Vorlesung Algorithmische Geometrie

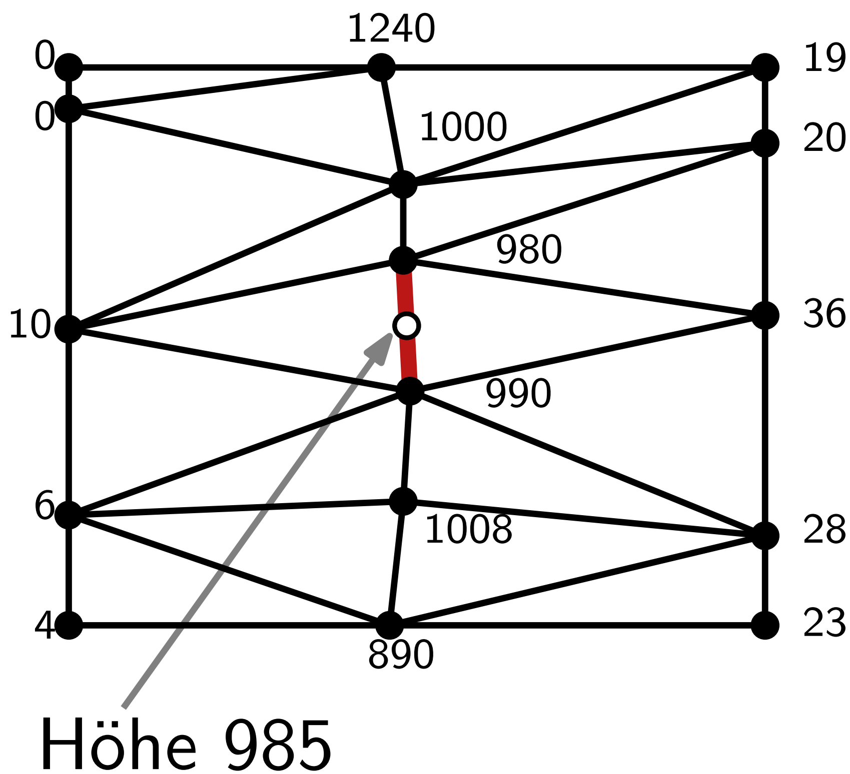
Geradenarrangements und Dualität

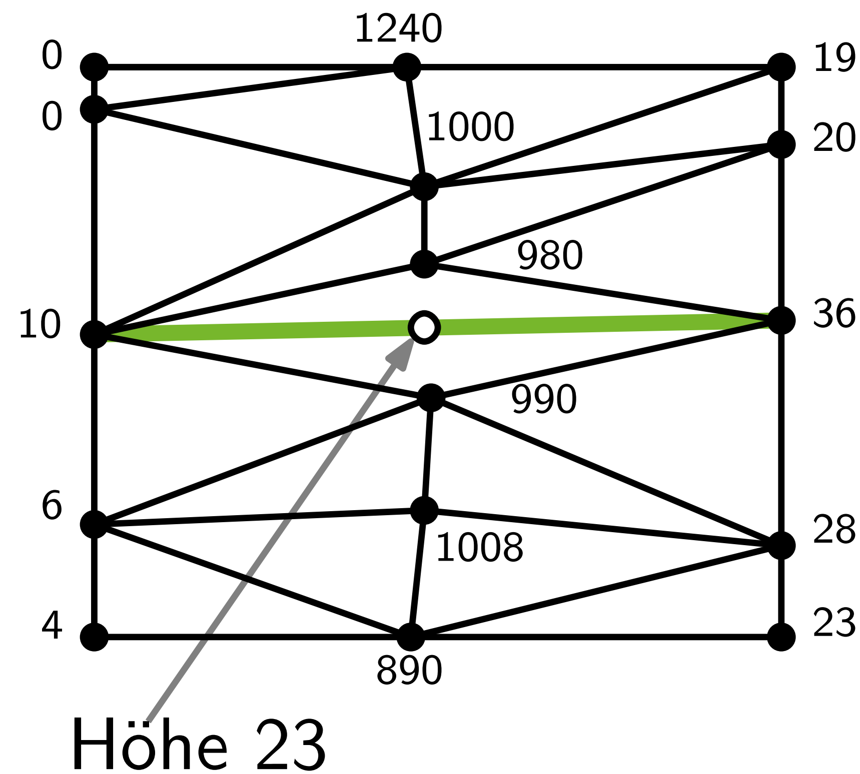
LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK I · INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Martin Nöllenburg

14.06.2011

Erinnerung: Höheninterpolation





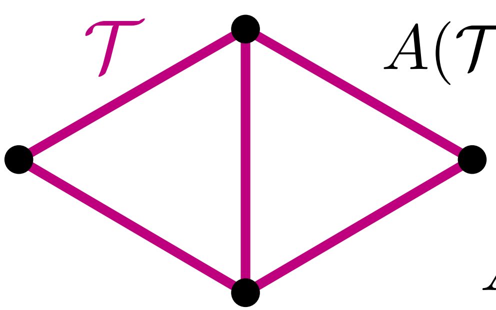
Ziel: Vermeide zu schmale Dreiecke, d.h. maximiere die kleinsten Dreieckswinkel!

Winkeloptimale Triangulierungen

Def.: Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ eine Punktemenge, $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von P und m die Anzahl der Dreiecke. Dann ist $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$ der **Winkelvektor** von $\mathcal{T}$ mit den sortierten Dreieckswinkeln $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{3m}$.

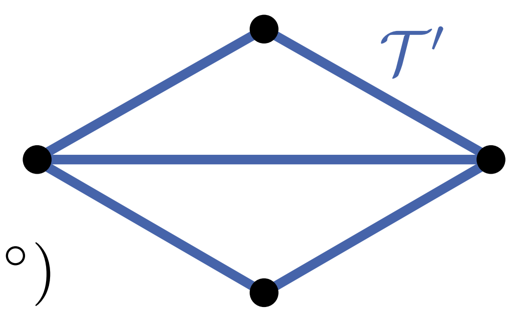
Für zwei Triangulierungen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ von P definiere die Ordnung $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ als lexikographische Ordnung.

