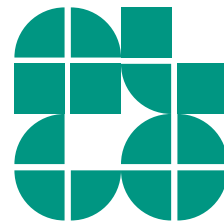


Übung Algorithmische Geometrie

Dualität + Quad-trees

LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Andreas Gemsa
30.06.2011



Übungsblatt 10 - Dualität

Übungsblatt 11 - Quadrees

Aufgabe 1

Problem:

- P konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- \mathcal{T} eine beliebige Triangulierung von P

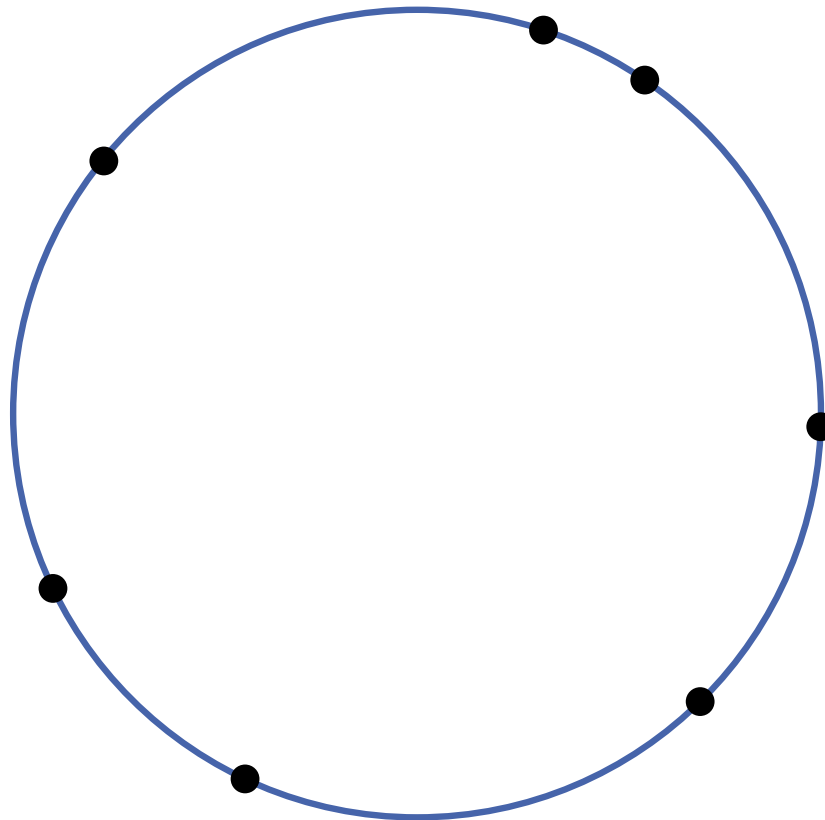
Zeige, kleinster Winkel in \mathcal{T} ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von P

Aufgabe 1

Problem:

- P konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- \mathcal{T} eine beliebige Triangulierung von P

Zeige, kleinster Winkel in \mathcal{T} ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von P

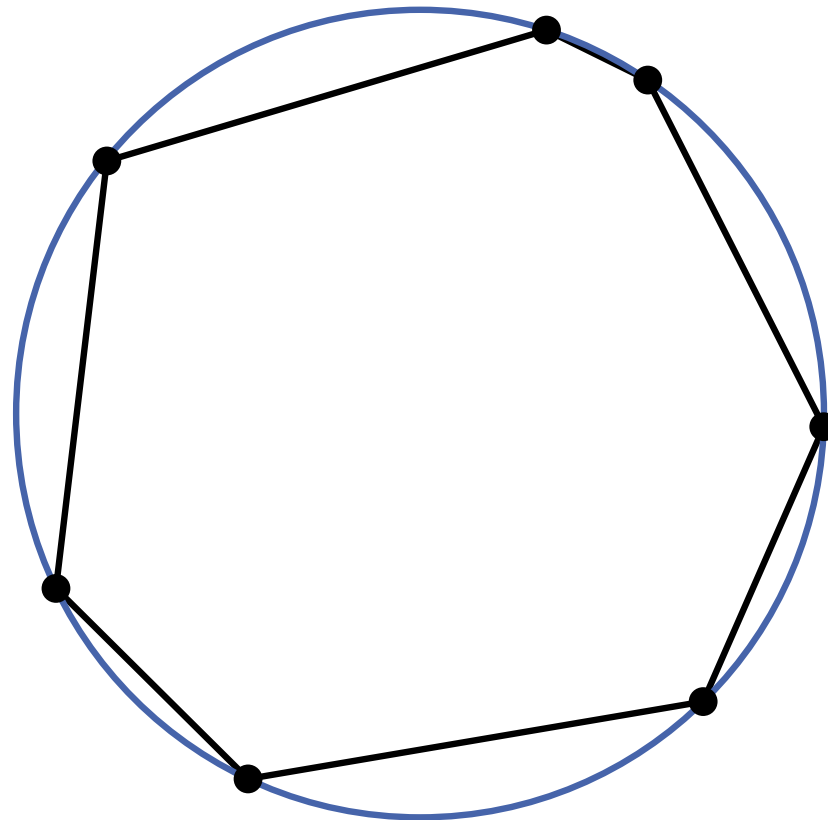


Aufgabe 1

Problem:

- P konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- \mathcal{T} eine beliebige Triangulierung von P

Zeige, kleinster Winkel in \mathcal{T} ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von P

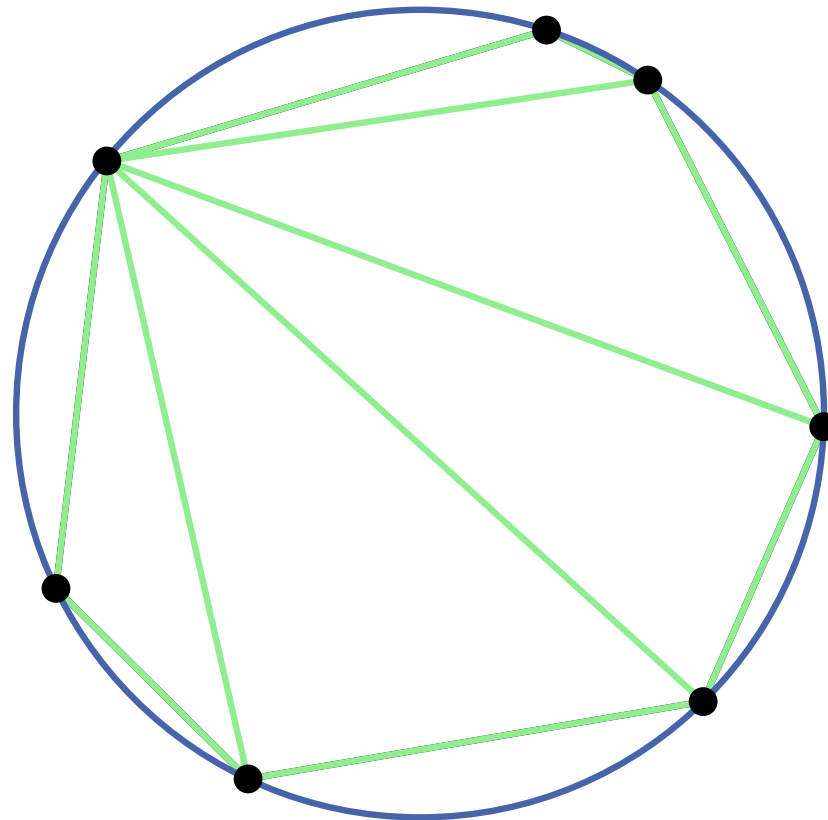


Aufgabe 1

Problem:

- P konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- \mathcal{T} eine beliebige Triangulierung von P

Zeige, kleinster Winkel in \mathcal{T} ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von P

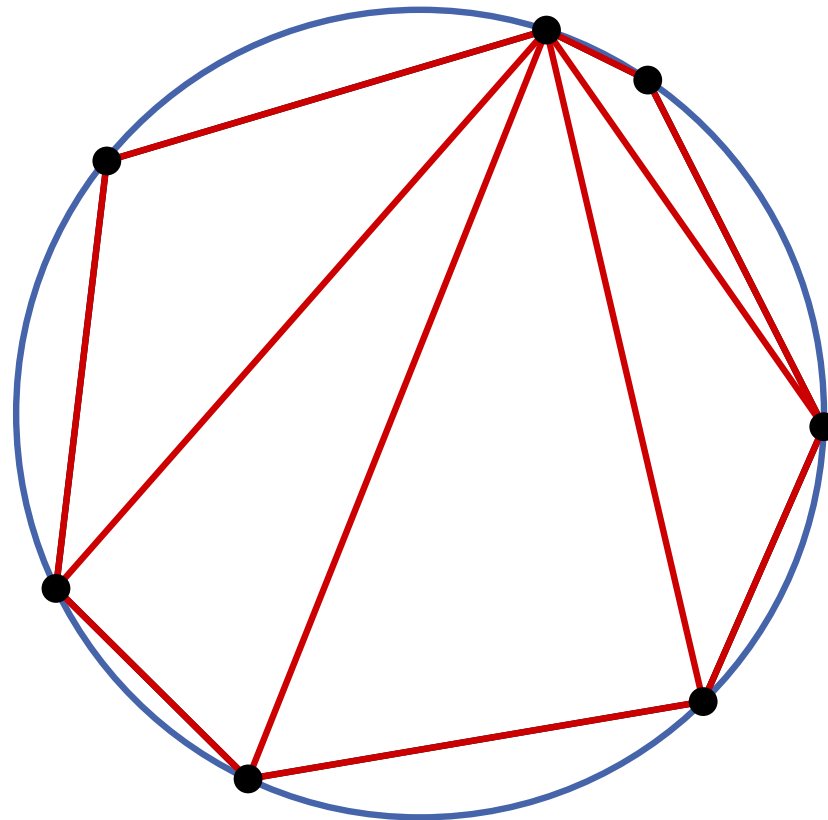


Aufgabe 1

Problem:

- P konvexes Polygon dessen Knoten auf einem Kreis liegen.
- \mathcal{T} eine beliebige Triangulierung von P

Zeige, kleinster Winkel in \mathcal{T} ist kleinster Winkel in beliebiger anderer Triangulierung von P

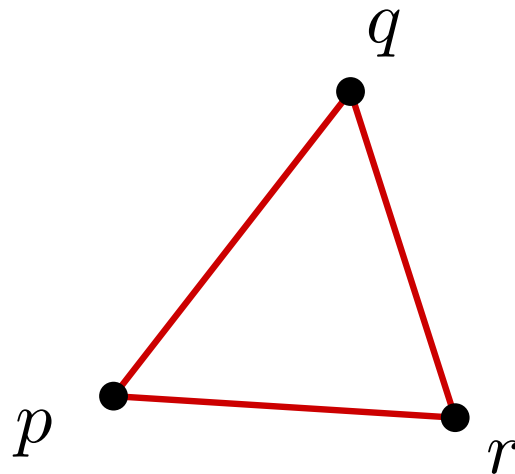


Aufgabe 2

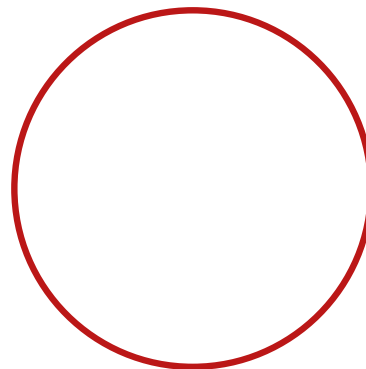
Problem:

Was ist dual zu:

■ Dreieck



■ Kreis



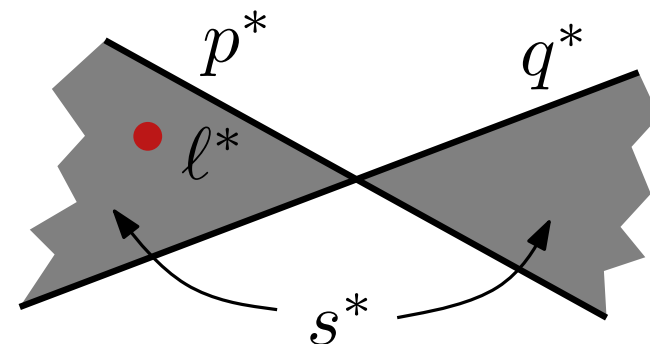
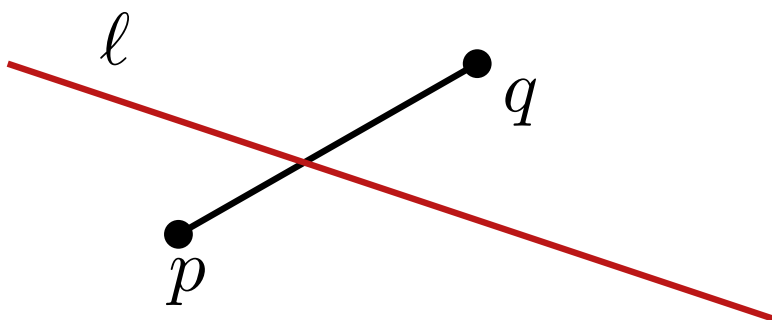
Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(l^*)^* = l$
- p liegt unter/auf/über $l \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter l^*
- l_1 und l_2 schneiden sich in p
 $\Leftrightarrow p^*$ geht durch l_1^* und l_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
 $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt



Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade l , die s schneidet?

