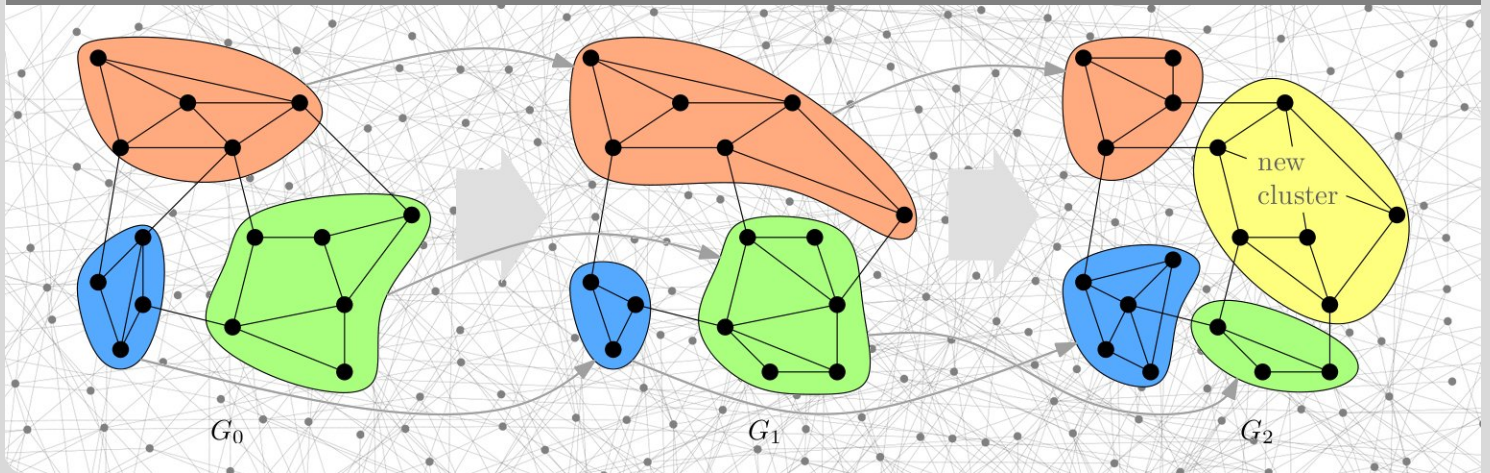


# Spektraltheorie

Expandergraphen – Seminar im SS11

Robert Görke | Sommer 2011

KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY – INSTITUTE OF THEORETICAL INFORMATICS

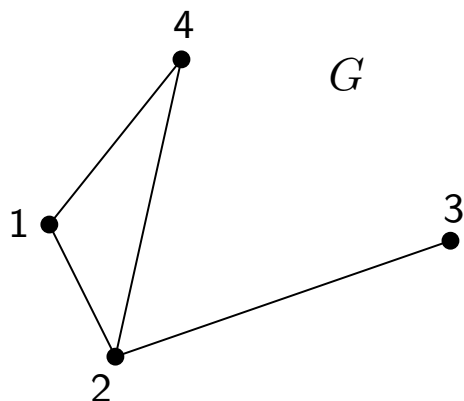
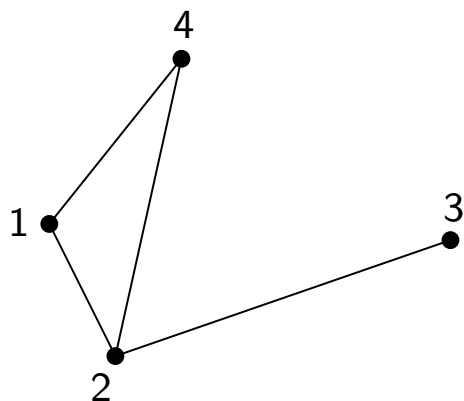


KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und  
nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft

[www.kit.edu](http://www.kit.edu)

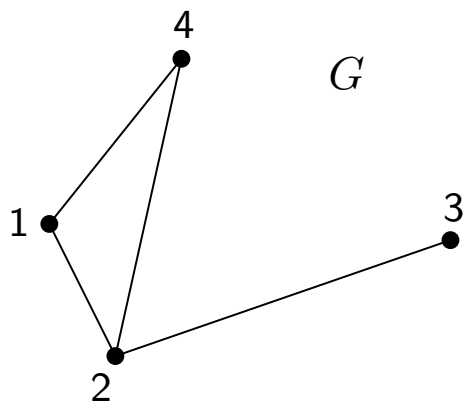
## Structure

- 1 Matrizen eines Graphen
- 2 Adjazenzmatrix
- 3 Laplacematrix
- 4 Die Spektrale Lücke
- 5 Das Expander Mixing Lemma
- 6 Perron-Frobenius
- 7 Ende