$\mathcal{T}$ heißt **winkeloptimal**, falls $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$ für alle Triangulierungen $\mathcal{T}'$ von P.



$$A(\mathcal{T}) = (60°, 60°, 60°, 60°, 60°, 60°)$$

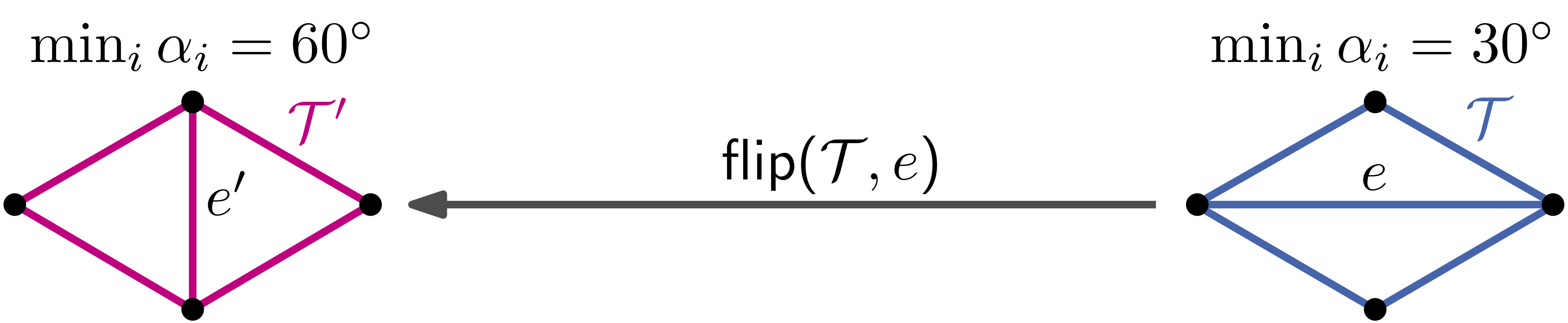
$$A(\mathcal{T}') = (30°, 30°, 30°, 30°, 120°, 120°)$$



Kantenflips

Def.: Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung. Eine Kante e von $\mathcal{T}$ heißt **unzulässig**, wenn der kleinste Winkel der zu e inzidenten Dreiecke durch einen Kantenflip größer wird.

Beob.: Sei e eine unzulässige Kante von $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}' = \text{flip}(\mathcal{T}, e)$. Dann gilt $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.



Zwischenbilanz

Es gilt: Jede winkeloptimale Triangulierung ist zulässig.

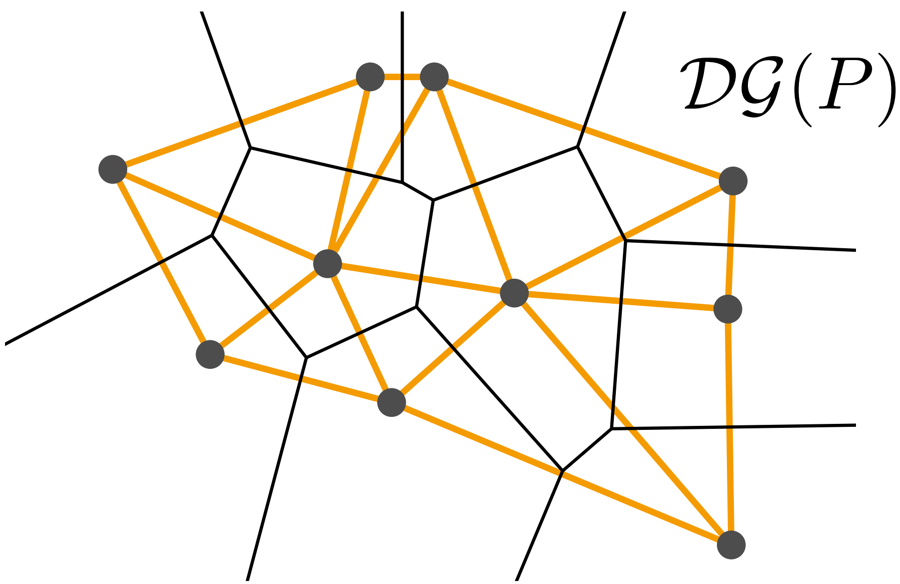
Aber ist jede zulässige Triangulierung auch winkeloptimal?

Die Delaunay-Triangulierung

Sei $\mathrm{Vor}(P)$ das Voronoi-Diagramm einer Punktmenge P.

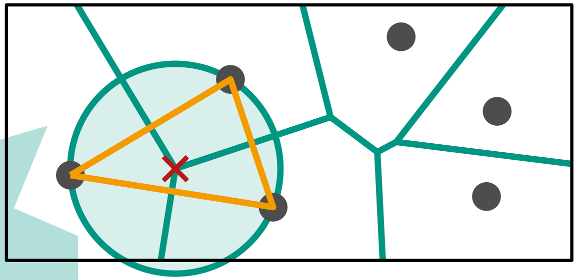
Def.: Der Graph $\mathcal{G} = (P, E)$ mit
$E = \{pq \mid \mathcal{V}(p)$ und $\mathcal{V}(q)$ sind benachbart$\}$
heißt **Dualgraph** von $\mathrm{Vor}(P)$.

Def.: Die geradlinige Zeichnung von $\mathcal{G}$ heißt **Delaunay-Graph** $\mathcal{DG}(P)$.

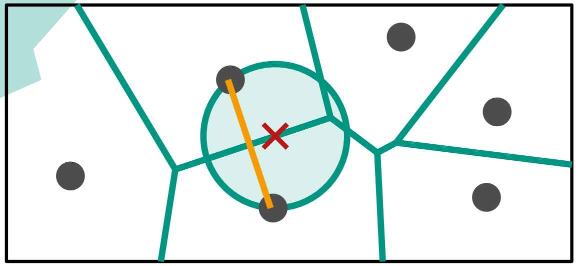


Charakterisierung

Satz über Voronoi-Diagramme:



- Ein Punkt q ist ein Voronoi-Knoten
  $\Leftrightarrow |C_P(q) \cap P| \geq 3$,
- der Bisektor $b(p_i, p_j)$ definiert eine Voronoi-Kante
  $\Leftrightarrow \exists q \in b(p_i, p_j)$ mit $C_P(q) \cap P = \{p_i, p_j\}$.



Satz 4: Sei P eine Menge von Punkten.