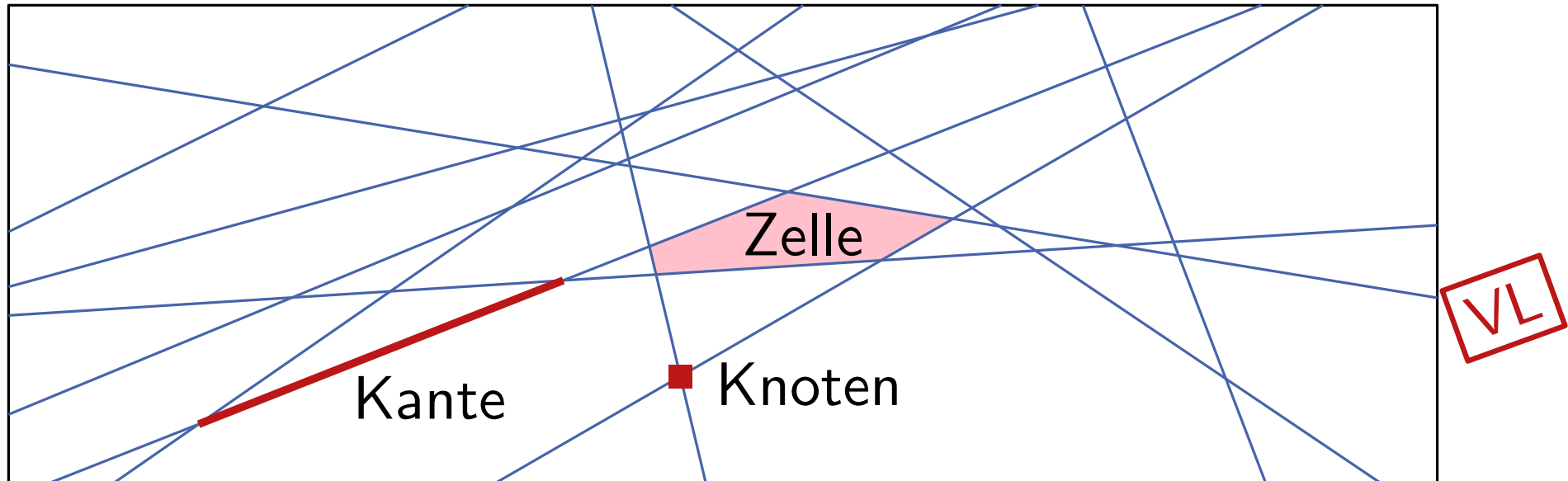


Aufgabe 3

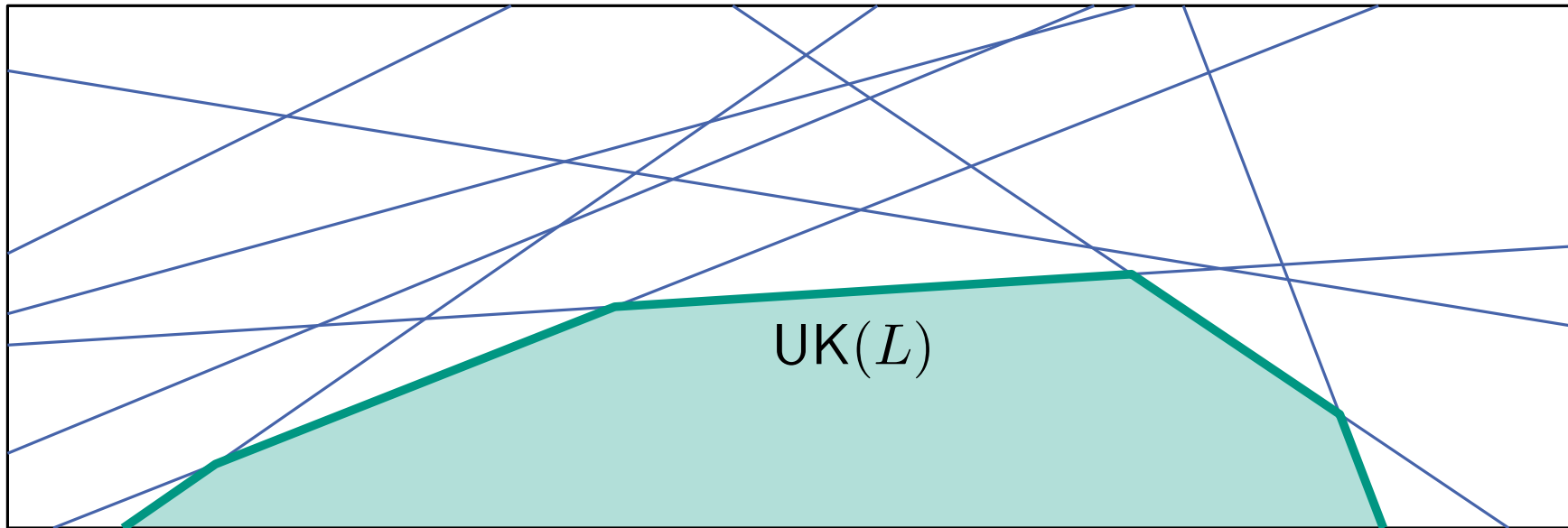
Problem:

Gegeben: Menge L bestehend aus n Geraden

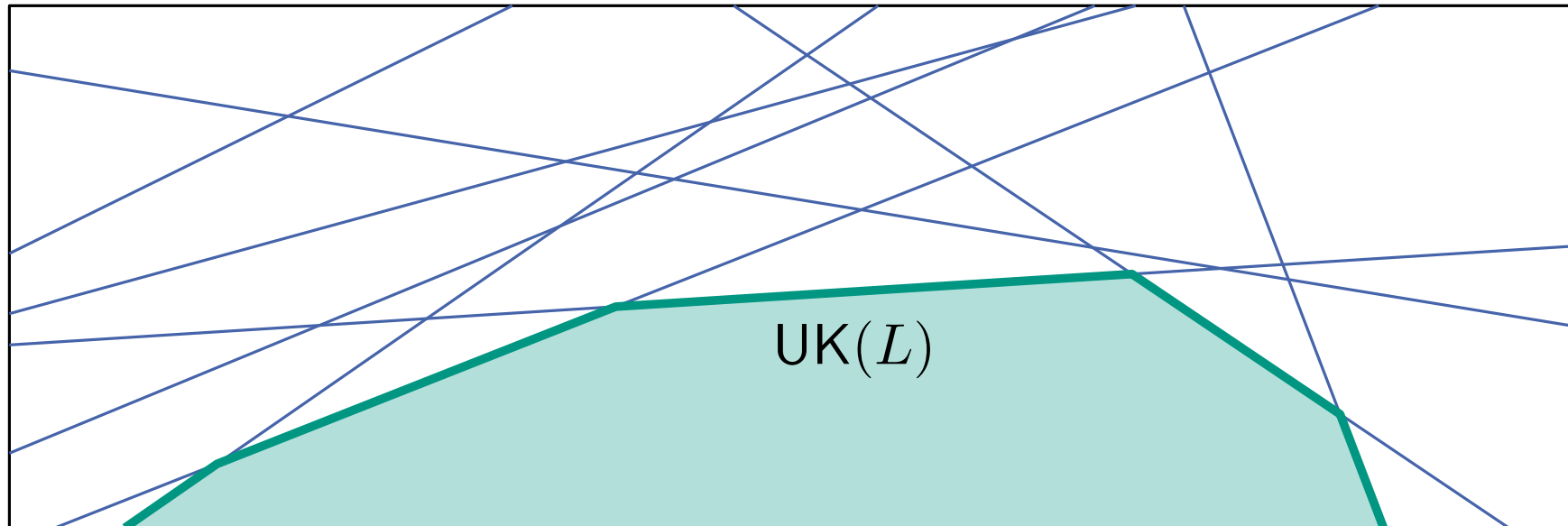
Gesucht: Achsenparallels Rechteck welches alle Knoten des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ enthält.



Def.: Eine Menge L von Geraden definiert eine Unterteilung $\mathcal{A}(L)$ der Ebene (das **Geradenarrangement**) in Knoten, Kanten und Zellen (tlws. unbeschränkt).
 $\mathcal{A}(L)$ heißt **einfach**, wenn keine drei Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei Geraden parallel sind.



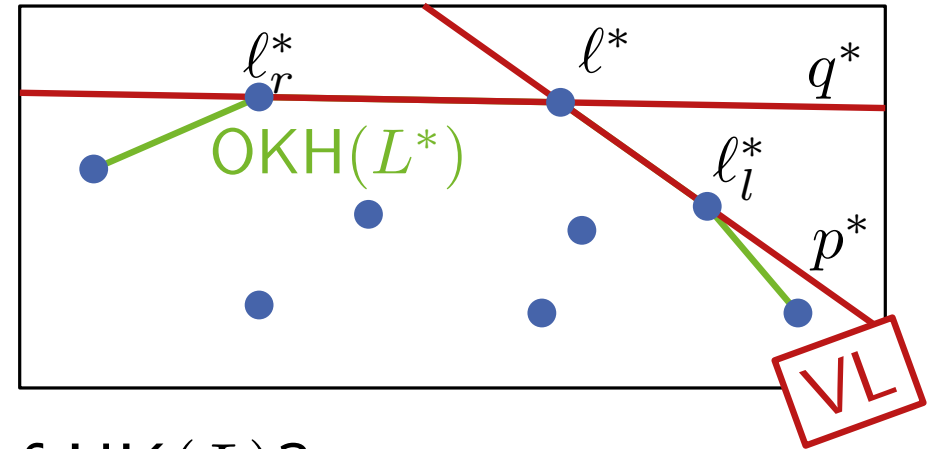
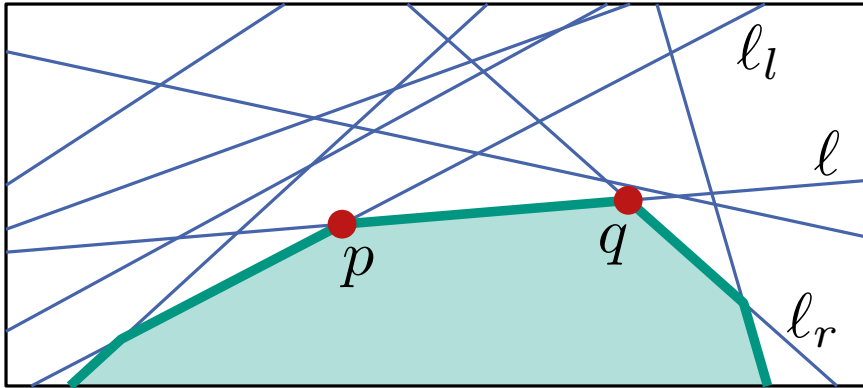
Def.: Für eine Menge L von Geraden ist die untere Kontur $UK(L)$ von L die Menge aller Punkte aus $\cup_{\ell \in L} \ell$, die unterhalb aller Geraden aus L liegen.



Def.: Für eine Menge L von Geraden ist die untere Kontur $UK(L)$ von L die Menge aller Punkte aus $\cup_{\ell \in L} \ell$, die unterhalb aller Geraden aus L liegen.

Möglichkeiten zur Berechnung der unteren Kontur:

- Algorithmus `IntersectHalbplanes` aus 4. VL
- Betrachte das duale Problem für $L^* = \{\ell^* \mid \ell \in L\}$



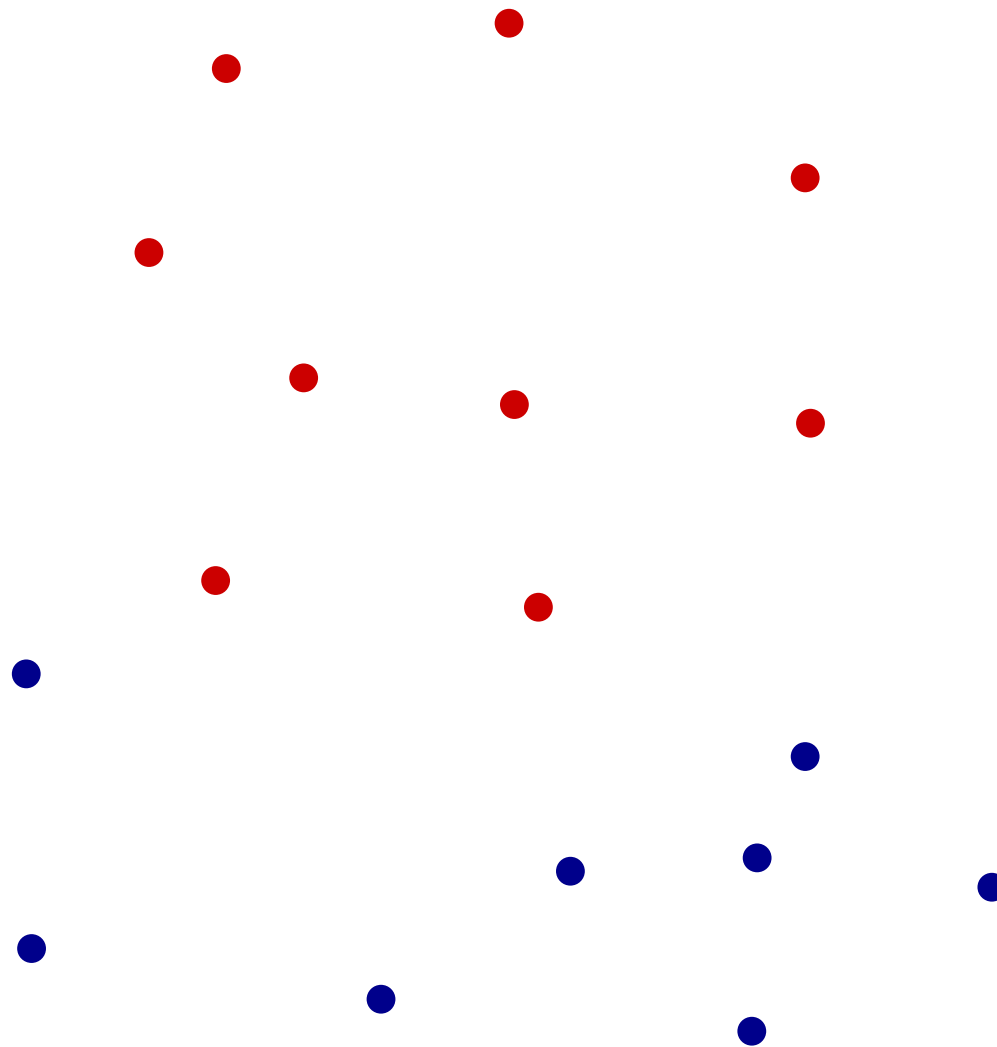
Wann erscheint ℓ als Strecke \overline{pq} auf $UK(L)$?

- p und q liegen unterhalb aller Geraden in L
- p^* und q^* liegen oberhalb aller Punkte aus L^*
⇒ liegen benachbart auf oberer konvexer Hülle $OKH(L^*)$
- Schnittpunkt von p^* und q^* ist ℓ^* , Knoten von $OKH(L^*)$

Lemma 2: Die Geraden auf $UK(L)$ von links nach rechts entsprechen den Knoten auf $OKH(L^*)$ von rechts nach links.

Aufgabe 4

n rote Knoten



n blaue Knoten

Aufgabe 4

n rote Knoten

Separator



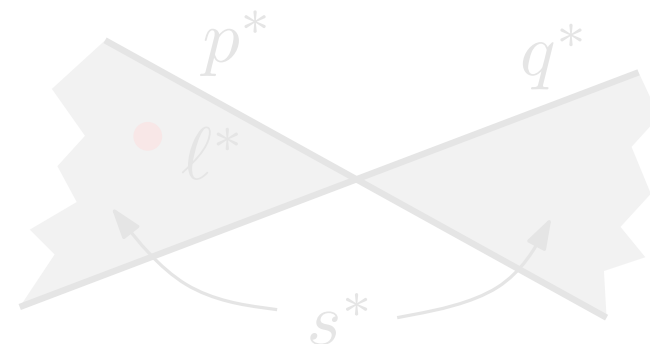
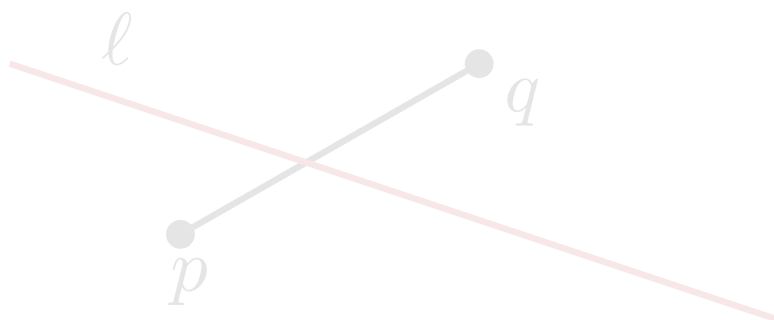
n blaue Knoten

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(l^*)^* = l$
- p liegt unter/auf/über $l \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter l^*
- l_1 und l_2 schneiden sich in p
 $\Leftrightarrow p^*$ geht durch l_1^* und l_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
 $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt



Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?
Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade l , die s schneidet?



Aufgabe 4

n rote Knoten

Separator



n blaue Knoten

Übungsblatt 10 - Dualität

Übungsblatt 11 - Quadrees

Aufgabe 1

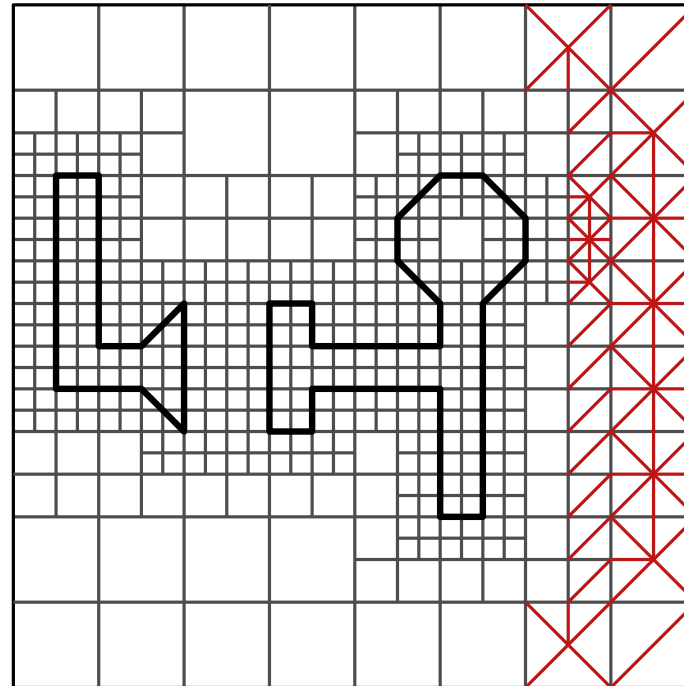
Delaunay Triangulierung \leftrightarrow Meshing

Meshing aus der Vorlesung liefert ausschließlich Dreiecke die keinen Winkel $> 90^\circ$ haben.

