Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Betreuer:
Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Dorothea Wagner
Betreuer:
Dipl.-Inform. Ignaz Rutter,
Dipl.-Inform. Dipl.-Math. Tanja Hartmann

Seminar im Sommersemester 2011 – Expandergraphen

1. **Expandergraphen – verschiedene kombinatorische Definitionen und ein Existenzbeweis**
   Literatur: [Lub94] Kapitel 1 [HLW06] Kapitel 1.1.1, 1.2, 1.3.1 und 2.1 (bis Definition 2.2), [Die06] Satz 1.1.2

   Verschiedene kombinatorische Definitionen von Expandergraphen und ein Existenzbeweis. Definition von Matching und das Hochzeitslemma. Magische Graphen und wie man aus ihnen Superkonzentratoren macht.

   Bemerkung: Es soll die Notation aus [HLW06] verwendet werden, die leicht von der in [Lub94] abweicht.

2. **Spektraltheorie**
   Literatur: [HLW06] Kapitel 2.3, 2.4, 4.3.1, 4.5, 2.6.5, [GR01] Kapitel 8.7, 8.8

   Der Satz von Perron-Frobenius. Grapheigenschaften aus der Adjazenzmatrix ablesen. Das Expander Mixing Lemma (der betragsmäßig zweitgrößte Eigenwert zeigt, wie zufällig die Kantenverteilung in einem Graphen ist) und ein Theorem zum Vergleich der spektralen Lücke und der Cheeger Konstante. Das Theorem zeigt, dass die Expandereigenschaft auch mit Hilfe der spektralen Lücke definiert werden kann.

3. **Extremwerte der Expanderkonstanten**
   Literatur: [HLW06] Kapitel 4.1, 4.2, Kapitel 5, ohne 5.3, eventuell [Alt06] Kapitel 0.20, 3, 9

   Die klassische isoperimetrische Ungleichung und sphärische Funktionen. Der unendliche reguläre Baum und seine Eigenwerte. Abschätzungen für den zweitgrößten Eigenwert.

4. **Margulis Expandergraphen**
   Literatur: [HLW06] Kapitel 8, [Kü] S.33-35 , [HLW06] Kapitel 11.1 (Aussagen über Charaktere von Gruppen)

   Charaktere von Gruppen und Margulis erste explizite Konstruktion einer Familie von Expandergraphen.

5. **Probabilistische Algorithmen und Zufallsbewegungen auf Graphen**
   Literatur: [HLW06] Kapitel 1.1.3, 1.3.3, 2.1, (2.2), 3.1 , [Lov93] S.14/15

   Probabilistische Primzahltests und die Klasse RP. Mit magischen Graphen lässt sich die Anzahl der benötigten Zufallsbits zum Verbessern von probabilistischen Algorithmen verringern. Dazu ist eine effiziente Beschreibung der Graphen notwendig.
   Falls G nicht bipartit ist, so konvergiert jede Zufallsbewegung auf G gegen eine eindeutige Grenzverteilung. In Expandergraphen konvergiert die Verteilung besonders schnell. Entropie von Zufallsbewegungen.

6. **Zufallsbewegungen, probabilistische Algorithmen und Max-Clique**
Literatur: [HLW06] Kapitel 3.2, 3.3, [AFWZ95] vor allem Abschnitt 4, [Wor10] Kapitel 4.2, 4.3

   Die Chernoff-Ungleichung. Zufallsbewegungen entsprechen in etwa dem unabhängigen Ziehen von Knoten. Effiziente Fehlerreduktion von probabilistischen Algorithmen und ein Komplexitätsresultat zur Approximierbarkeit von Max-Clique.

7. **Dieser Vortrag ist noch ungewiss**

   Hier beschäftigen wir uns vielleicht mit einem Approximationsalgorithmus zur Berechnungen der Cheeger Konstante, einer der Expanderkonstanten aus Vortrag 1. Oder wir lernen ein Sortiernetzwerk mit nur $O(n \log n)$ Vergleichen kennen. Oder aber wir machen etwas anderes aus dem Bereich der Informatik.

8. **Ramanujan Graphen und das Spektrum zufälliger Graphen**
Literatur: [HLW06] Kapitel 5.3, 6, 7

   Einführung von Ramanujan Graphen. Überlagerungen von Graphen. Die erwartete Größe des zweitgrößten Eigenwerts in einem zufälligen Graphen.

9. **Das Zick-Zack-Produkt**
Literatur: [HLW06] Kapitel 9, eventuell [Rei05]

   Einführung des Zick-Zack-Produkts und seiner wichtigsten Eigenschaften. Konstruktionsvorschrift für einer Expanderfamilie. Beweis von SL = L.

10. **Verlustfreie Leiter und verlustfreie Expandergraphen**
Literatur: [HLW06] Kapitel 10

    Wir untersuchen die Entropie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Graphen und wollen Graphen konstruieren, bei denen die Entropie fast den ganzen Zufall aufnimmt, den man in einem Schritt einer Zufallsbewegung in das System einbringt. Dazu führen wir verlustfreie Leiter ein und konstruieren verlustfreie Expander mit Hilfe einer Erweiterung des Zick-Zack-Produkts.

11. **Cayley-Graphen**
Literatur: [HLW06] Kapitel 11

    Definition von Cayley-Graphen. Zusammenhang zwischen dem Zick-Zack-Produkt und dem semidirekten Produkt von Gruppen. Konstruktion einer Familie von Cayley-Expandergraphen.

12. **Fehlerkorrigierende Codes**
Literatur: [HLW06] Kapitel 1.1.2, 1.3.2, 12

    Einführung in fehlerkorrigierende Codes, lineare Codes und LPDC-Codes. Konstruktion von effizienten, asymptotisch guten Codes aus verlustfreien Expandergraphen.

Die unten aufgeführten Zeitschriftenartikel sind alle aus dem KIT-Netz online verfügbar und auch die Bücher sind fast alle über die KIT-Bibliothek online auffindbar. Wenn ihr die Artikel oder Bücher von Zuhause aus herunterladen wollt, dann könnt ihr das machen indem ihr z.B. mit Hilfe von `https://vpn.kit.edu` einen VPN-Tunnel über die Uni aufbaut.

Literatur

[AFWZ95] Noga Alon, Uriel Feige, Avi Wigderson, and David Zuckerman, *Derandomized graph products*, Computational Complexity **5** (1995), 60–75.

[Alt06] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, 2006, aus dem KIT-Netz online erhältlich.

[Die06] R. Diestel, *Graphentheorie*, Springer-Verlage, 2006, gibt es online.

[GR01] Chris Godsil and Gordon Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag, 2001.

[HLW06] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bulletin of the AMS **43** (2006), 439–561.

[Kü] Stefan Kühnlein, *Vorlesungsskript: Funktionentheorie 2*.

[Lov93] L. Lovász, *Random walks on graphs: A survey*, Combinatorics, Paul Erdős is Eighty **2** (1993), 353–397.

[Lub94] Alexander Lubotzky, *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*, Birkhäuser, 1994, aus dem KIT-Netz online erhältlich.

[Rei05] Omer Reingold, *Undirected st-connectivity in log-space*, In Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 2005, pp. 376–385.

[Wor10] Thomas Worsch, *Vorlesungsskript: Randomisierte Algorithmen*, `http://liinwww.ira.uka.de/~thw/vl-rand-alg/`, 2010.