- Punkte p, q, r sind Knoten der gleichen Facette in $\mathcal{DG}(P) \Leftrightarrow$ Kreis durch p, q, r ist leer
- Kante pq ist in $\mathcal{DG}(P)$
  $\Leftrightarrow$ es gibt einen leeren Kreis $C_{p,q}$ durch p und q

Satz 5: Sei P Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von P.
$\mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung
$\Leftrightarrow$ Umkreis jedes Dreiecks ist im Inneren leer.

Zulässigkeit und Delaunay-Triangulierungen

Satz 6: Sei P Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von P.
$\mathcal{T}$ ist zulässig $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung.

Beweisskizze:

„$\Leftarrow$“ klar; nutze

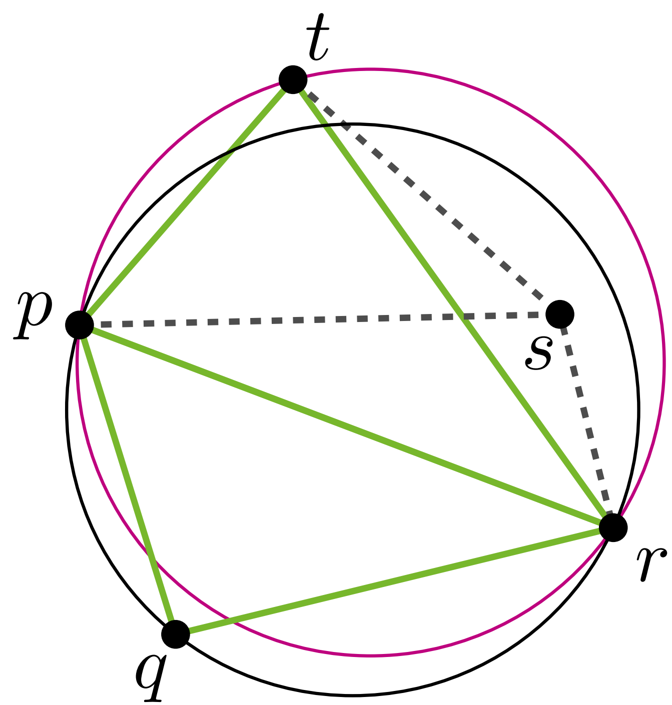
Lemma 1: Seien Δprq und Δpqs zwei Dreiecke in $\mathcal{T}$ und C der Umkreis von Δprq. Dann ist $\overline{pq}$ unzulässig genau dann wenn $s \in \operatorname{int}(C)$.

Zulässigkeit und Delaunay-Triangulierungen

Satz 6: Sei P Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von P.
$\mathcal{T}$ ist zulässig $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung.

Beweisskizze:

„$\Rightarrow$"



Zulässigkeit und Delaunay-Triangulierungen

Satz 6: Sei P Punktmenge und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von P.
$\mathcal{T}$ ist zulässig $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ ist Delaunay-Triangulierung.

Beob.: Ist P in allgemeiner Lage ist $\mathcal{DG}(P)$ eindeutig
$\Rightarrow$ zulässige Triangulierung ist eindeutig
wissen: $\mathcal{T}$ winkeloptimal $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ zulässig
$\Rightarrow$ $\mathcal{DG}(P)$ winkeloptimal!

Ist P *nicht* in allgemeiner Lage, so ist zumindest für *jede* Triangulierung einer „großen" Facette von $\mathcal{DG}(P)$ der *minimale* Winkel gleich (Übung!).

Zusammenfassung

Satz 7: Für n beliebige Punkte kann in $O(n \log n)$ Zeit eine Delaunay-Triangulierung berechnet werden.
(Voronoi-Diag. $+$ Triangulierung „großer“ Facetten)

Korollar: Für n Punkte in allgemeiner Lage kann in $O(n \log n)$ Zeit eine winkeloptimale Triangulierung berechnet werden.
Sind die Punkte nicht in allgemeiner Lage, lässt sich zumindest eine Triangulierung mit maximalem kleinsten Winkel in $O(n \log n)$ Zeit berechnen.

Ausblick: Auch im allgemeinen Fall kann die winkeloptimale Triangulierung in $O(n \log n)$ Zeit berechnet werden.
[Mount, Saalfeld ’88]

Diskussion

Gibt es alternative Ansätze für Triangulierungen zur Höheninterpolation?

Statt der *datenunabhängigen* Delaunay-Triangulierung gibt es auch Ansätze für *datenabhängige* Triangulierungen, die jedoch von $\mathcal{DG}(P)$ ausgehen und dann Kantenflips durchführen. Rippa (1990) zeigte dass $\mathcal{DG}(P)$ die *roughness* unabhängig von den Höheninformationen minimiert.

Hat $\mathcal{DG}(P)$ weitere interessante Eigenschaften?

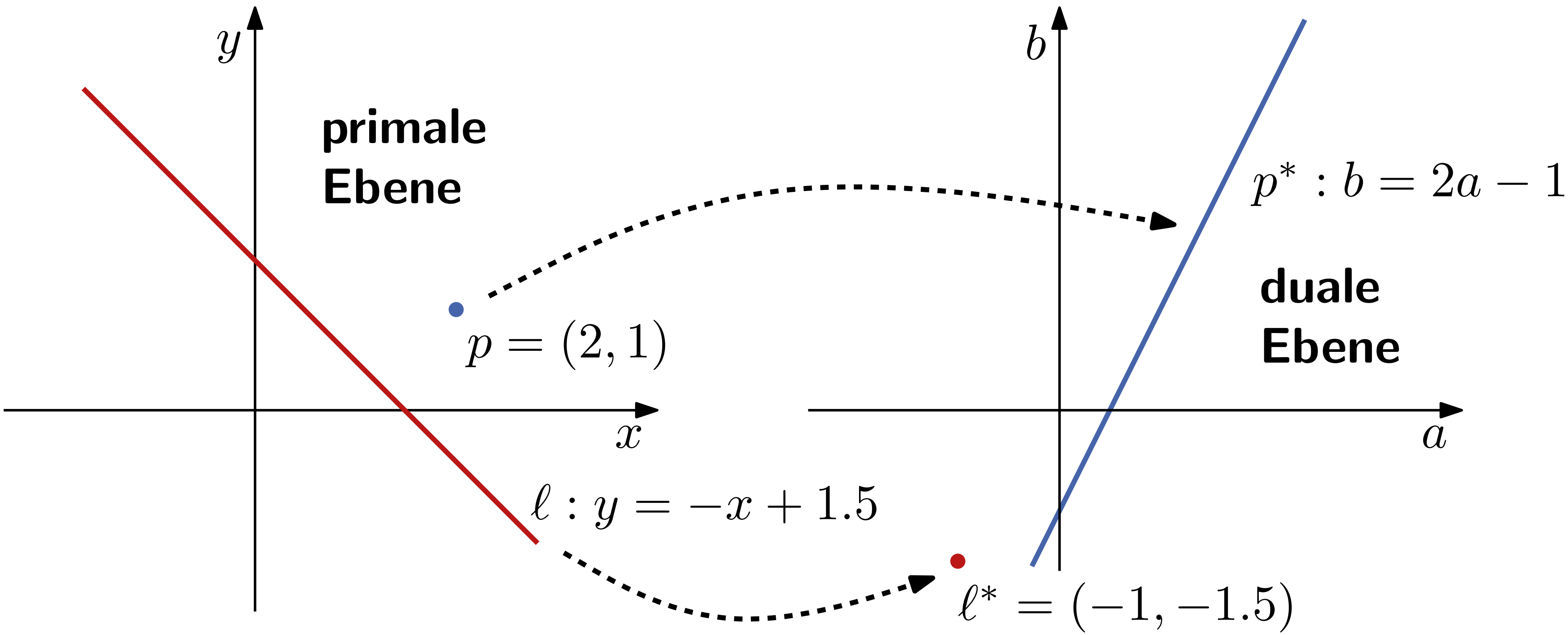
Ja, der Delaunay-Graph enthält die Kanten anderer interessanter Graphen auf P (s. Übungsblatt). Es gilt z.B.