Aufgabe 1

Delaunay Triangulierung \leftrightarrow Meshing

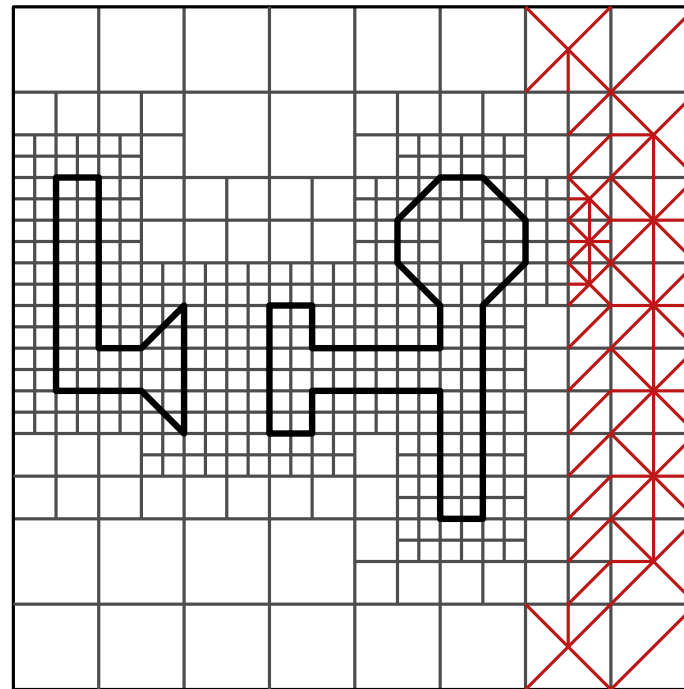
Meshing aus der Vorlesung liefert ausschließlich Dreiecke die keinen Winkel $> 90^\circ$ haben.



Aufgabe 1

Delaunay Triangulierung \leftrightarrow Meshing

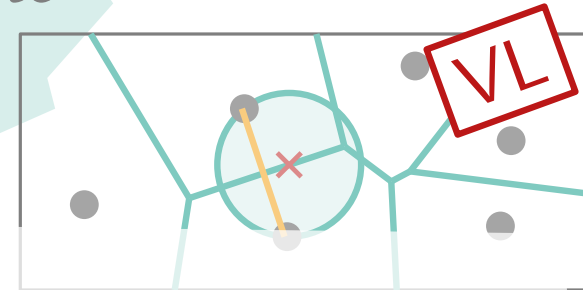
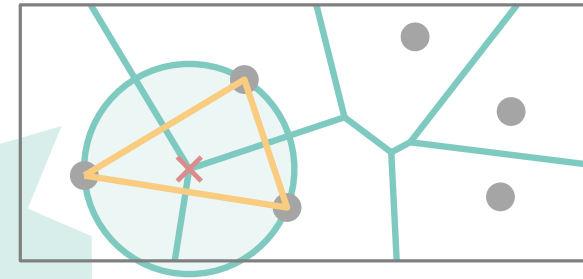
Meshing aus der Vorlesung liefert ausschließlich Dreiecke die keinen Winkel $> 90^\circ$ haben.



Sei nun \mathcal{T} eine Triangulierung einer endlichen Punktmenge $P \subset \mathbb{R}^2$. Zeige, dass \mathcal{T} eine Delaunay Triangulierung ist.

Satz über Voronoi-Diagramme:

- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
 $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
 $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.



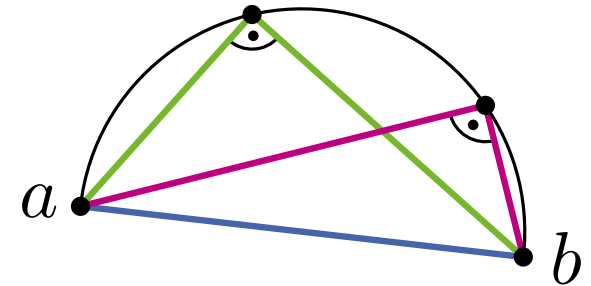
Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
 \Leftrightarrow es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

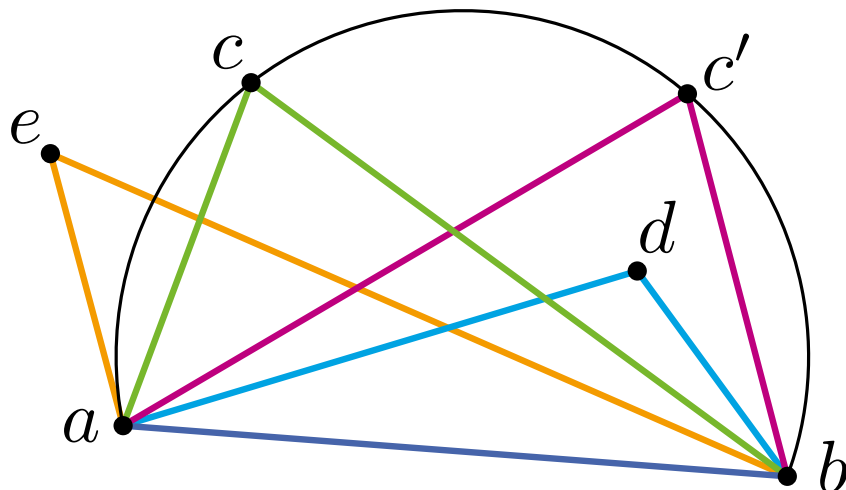
Satz 5: Sei P Punktmenge und \mathcal{T} eine Triangulierung von P . \mathcal{T} ist Delaunay-Triangulierung \Leftrightarrow Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Der Satz von Thales

Satz 2: Alle Dreiecke aus den Endpunkten des Kreisdurchmessers und eines Halbkreispunktes sind rechtwinklig.



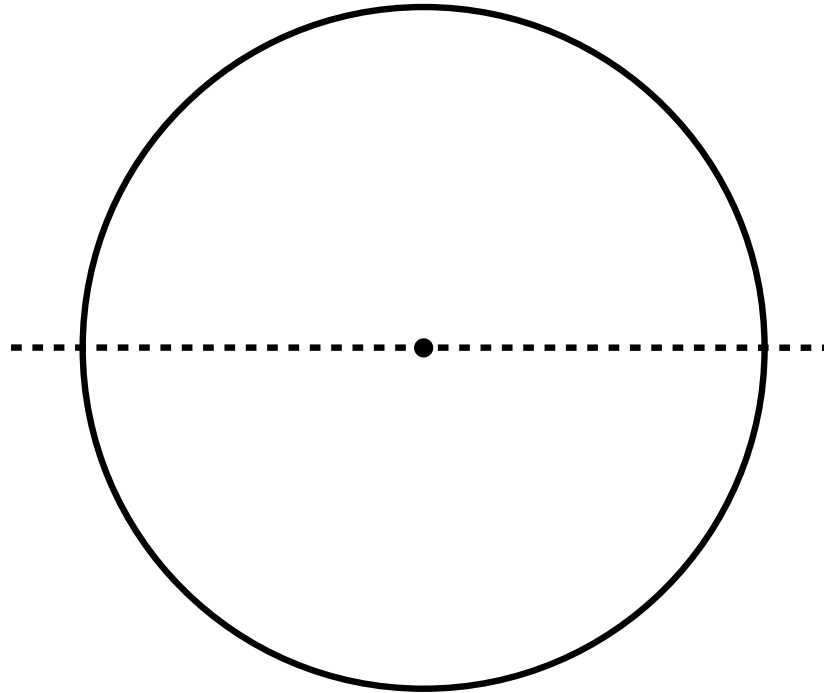
Satz 2': Alle Dreiecke aus den Endpunkten einer Sekante $\ell = \overline{ab}$ und eines Kreispunktes c auf der gleichen Seite von ℓ haben den gleichen Winkel an c . Für Dreiecke $\triangle abd$ mit d innerhalb des Kreises gilt $\angle adb > \angle acd$, für e außerhalb des Kreises gilt $\angle aeb < \angle acd$. VL



$$\angle aeb < \angle acb = \angle ac'b < \angle adb$$

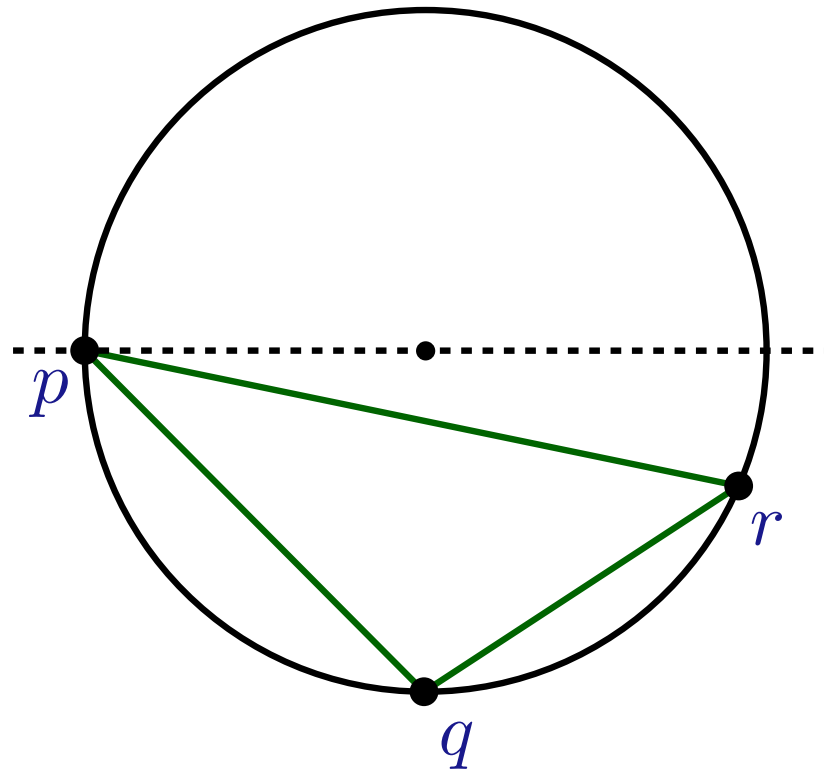
Aufgabe 1

Delaunay Triangulierung \leftrightarrow Meshing



Aufgabe 1

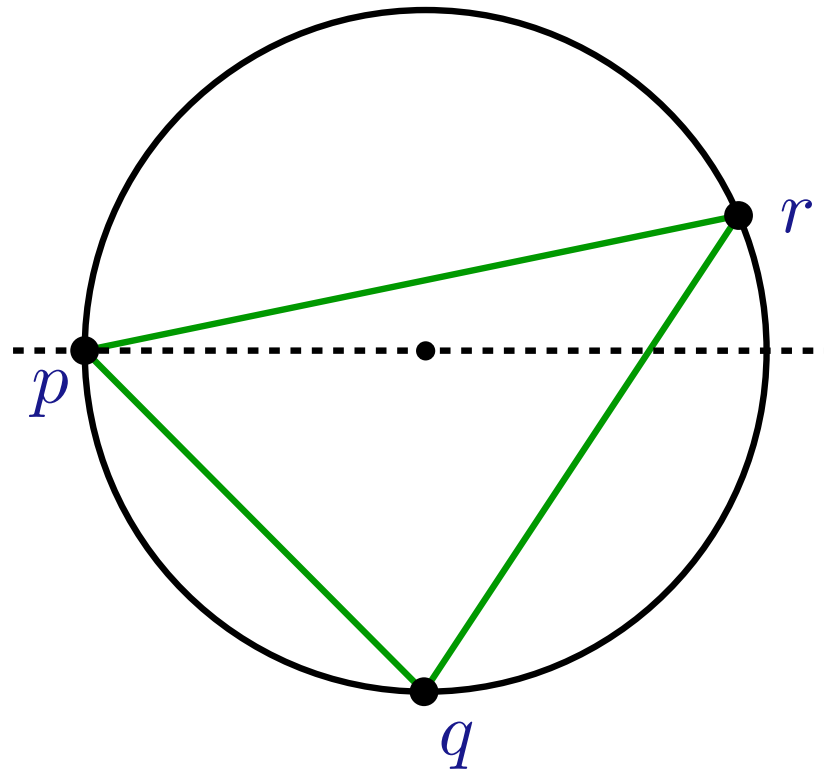
Delaunay Triangulierung \leftrightarrow Meshing



Winkel zu groß

Aufgabe 1

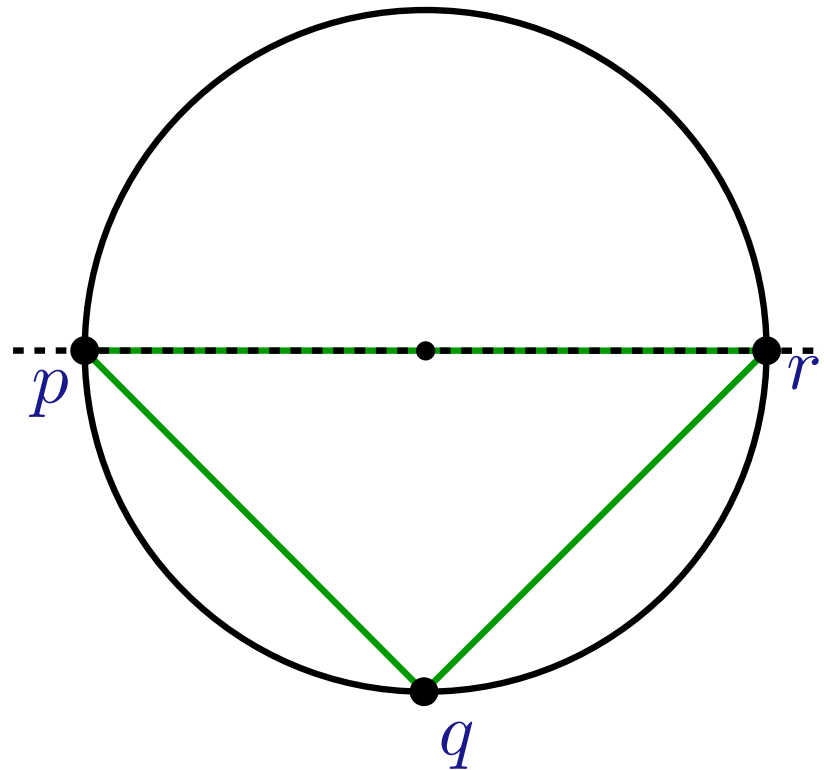
Delaunay Triangulierung \leftrightarrow Meshing



