseudo-Wälder 3 dreifärben
  - das kann ja in allen Pseudowäldern parallel geschehen
- wir können aus den 3-Färbungen für die Δ Pseudowälder in $O(\Delta^2)$ Schritten eine $\Delta + 1$-Färbung des eigentlichen Graphen gewonnen!
- wir sind fertig, Laufzeit insgesamt: $O(\Delta^2 + \log^* n)$

Zusammenfassung

- Färbungen sind ein leichtes Mittel, um gegenseitige Ausschlüsse zu modellieren
  - Knoten dürfen nicht gleichzeitig senden oder
  - Kanten dürfen nicht gleichtzeitig aktiv sein
  - das lässt sich immer auf Knotenfärbungen reduzieren
- wir haben einen schnellen, verteilten und überhaupt nicht trivialen Algorithmus für $\Delta + 1$-Färbungen kennengelernt!

Literatur

1. A. Goldberg, S. Plotkin, G. Shannon: *Parallel symmetry-breaking in sparse graphs*. In: Proceedings of the nineteenth annual ACM symposium on Theory of computing, 1987.