$$\text{EMST}(P) \subseteq \text{Gabriel-Graph}(P) \subseteq \mathcal{DG}(P)$$

Dualität von Punkten und Geraden

Dualitätsabbildung

Beob.: Bisher haben wir Dualität für planare Graphen gesehen. Auch Punkte und Geraden können **dual** zueinander sein.



Def.: Die Dualitätsabbildung $(\cdot)^*$ ist definiert durch

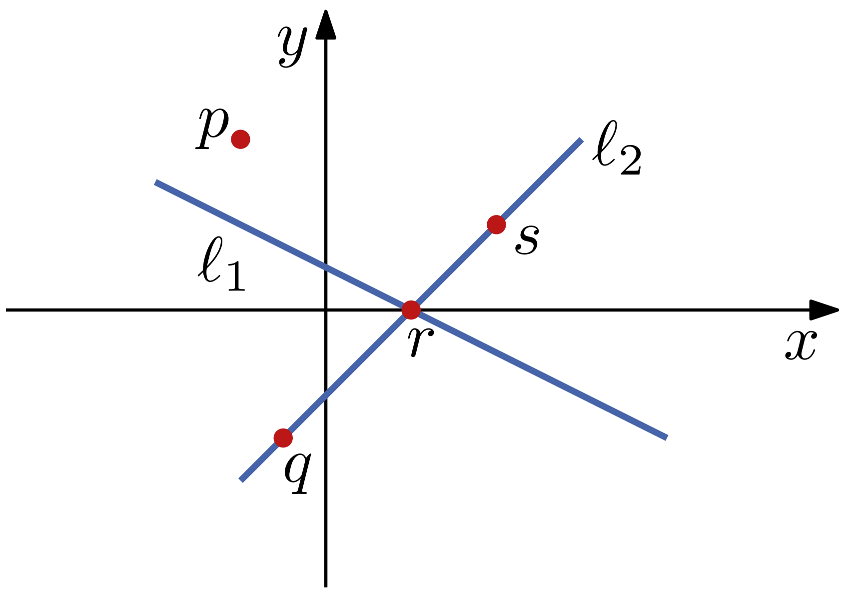
$$p = (p_x, p_y) \quad \mapsto \quad p^* : b = p_x a - p_y$$

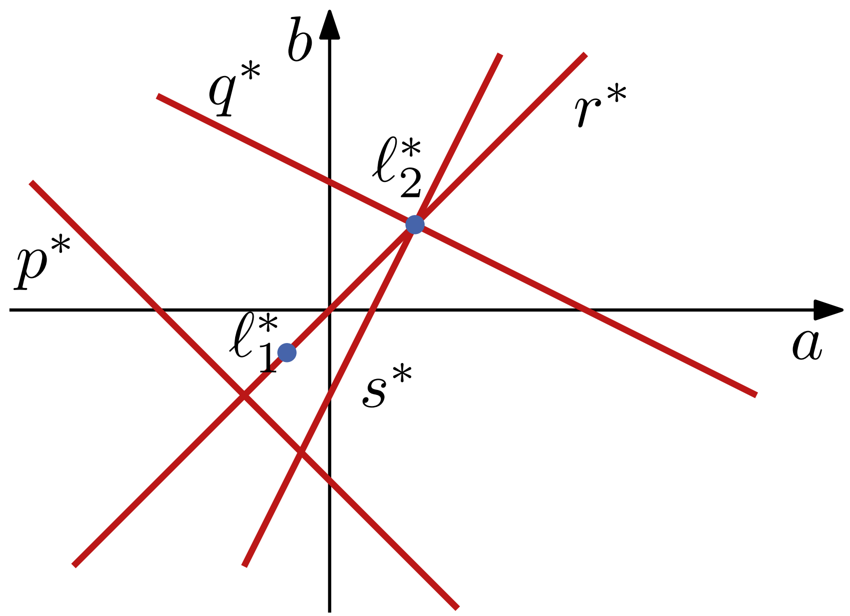
$$\ell : y = mx + c \quad \mapsto \quad \ell^* = (m, -c)$$

Eigenschaften

Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in p
  $\Leftrightarrow p^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
  $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt





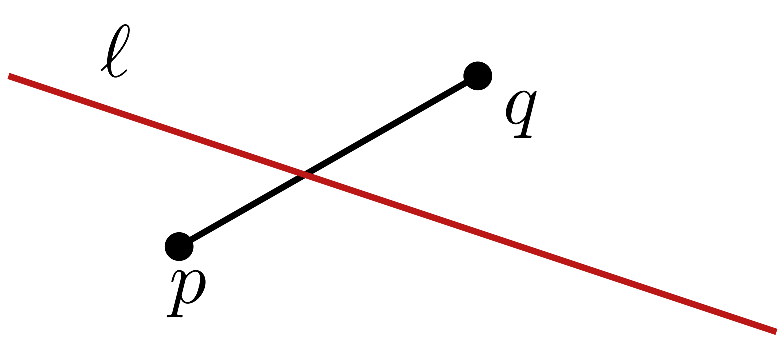
Eigenschaften

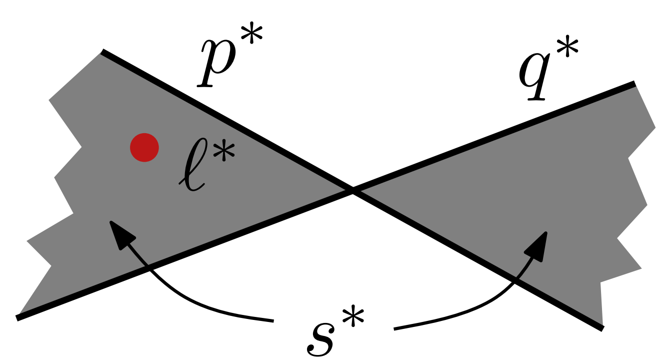
Lemma 1: Es gelten die folgenden Eigenschaften

- $(p^*)^* = p$ und $(\ell^*)^* = \ell$
- p liegt unter/auf/über $\ell \Leftrightarrow p^*$ läuft über/auf/unter ℓ^*
- ℓ_1 und ℓ_2 schneiden sich in p
  $\Leftrightarrow p^*$ geht durch ℓ_1^* und ℓ_2^*
- p_1, p_2, p_3 kollinear
  $\Leftrightarrow p_1^*, p_2^*, p_3^*$ schneiden sich in gemeinsamem Punkt

Wie sieht das duale Objekt zu einer Strecke $s = \overline{pq}$ aus?

Welche duale Beziehung gilt für eine Gerade ℓ, die s schneidet?





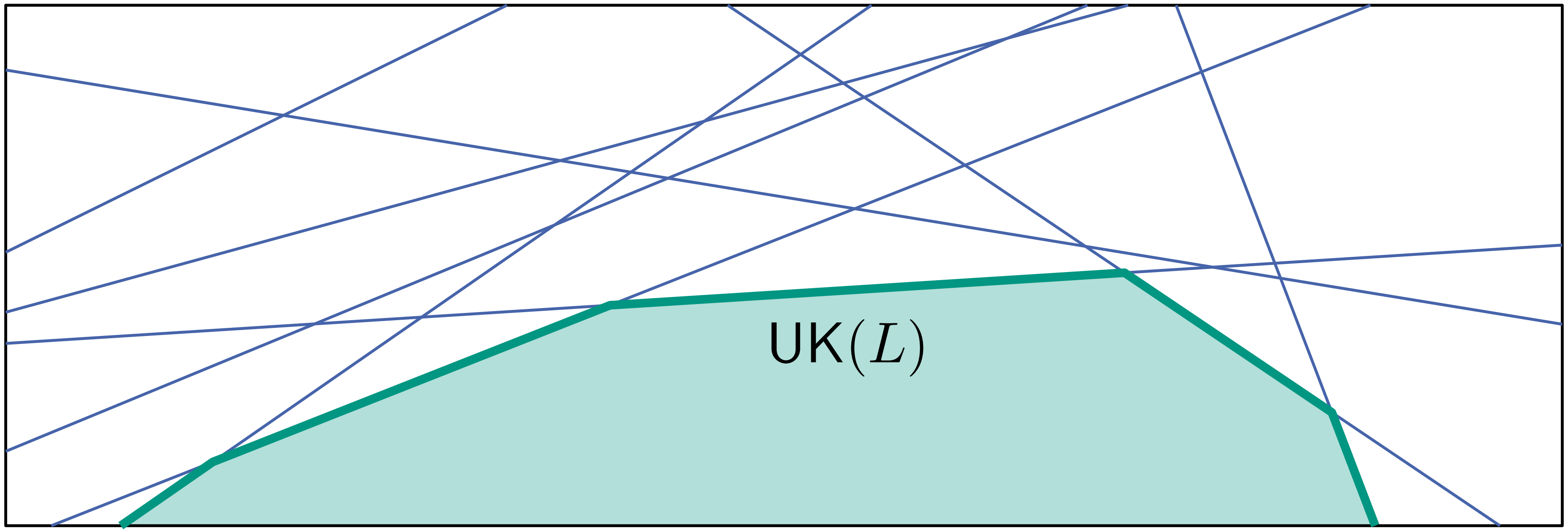
Anwendungen der Dualität

Dualität macht geometrische Probleme weder leichter noch schwerer; sie bietet einen anderen (hilfreichen) Blickwinkel!

Wir werden zwei Beispiele sehen:

- untere/obere Konturen von Geradenarrangements
- kleinstes Dreieck in einer Punktmenge