Es ex. kein Punkt z für ein Dreieck, mit Winkel $\leq 90^\circ$

Aufgabe 1

Delaunay Triangulierung \leftrightarrow Meshing



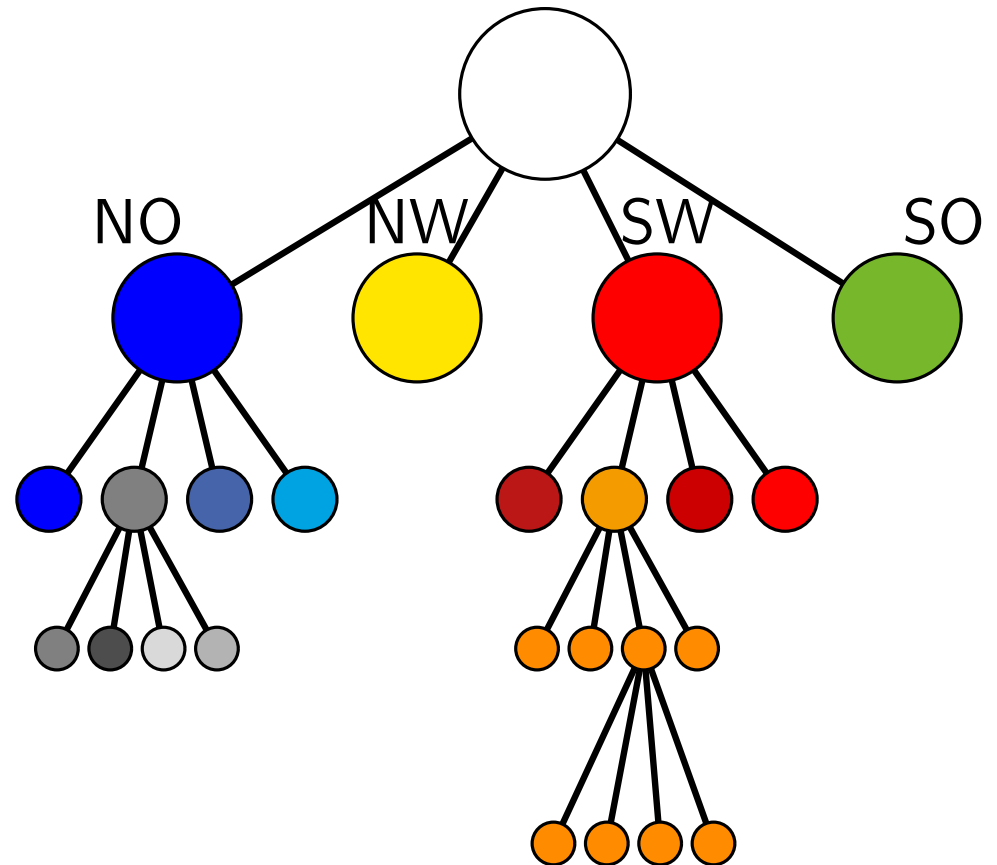
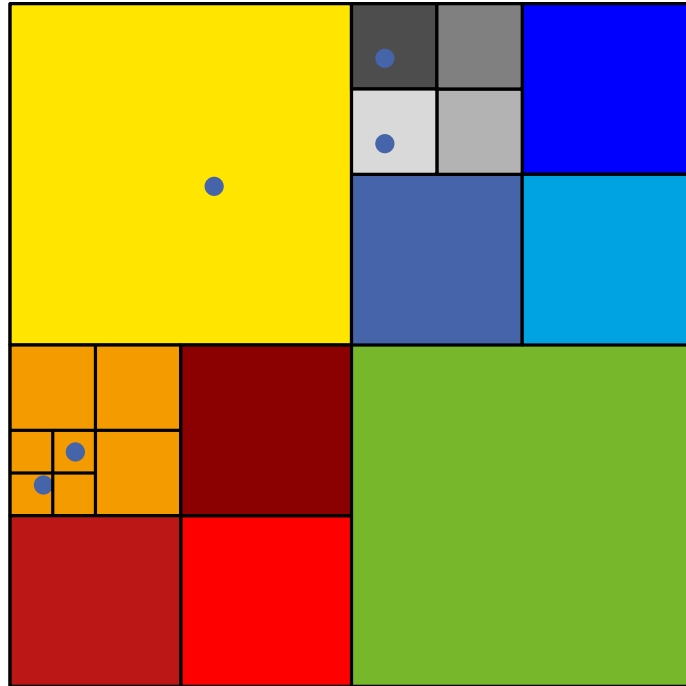
Es ex. kein Punkt z für ein Dreieck, mit Winkel $\leq 90^\circ$

Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees

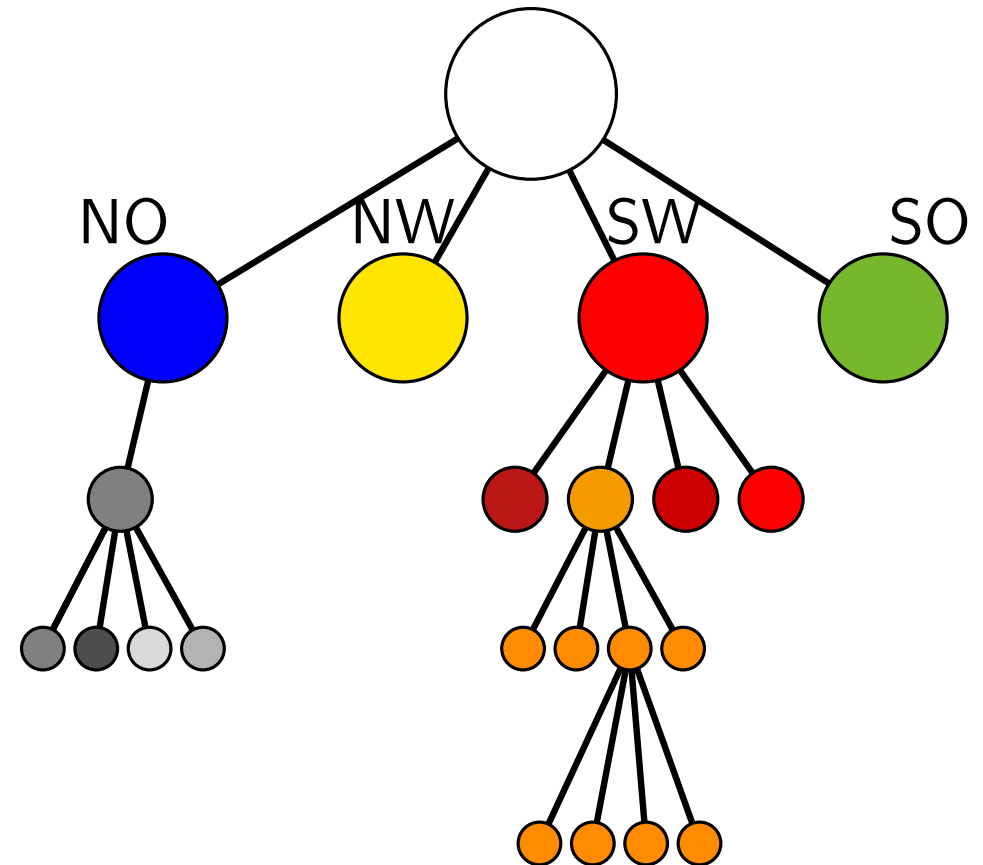
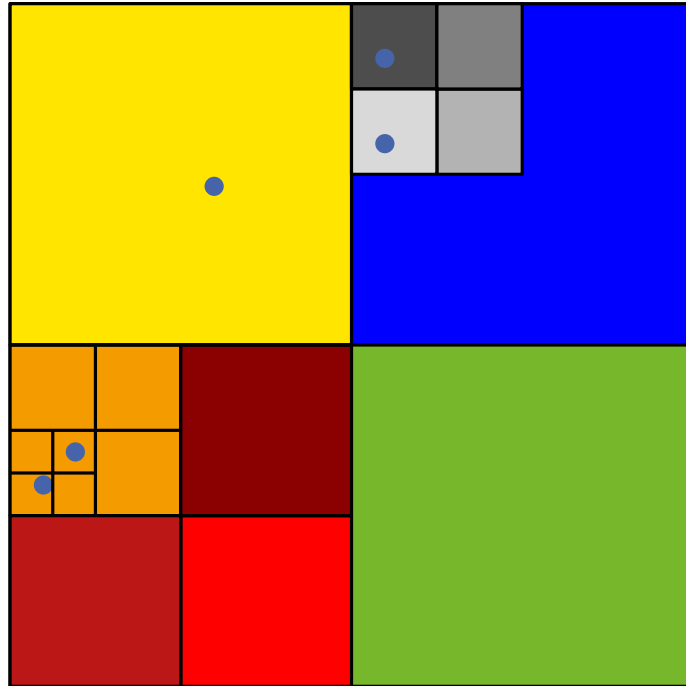
Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees



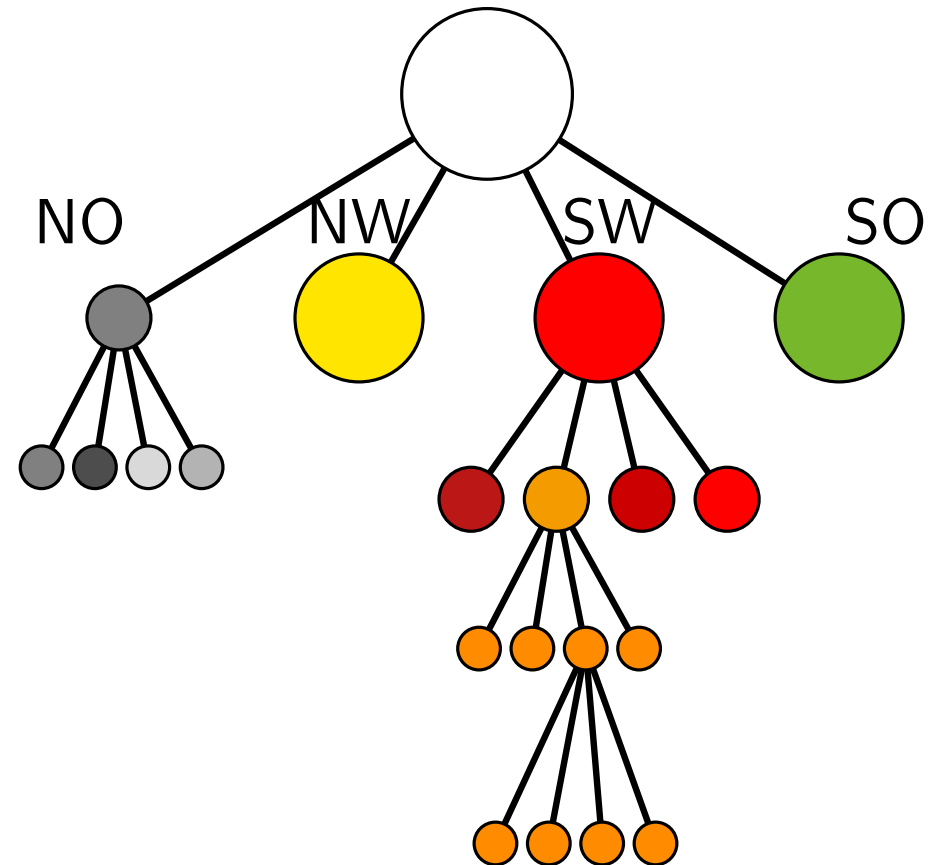
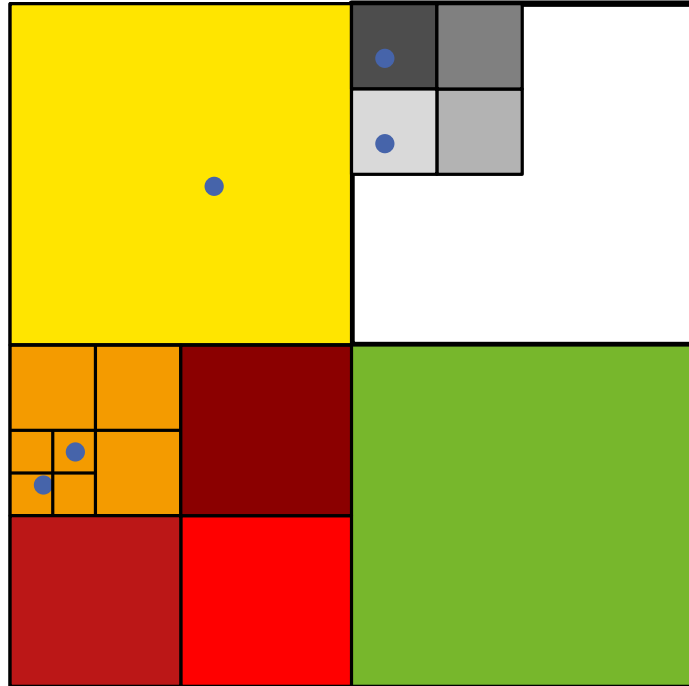
Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees



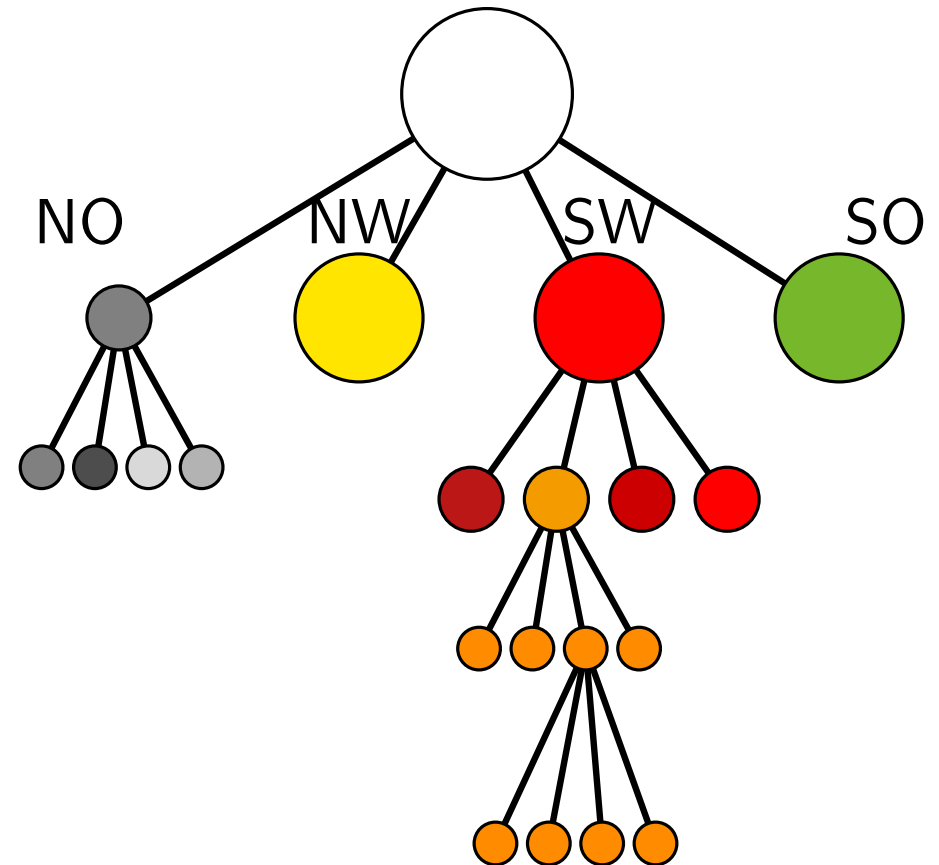
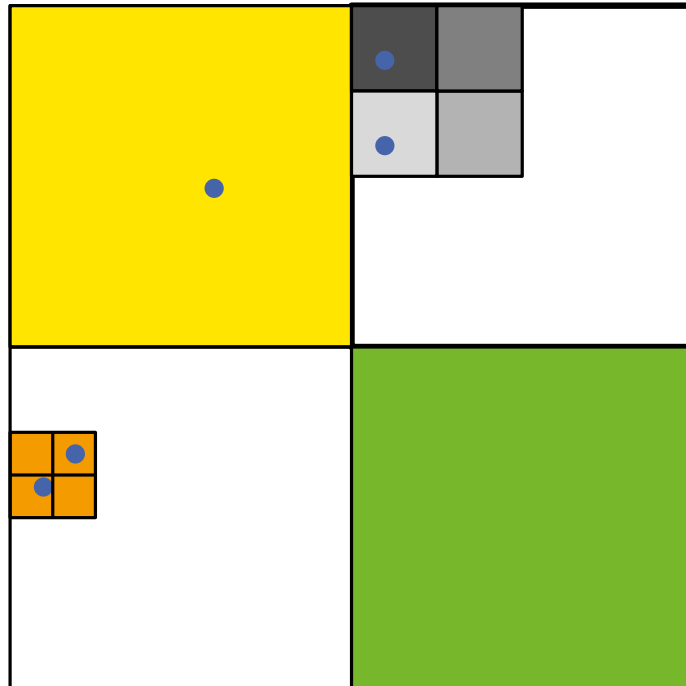
Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees



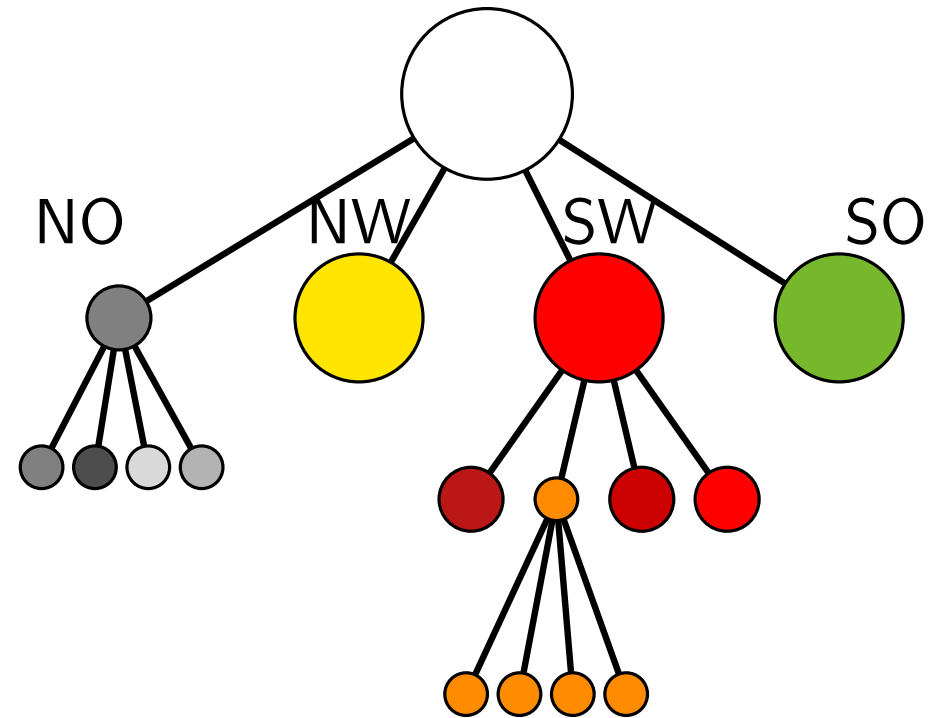
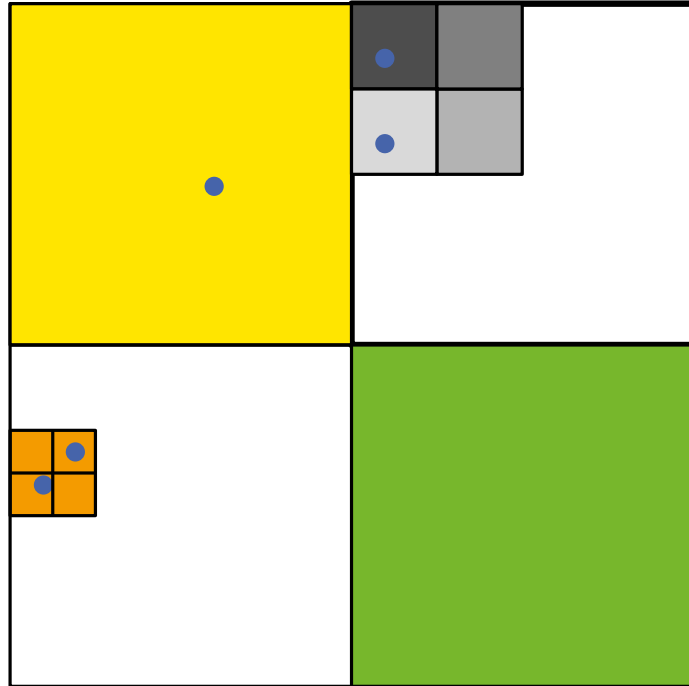
Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees



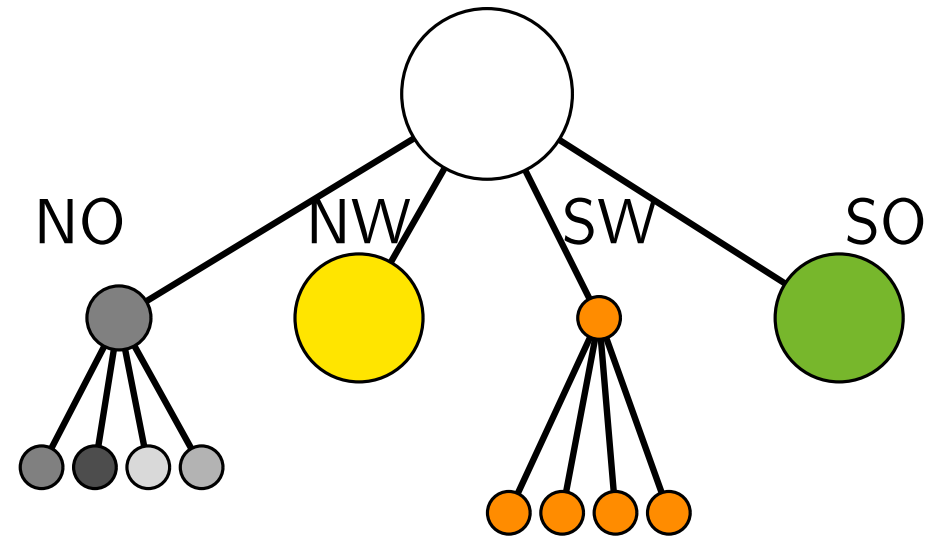
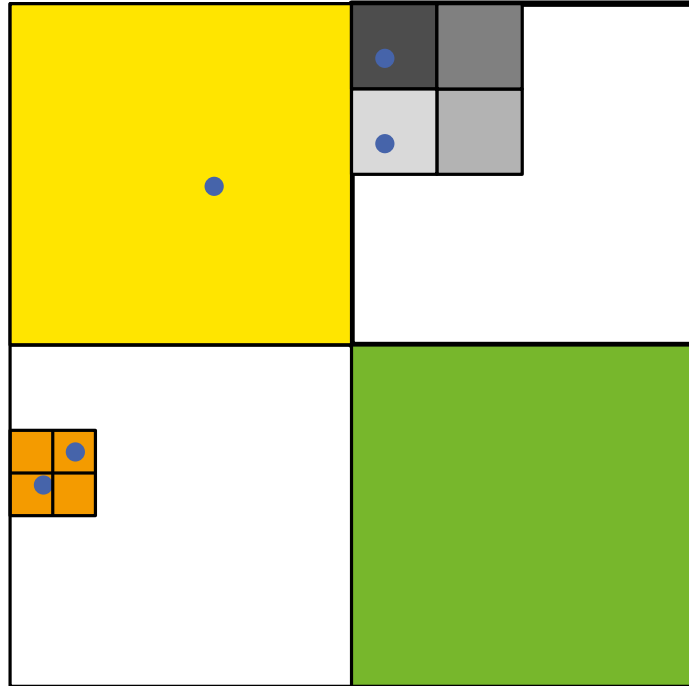
Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees



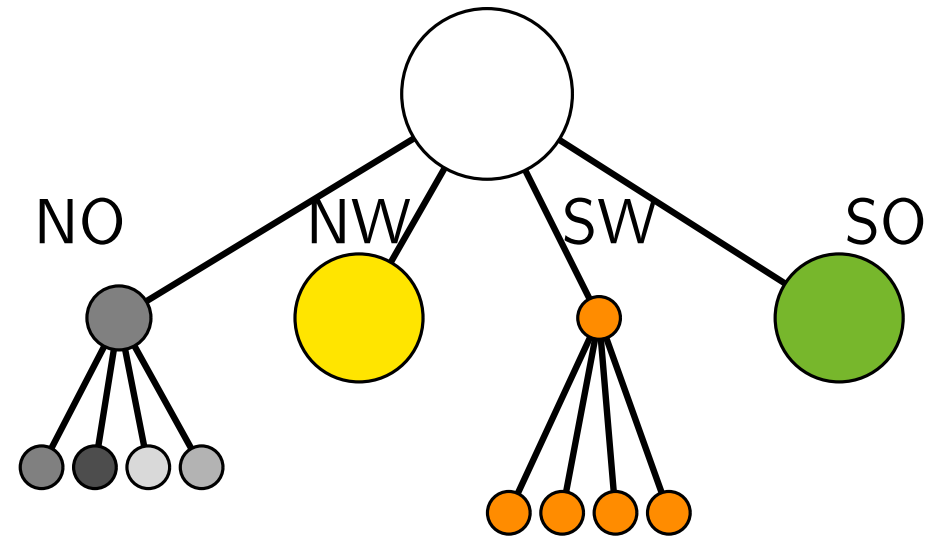
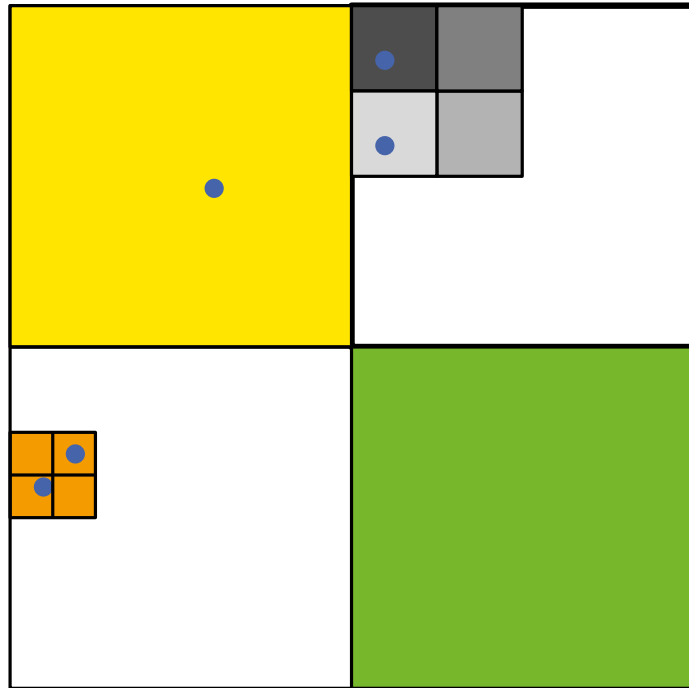
Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees



Aufgabe 2

Komprimierte Quadrees



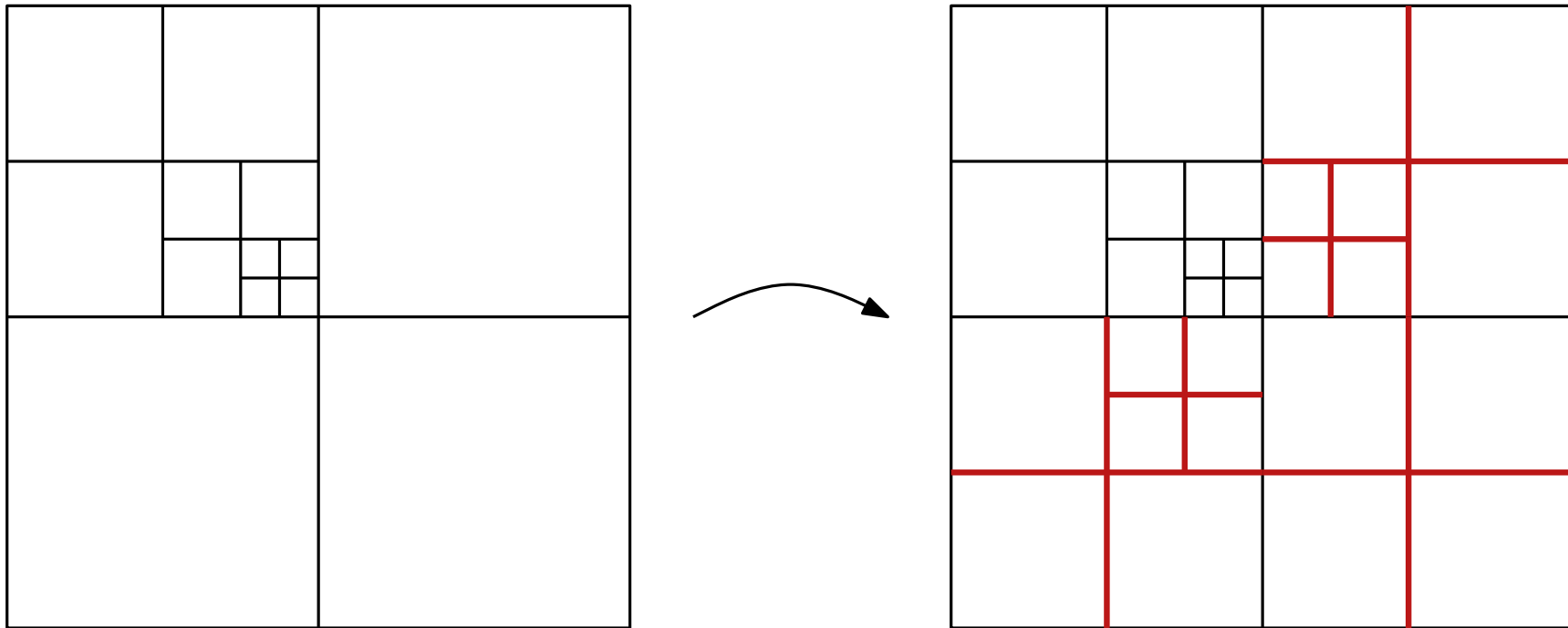
- Anzahl der Knoten jetzt $O(n)$ (statt $O((d+1)n)$)
- Laufzeit für Umwandlung?
- Aufwand für Konstruktion verringern?

Aufgabe 3

Balancierte Quadrees

Balancierte Quadrees

Def.: Ein Quadtree heißt **balanciert**, wenn die Seitenlänge von je zwei Nachbarquadraten in der zugeh. Unterteilung sich um einen Faktor von höchstens 2 unterscheidet.

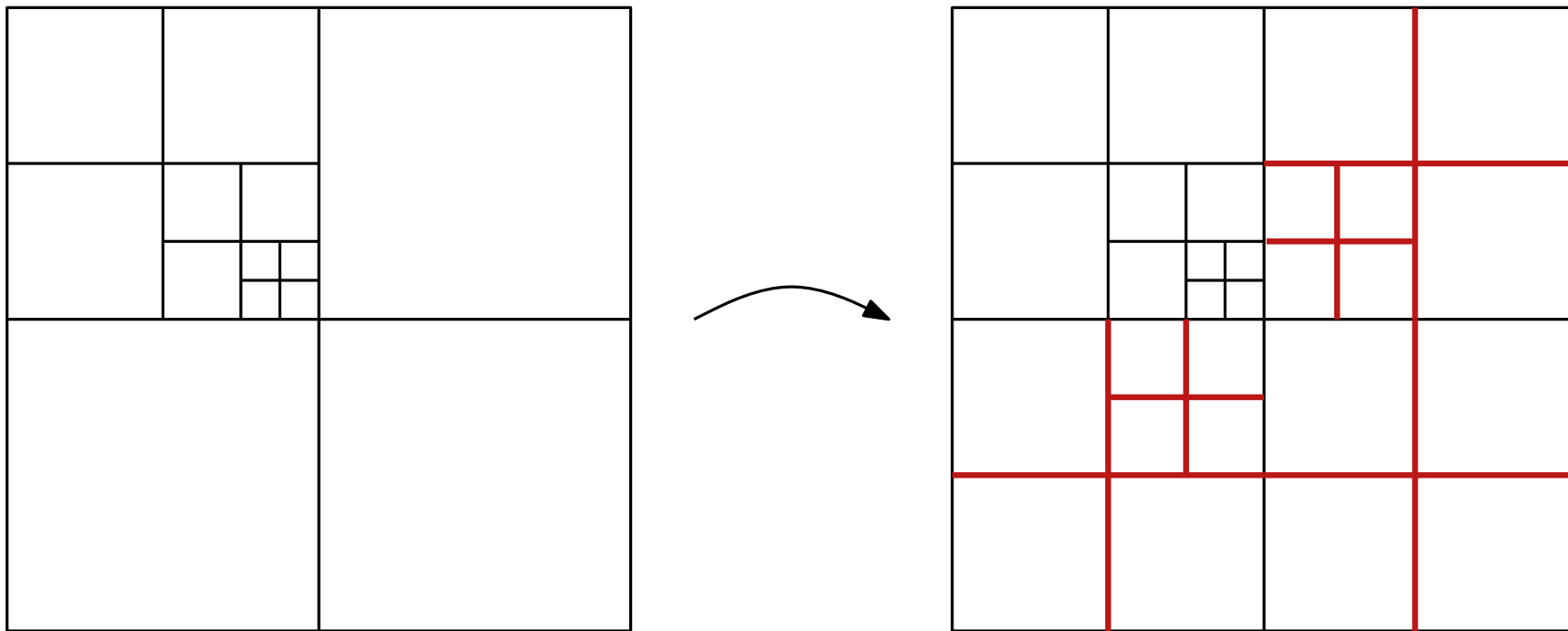


VL

Aufgabe 3

Balancierte Quadrees

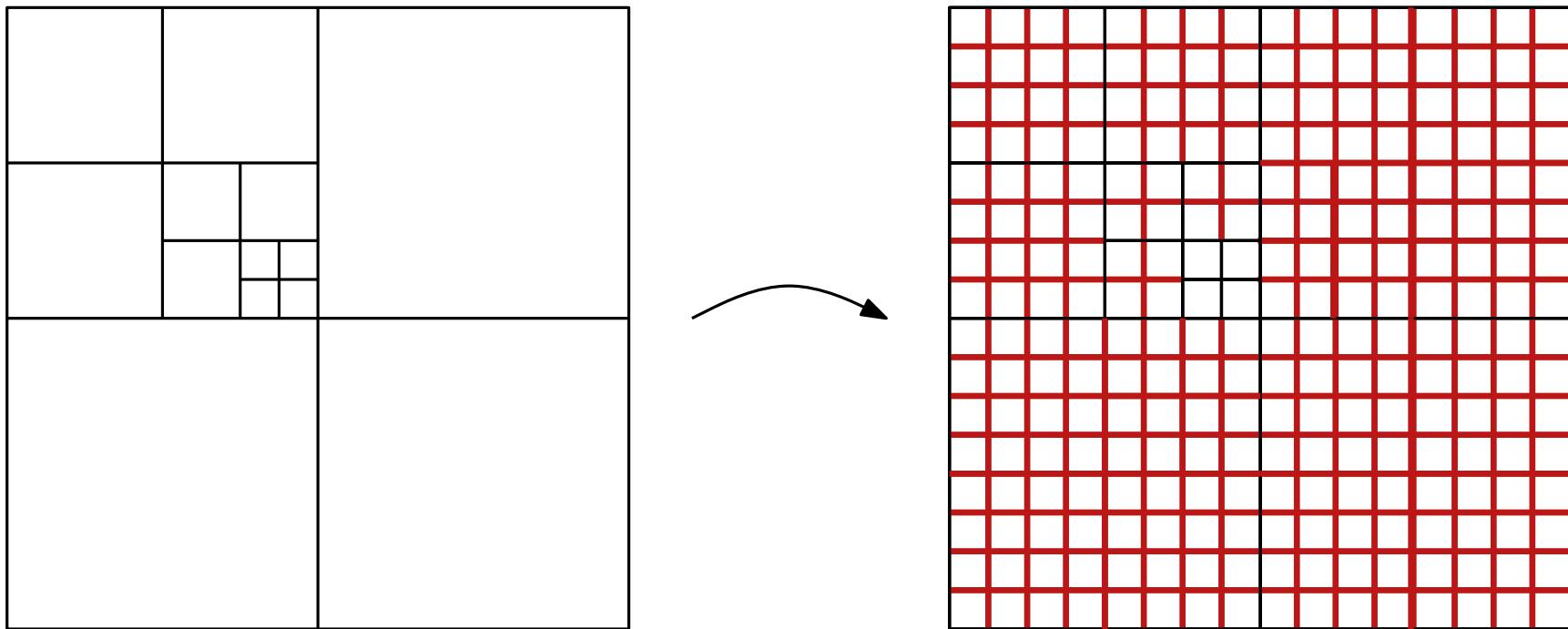
Abänderung: Alle Rechtecke gleich groß



Aufgabe 3

Balancierte Quadrees

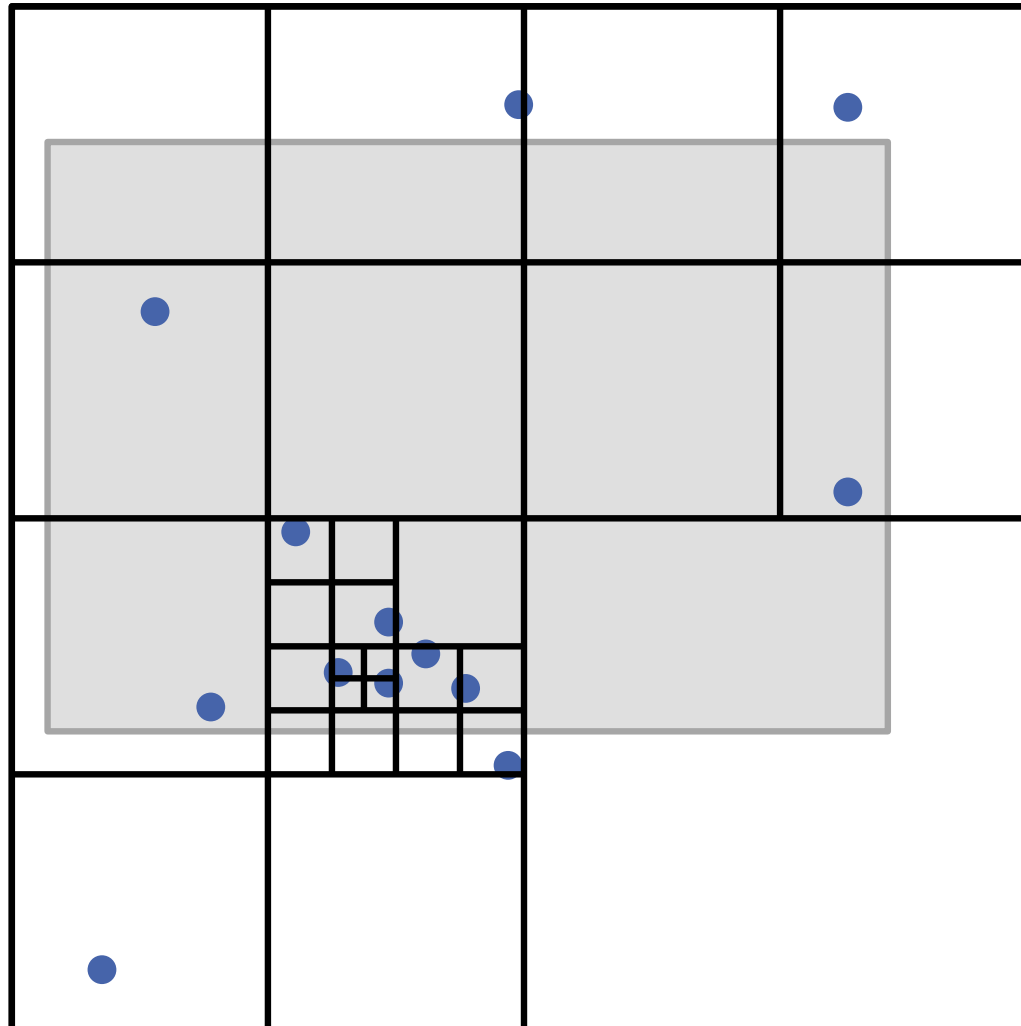
Abänderung: Alle Rechtecke gleich groß



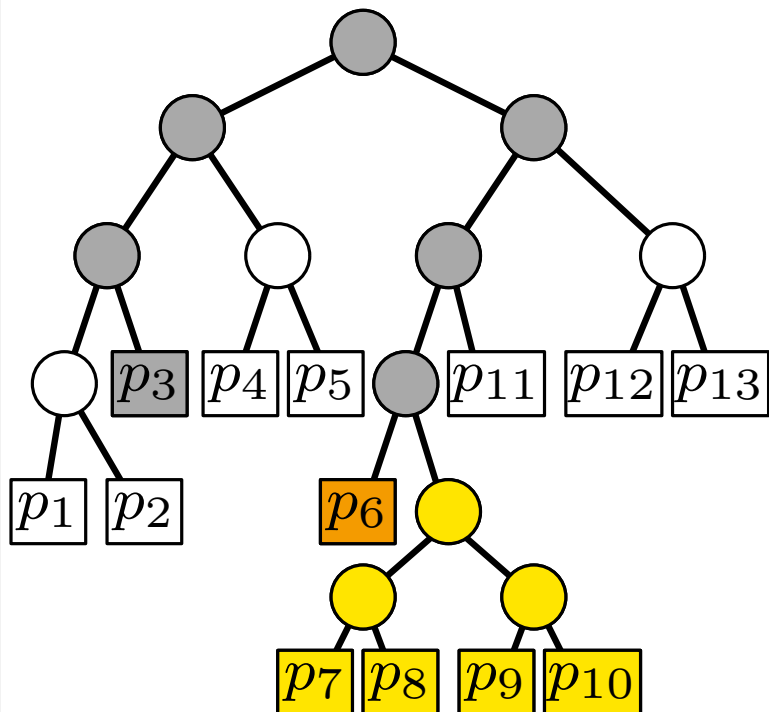
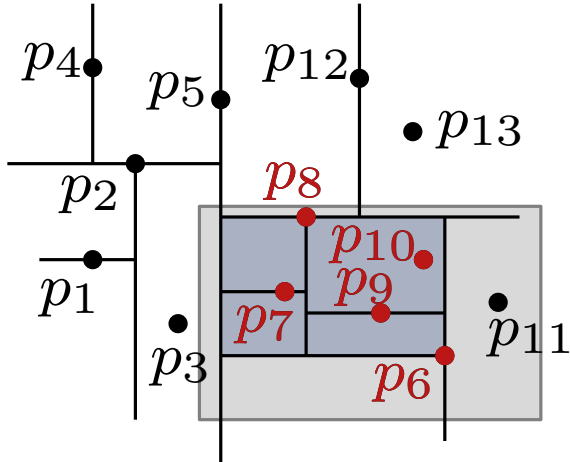
Frage: Wie viele Blätter?

Quadtrees für Range Queries?

- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



Bereichsabfrage in einem kd -Tree



SearchKdTree(v, R)

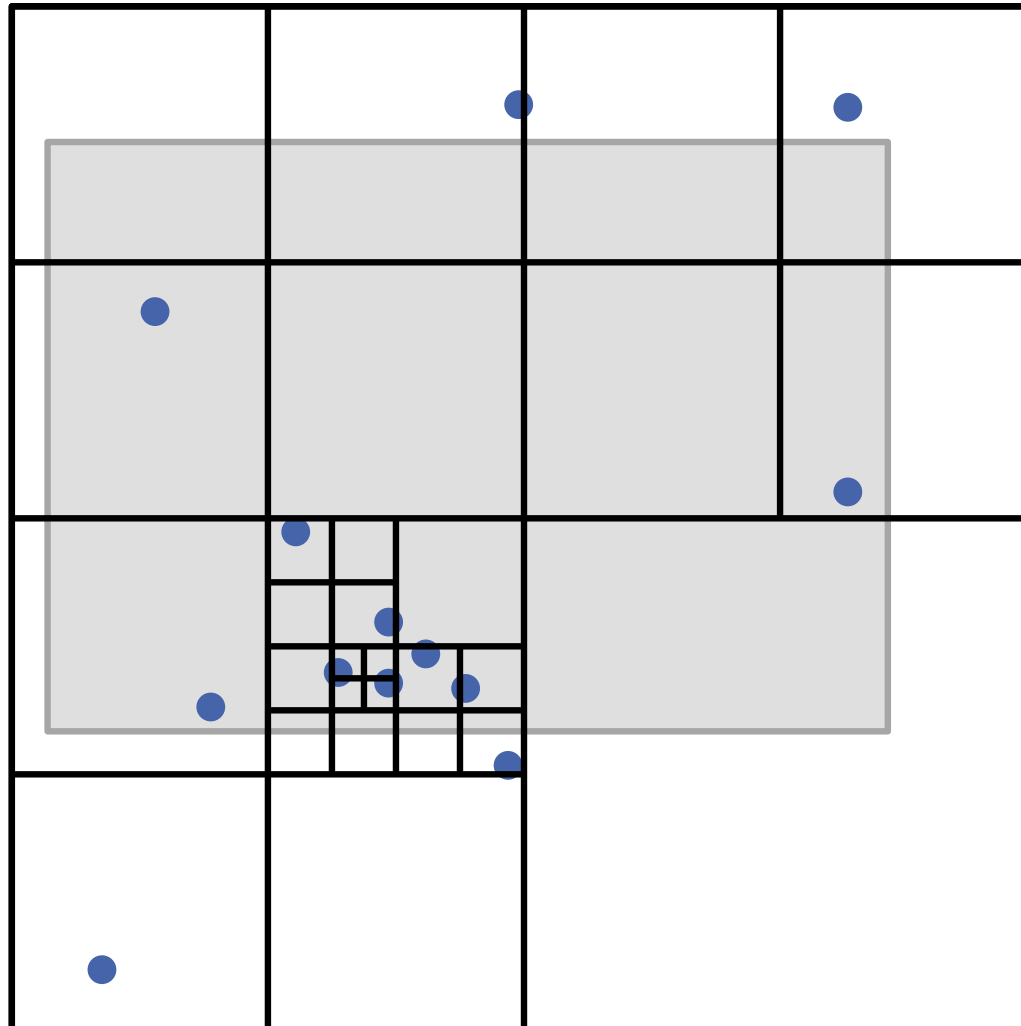
```

if  $v$  Blatt then
    prüfe Punkt  $p$  in  $v$  auf  $p \in R$ ;
else
    if  $\text{region}(\text{lc}(v)) \subseteq R$  then
        ReportSubtree( $\text{lc}(v)$ );
    else
        if  $\text{region}(\text{lc}(v)) \cap R \neq \emptyset$  then
            SearchKdTree( $\text{lc}(v), R$ );
    if  $\text{region}(\text{rc}(v)) \subseteq R$  then
        ReportSubtree( $\text{rc}(v)$ );
    else
        if  $\text{region}(\text{rc}(v)) \cap R \neq \emptyset$  then
            SearchKdTree( $\text{rc}(v), R$ );
    
```