Untere Kontur

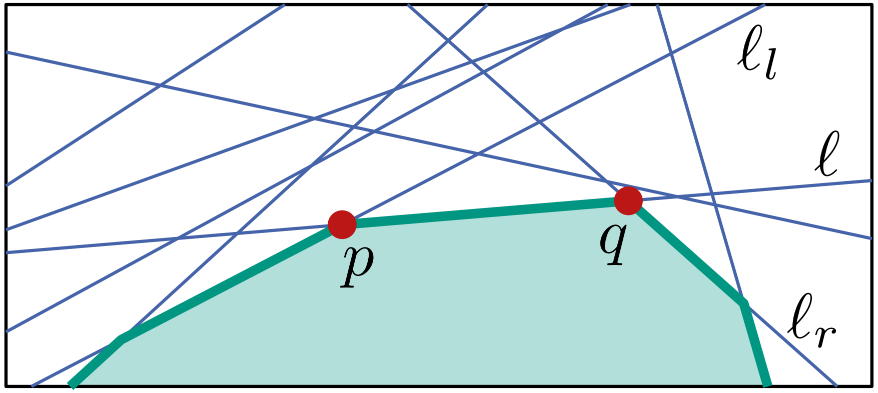


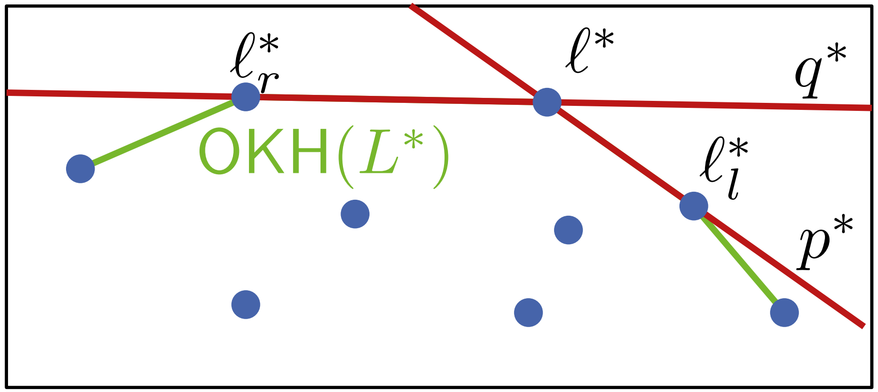
Def.: Für eine Menge L von Geraden ist die untere Kontur UK(L) von L die Menge aller Punkte aus $\cup_{\ell \in L} \ell$, die unterhalb aller Geraden aus L liegen.

Möglichkeiten zur Berechnung der unteren Kontur:

- Algorithmus `IntersectHalfplanes` aus 4. VL
- Betrachte das duale Problem für $L^* = \{\ell^* \mid \ell \in L\}$

Kontur und Dualität





Wann erscheint ℓ als Strecke $\overline{pq}$ auf UK(L)?

- p und q liegen unterhalb aller Geraden in L
- p^* und q^* liegen oberhalb aller Punkte aus L^*
  $\Rightarrow$ liegen benachbart auf oberer konvexer Hülle OKH(L^*)
- Schnittpunkt von p^* und q^* ist ℓ^*, Knoten von OKH(L^*)

Lemma 2: Die Geraden auf UK(L) von links nach rechts entsprechen den Knoten auf OKH(L^*) von rechts nach links.

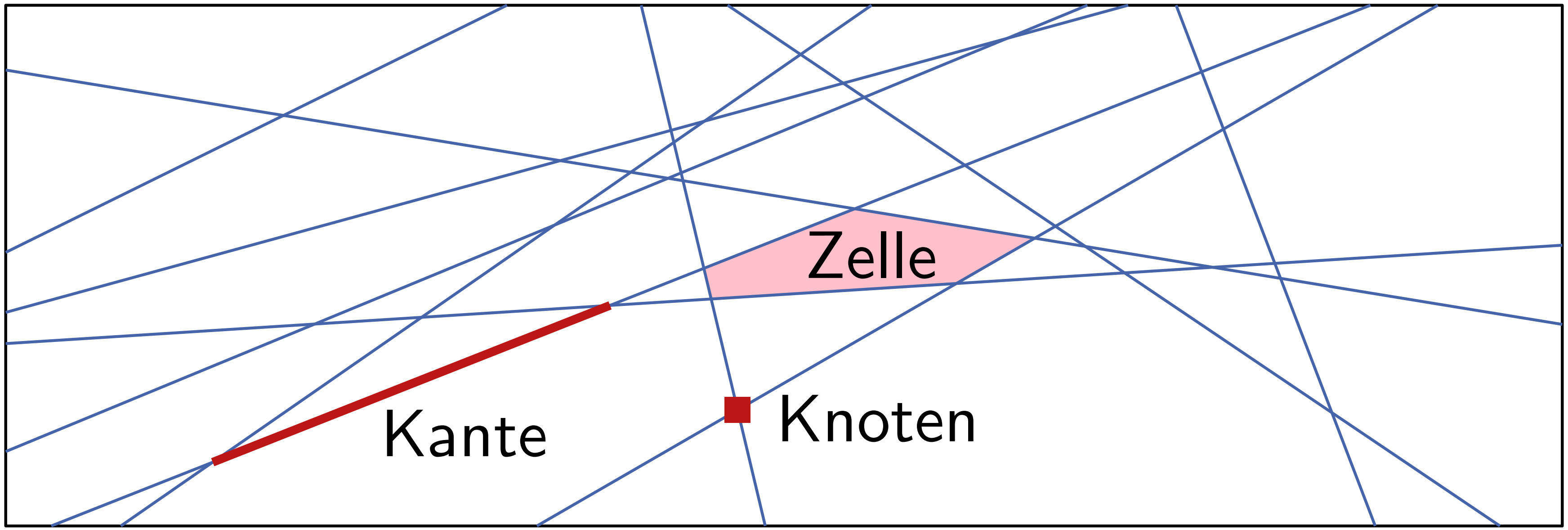
Berechnung der Kontur

- Algorithmus zur Berechnung der oberen konvexen Hülle mit Laufzeit $O(n \log n)$ (s. erste VL zu konvexer Hülle)
- Primale Geraden zu Punkten auf OKH(L^*) in umgekehrter Reihenfolge bilden UK(L)
- Analog: obere Kontur von $L \hat{=}$ untere konvexe Hülle von L^*

Wie lässt sich das nutzen um den Schnitt von n Halbebenen zu berechnen?

- untere Kontur der von oben begrenzenden Geraden
- obere Kontur der von unten begrenzenden Geraden
- Schnitt der beiden konvexen Regionen (s. 4. VL)
- insgesamt $O(n \log n)$ Laufzeit

Geradenarrangements



Def.: Eine Menge L von Geraden definiert eine Unterteilung $\mathcal{A}(L)$ der Ebene (das **Geradenarrangement**) in Knoten, Kanten und Zellen (tlws. unbeschränkt).
$\mathcal{A}(L)$ heißt **einfach**, wenn keine drei Geraden durch einen Punkt gehen und keine zwei Geraden parallel sind.