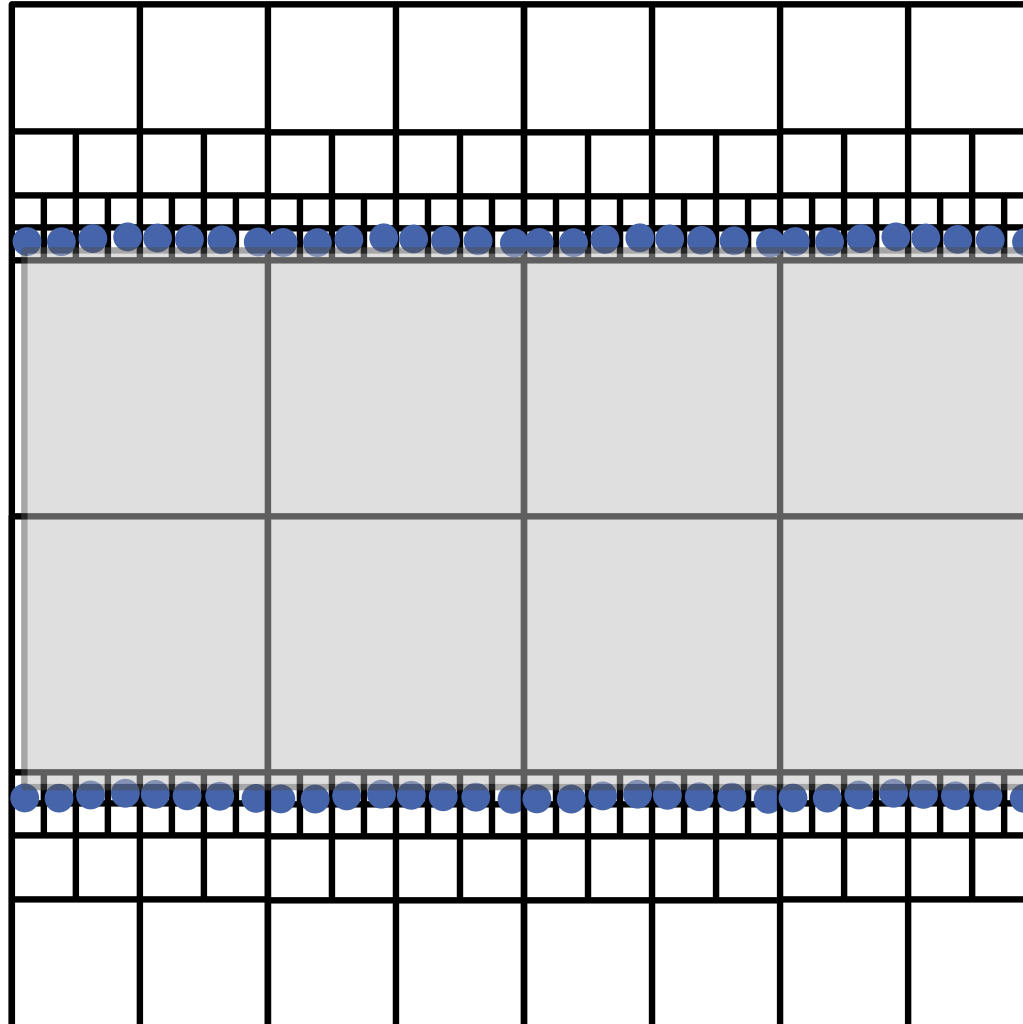
Quadtrees für Range Queries?

- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



Quadrees für Range Queries?

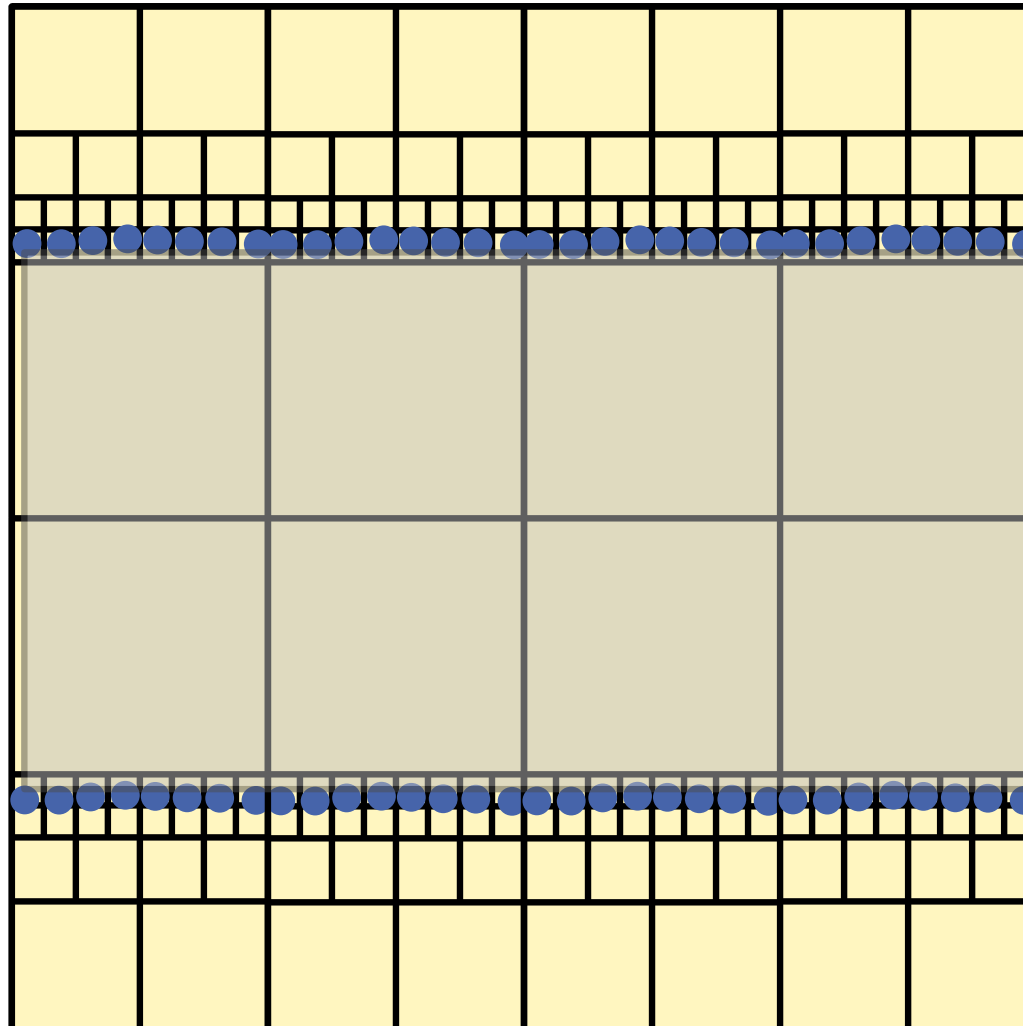
- Wie kann man Quadrees für Bereichsanfragen nutzen?



Aufgabe 4

Quadtrees für Range Queries?

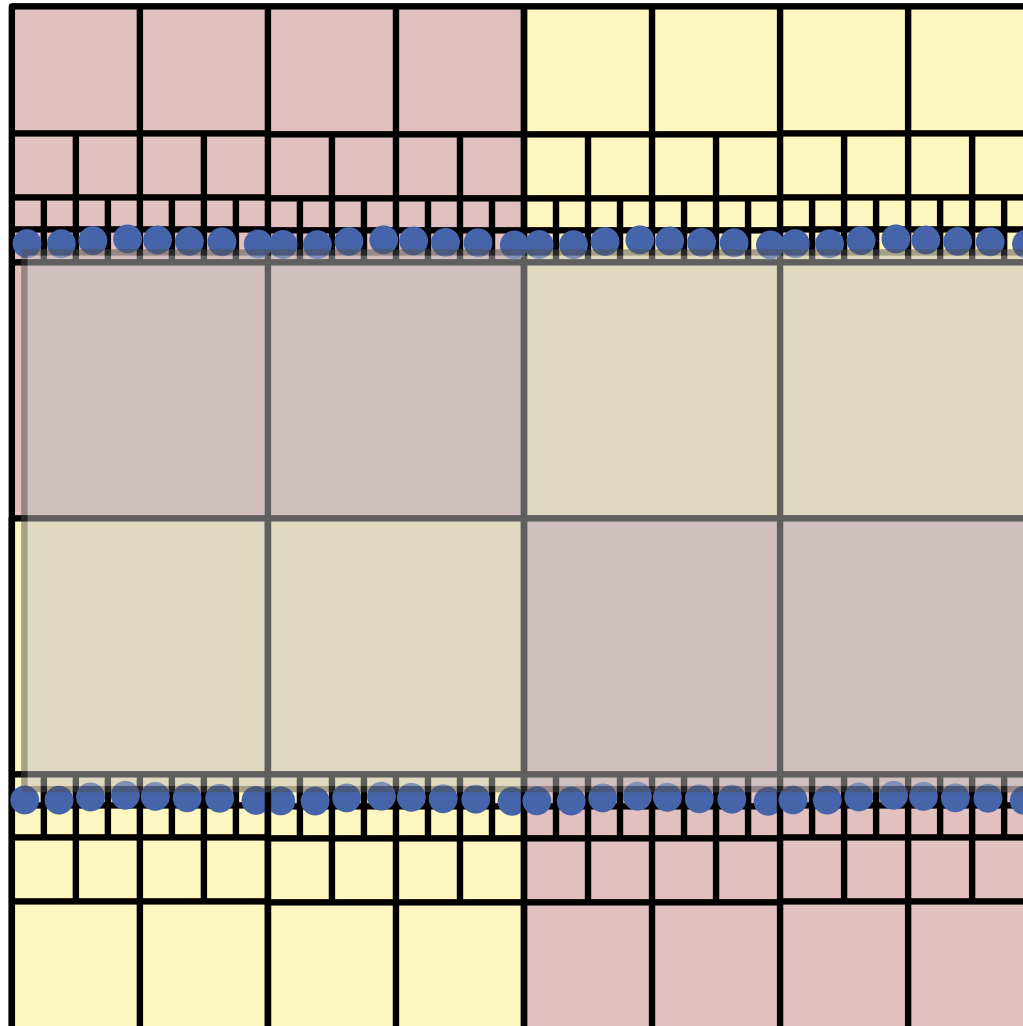
- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



Aufgabe 4

Quadrees für Range Queries?

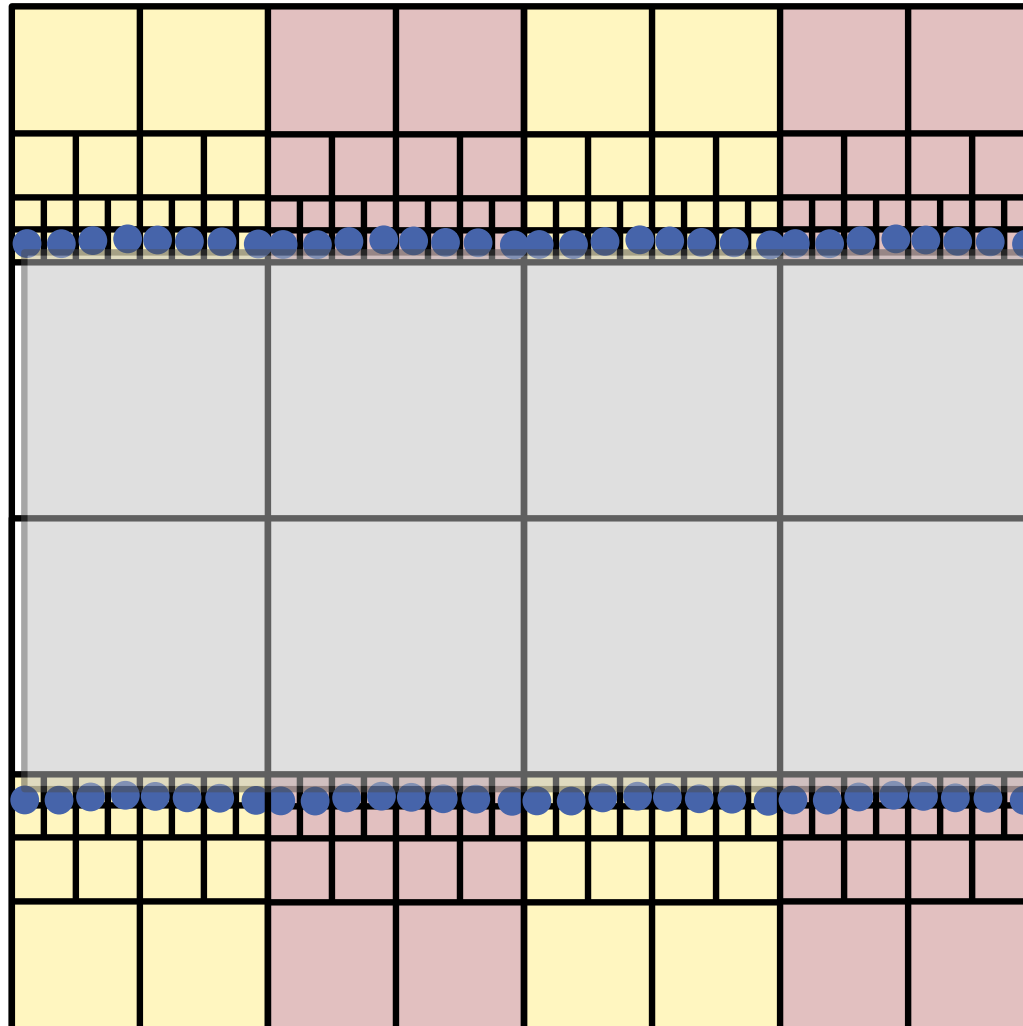
- Wie kann man Quadrees für Bereichsanfragen nutzen?



Aufgabe 4

Quadtrees für Range Queries?

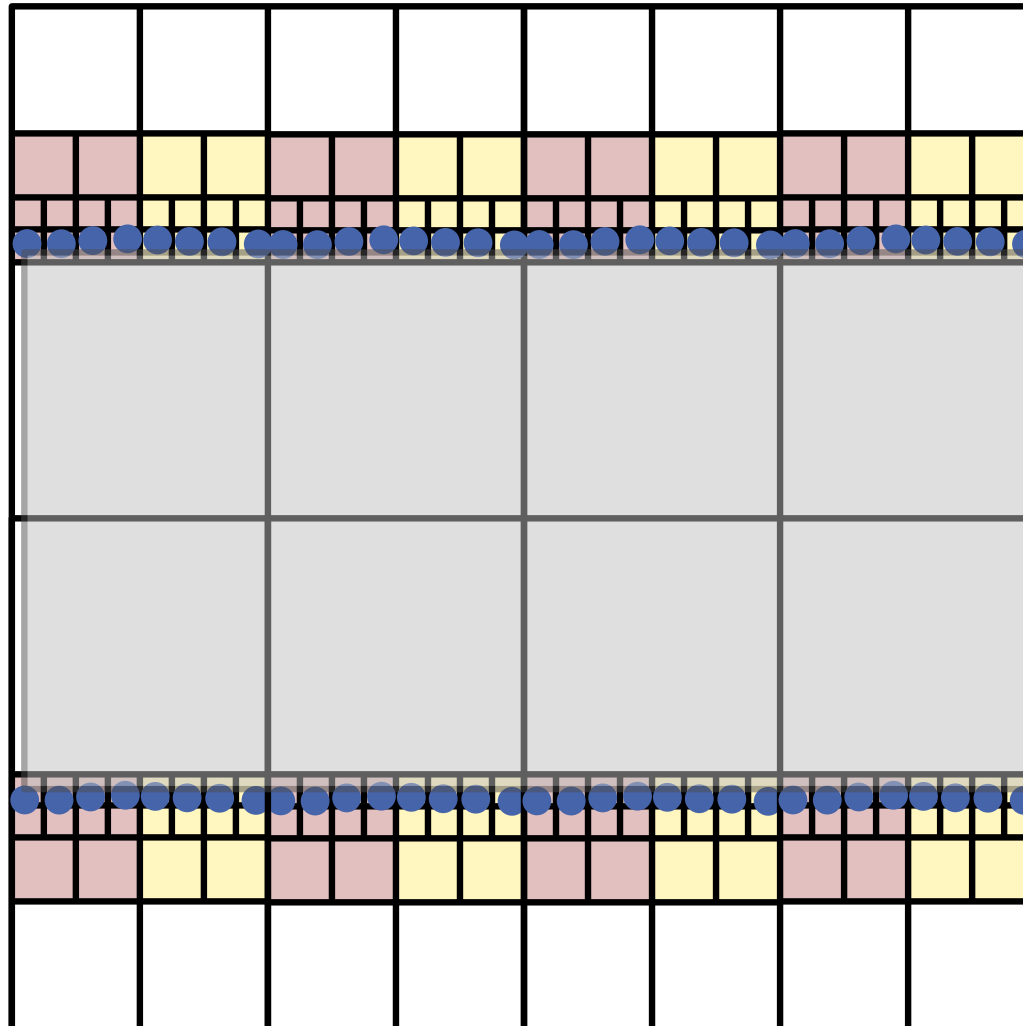
- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



Aufgabe 4

Quadtrees für Range Queries?