Komplexität von $\mathcal{A}(L)$

Die kombinatorische Komplexität von $\mathcal{A}(L)$ ist die Zahl der Knoten, Kanten und Zellen. Es gilt:

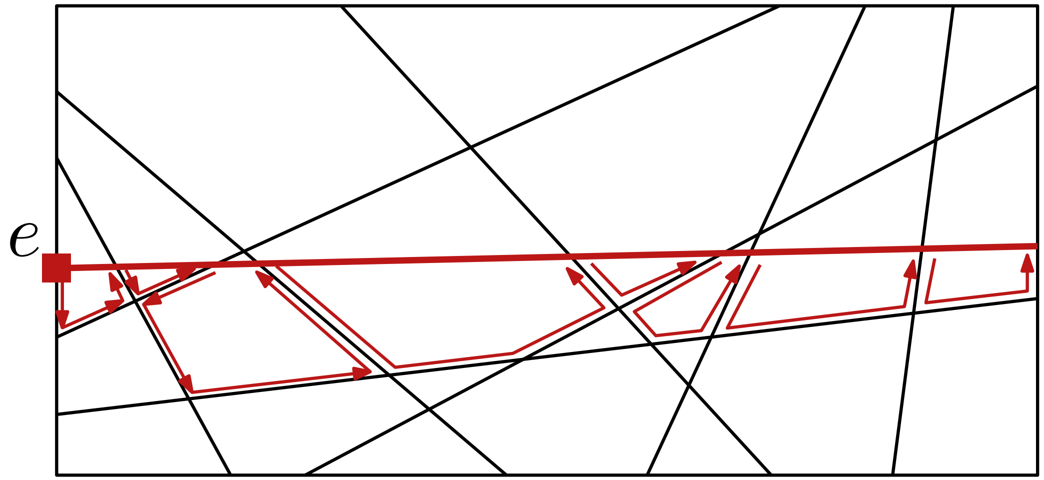
Satz 1: Sei $\mathcal{A}(L)$ ein einfaches Arrangement von n Geraden. Dann hat $\mathcal{A}(L)$ $\binom{n}{2}$ Knoten, n^2 Kanten und $\binom{n}{2} + n + 1$ Zellen.

Datenstruktur für $\mathcal{A}(L)$:

- füge bounding box aller Knoten hinzu (s. Übung) $\rightarrow$ planar eingebetteter Graph G
- doppelt-verkettete Kantenliste für G

Konstruktion von $\mathcal{A}(L)$

Input: Geraden $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$
Output: DCEL $\mathcal{D}$ für $\mathcal{A}(L)$
initialisiere $\mathcal{D}$ für bounding box B der Knoten von $\mathcal{A}(L)$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  finde linkesten Schnittpunkt von ℓ_i mit Kante e von B
  $f \leftarrow$ innere Zelle inzident zu e
  while $f \neq$ äußere Zelle **do**
    zerteile f, update $\mathcal{D}$ und setze f auf nächste Zelle

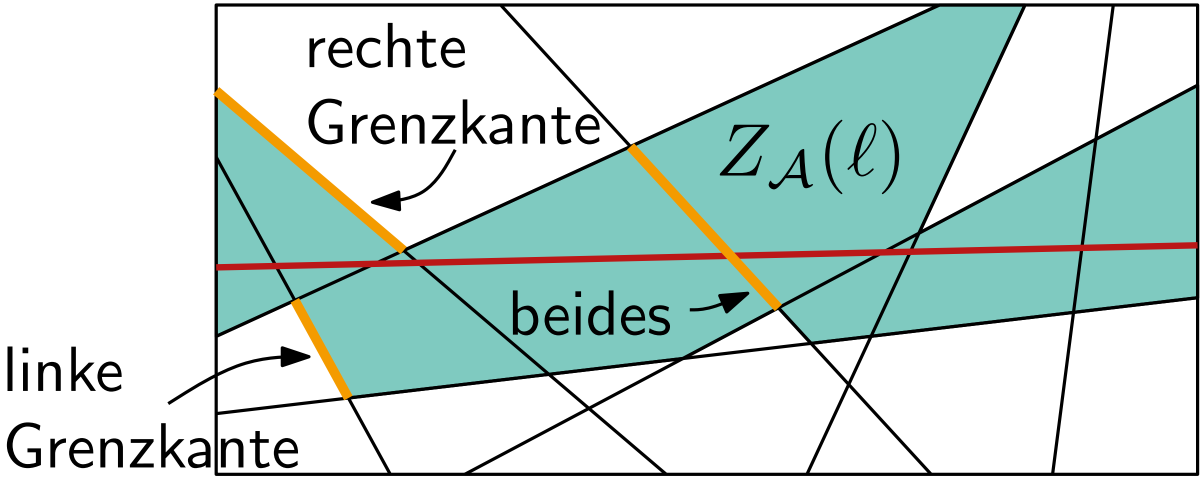


Laufzeit?

- bounding box: $O(n^2)$
- Startpunkt ℓ_i: $O(i)$
- **while**-Schleife: $O(|\text{roter Pfad}|)$

Zonensatz

Def.: Für ein Arrangement $\mathcal{A}(L)$ und eine Gerade $\ell \notin L$ ist die **Zone** $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ die Menge aller Zellen von $\mathcal{A}(L)$, deren Abschluss ℓ schneidet.



Wie viele Zellen enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

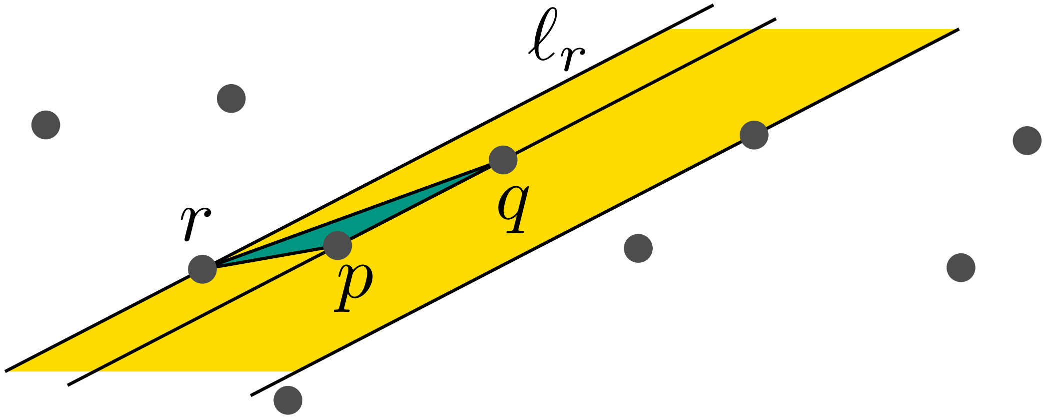
Wie viele Kanten enthält $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$?

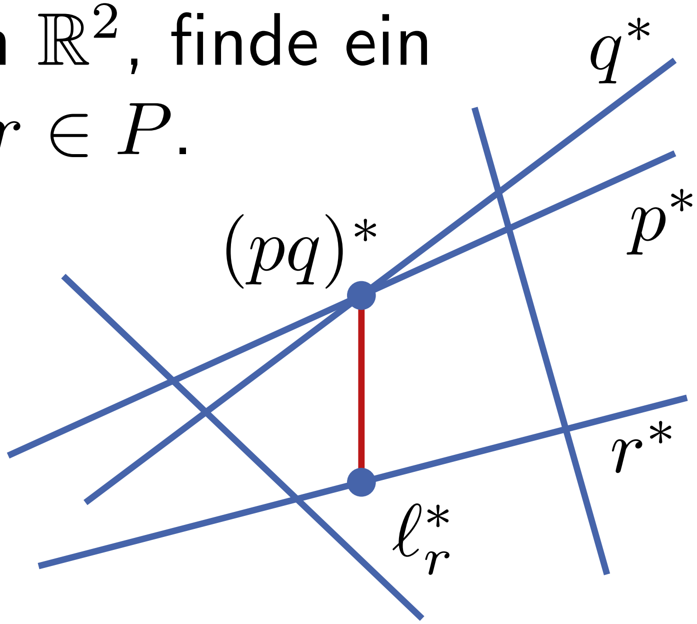
Satz 2: Für ein einfaches Arrangement $\mathcal{A}(L)$ von n Geraden in der Ebene und eine Gerade $\ell \notin L$ besteht $Z_{\mathcal{A}}(\ell)$ aus höchstens $6n$ Kanten.

Satz 3: Das Arrangement $\mathcal{A}(L)$ einer Menge von n Geraden kann in $O(n^2)$ Zeit und Platz konstruiert werden.

Kleinstes Dreieck

Gegeben eine Menge P von n Punkten in $\mathbb{R}^2$, finde ein flächenminimales Dreieck Δpqr mit $p, q, r \in P$.



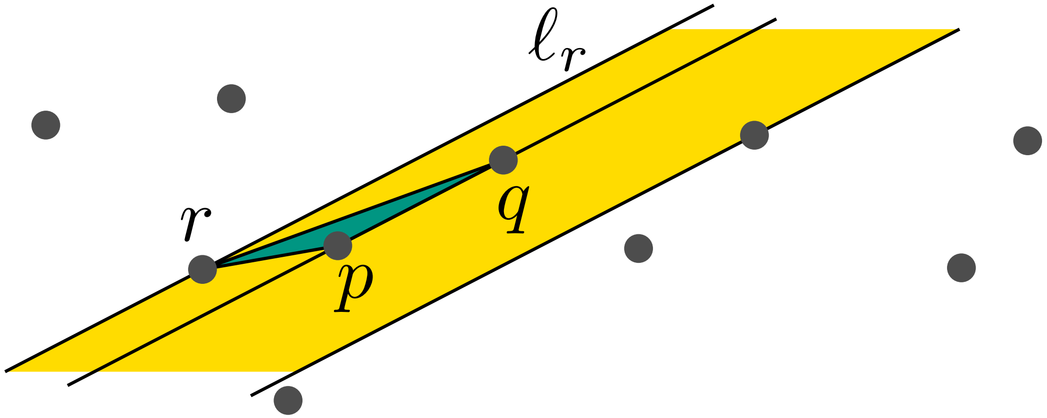


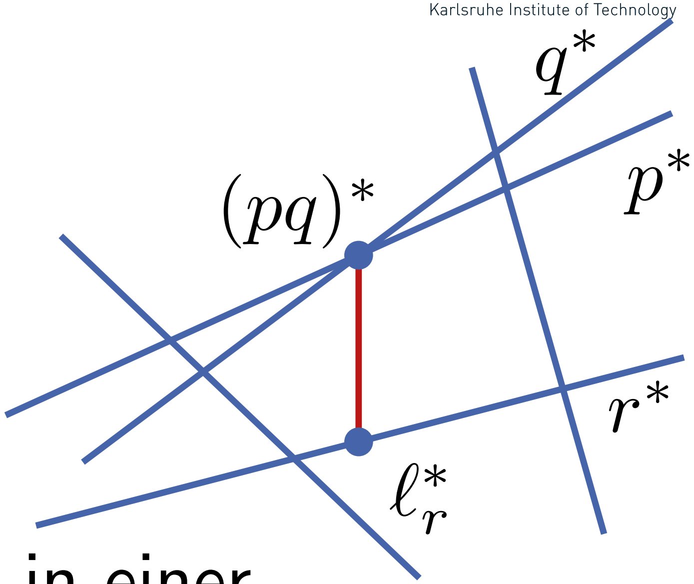
Seien $p, q \in P$. Der Punkt $r \in P \setminus \{p, q\}$, der Δpqr minimiert, liegt auf dem Rand des größten leeren Korridors entlang pq.

Zwischen pq und der Geraden ℓ_r durch r parallel zu pq liegt kein weiterer Punkt aus P.

Im Dualen:
- ℓ_r^* liegt auf r^*
- ℓ_r^* und $(pq)^*$ haben gleiche x-Koordinate
- keine Gerade $p^* \in P^*$ schneidet $\overline{\ell_r^*(pq)^*}$

Berechnung im Dualen





- ℓ_r^* liegt vertikal über oder unter $(pq)^*$ in einer gemeinsamen Zelle von $\mathcal{A}(P^*)$ $\Rightarrow$ nur zwei Kandidaten
- Berechne in $O(n^2)$ Zeit das Arrangement $\mathcal{A}(P^*)$
- Berechne in jeder Zelle die vertikalen Nachbarn der Knoten $\rightarrow$ Zeit linear in Zellenkomplexität wie?
- für alle $O(n^2)$ Kandidaten-Tripel $(pq)^*r^*$ berechne in $O(1)$ Zeit Fläche Δpqr
- findet Minimum in insgesamt $O(n^2)$ Zeit

Diskussion

Dualität ist ein sehr nützliches Werkzeug in der algorithmischen Geometrie!

Kann man die Dualität auch in höheren Dimensionen nutzen?

Ja, auch zwischen d-dimensionalen Punkten und Hyperebenen gibt es eine entsprechende inzidenz- und ordnungserhaltende Dualitätsabbildung.

Wie steht es um höherdimensionale Arrangements?

Das Arrangement von n Hyperebenen im $\mathbb{R}^d$ hat Komplexität $\Theta(n^d)$. Eine Verallgemeinerung des Zonensatzes führt zu einem $O(n^d)$-Zeit Algorithmus.