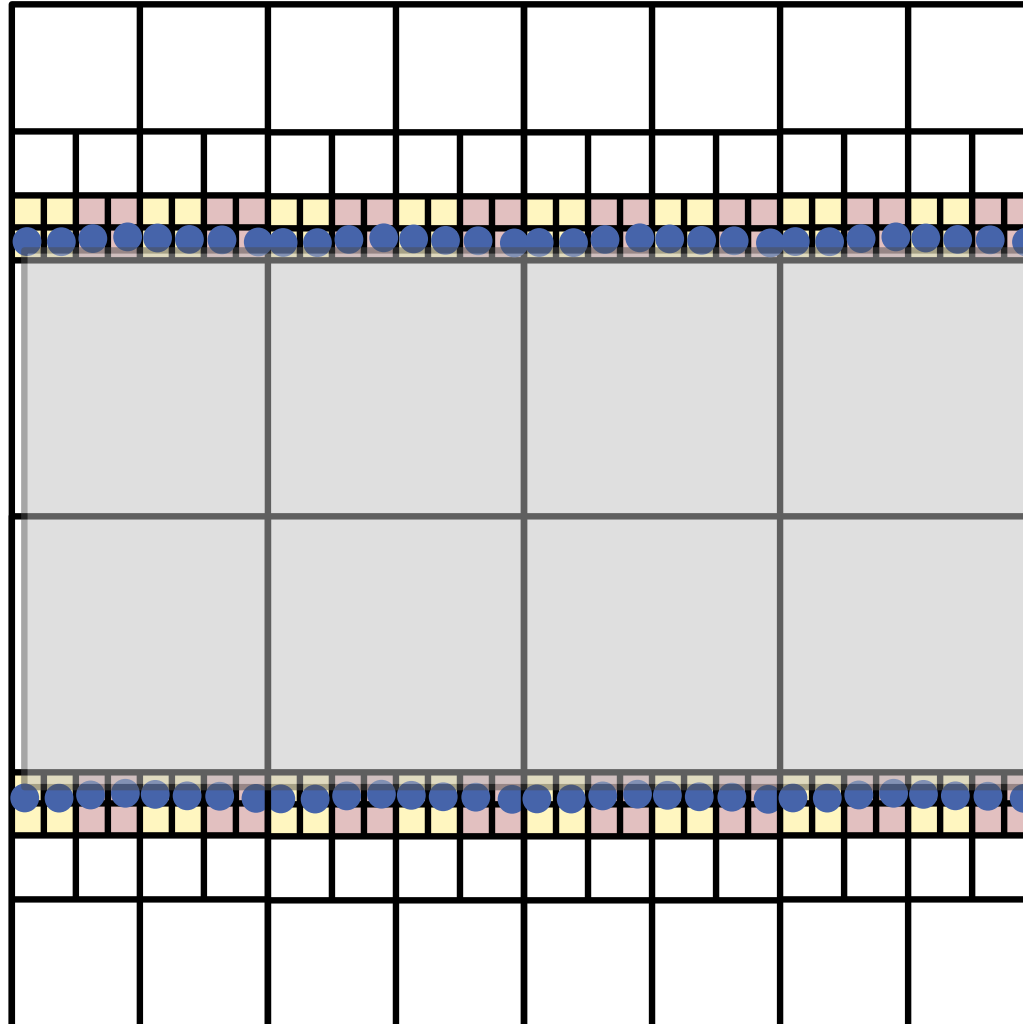
- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



Aufgabe 4

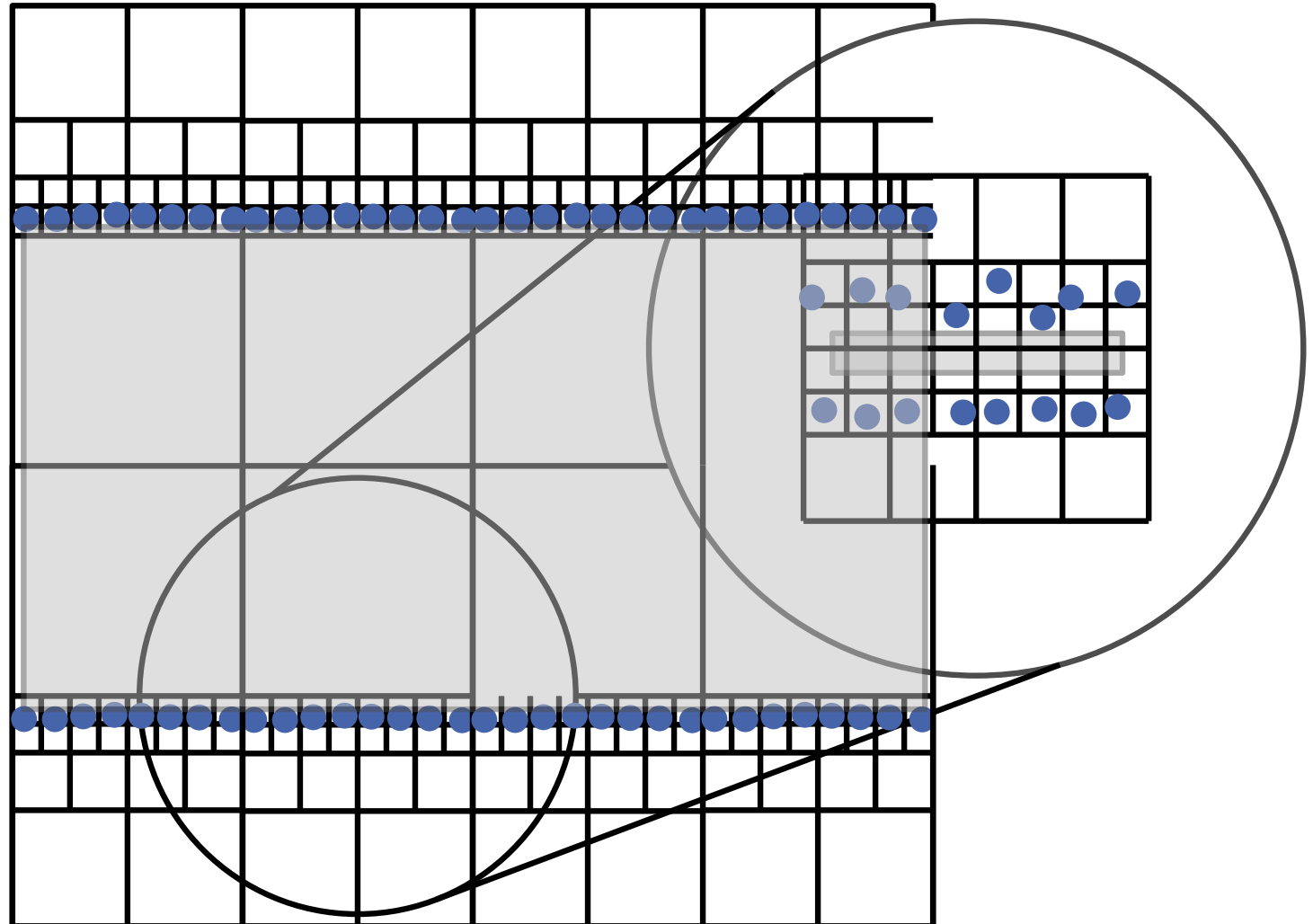
Quadtrees für Range Queries?

- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



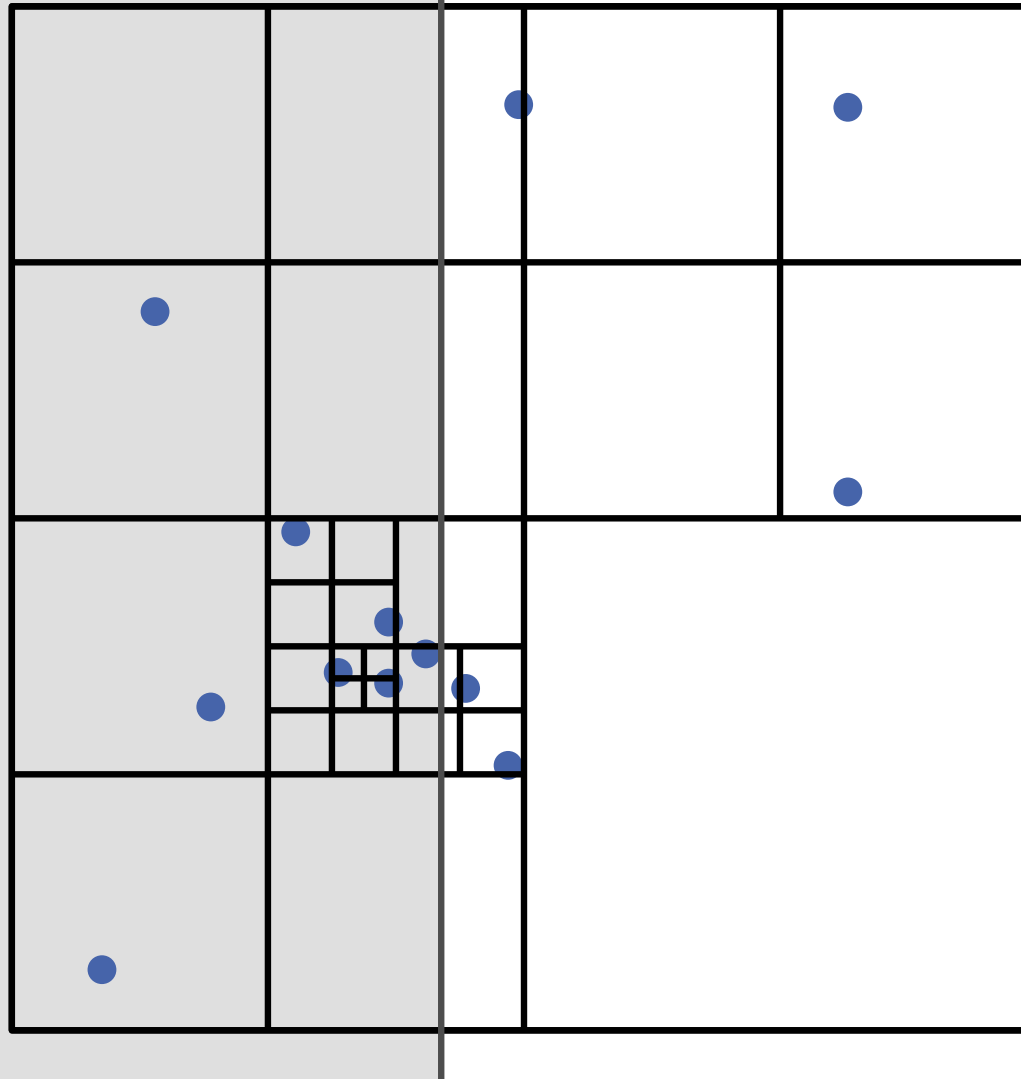
Quadtrees für Range Queries?

- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



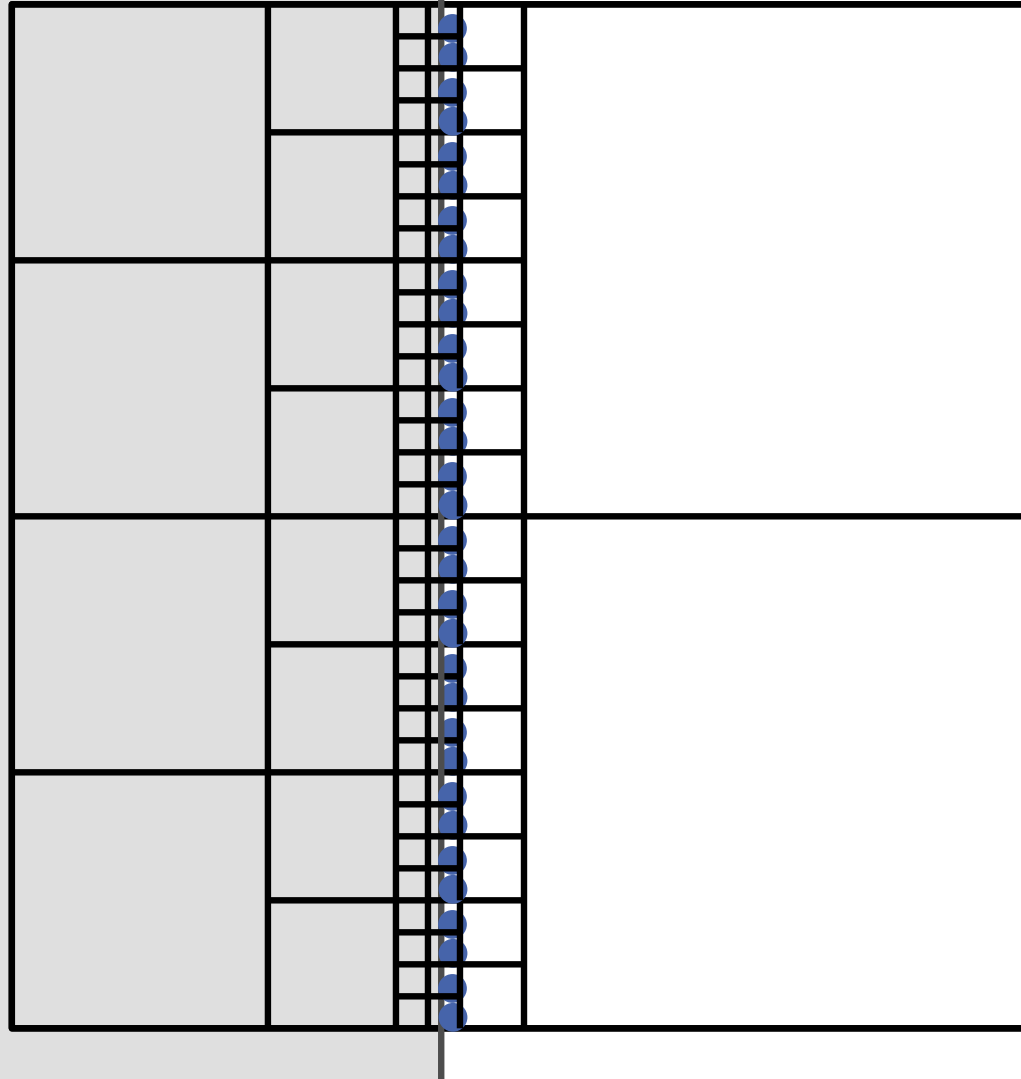
Quadtrees für Range Queries?

- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



Quadtrees für Range Queries?

- Wie kann man Quadtrees für Bereichsanfragen nutzen?



Das war's!

Danke, und das war's!

Nächster und letzter Termin:
Donnertag, 07.07, 10:15 Uhr
Raum 131, Gebäude 50.34