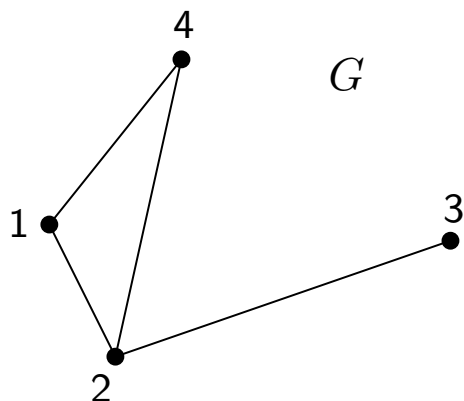
$G$

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

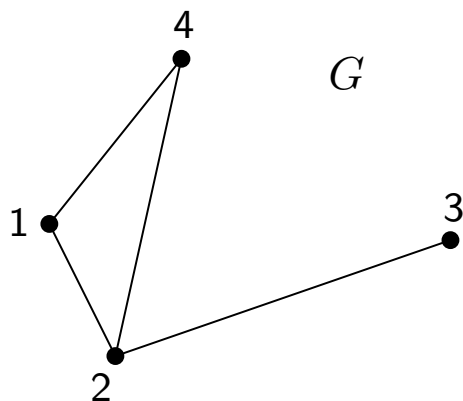
$$A^3 : (A^3)_{ii} =$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 : (A^3)_{ii} =$$

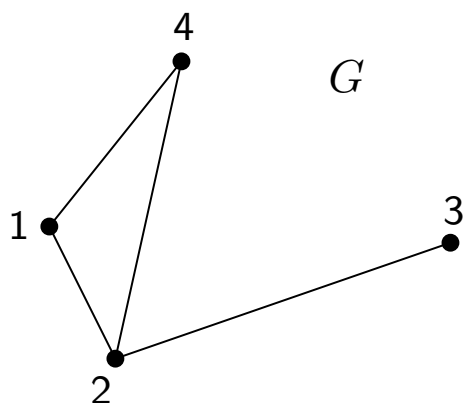
$$|\{\pi : |\pi| = 3, \pi = (v_i, \dots, v_i)\}|$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 : (A^3)_{ii} = |\{\pi : |\pi| = 3, \pi = (v_i, \dots, v_i)\}|$$

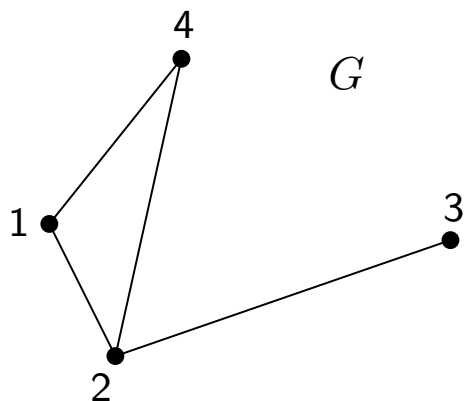
$$\sum_i (A^3)_{ii} = \text{tr}(A^3) = 6 \cdot \#\Delta$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

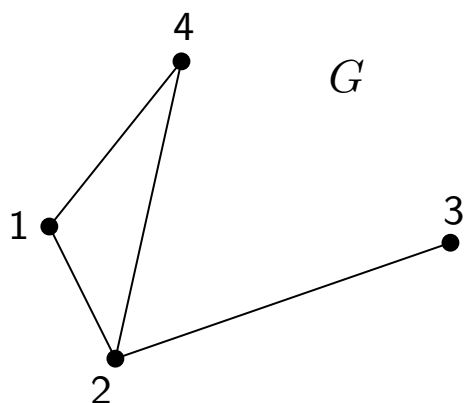
$$A^2 : (A^2)_{ii} = |\{\pi : |\pi| = 2, \pi = (v_i, \dots, v_i)\}|$$

$$\sum_i (A^2)_{ii} = \text{tr}(A^2) = 2 \cdot m$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

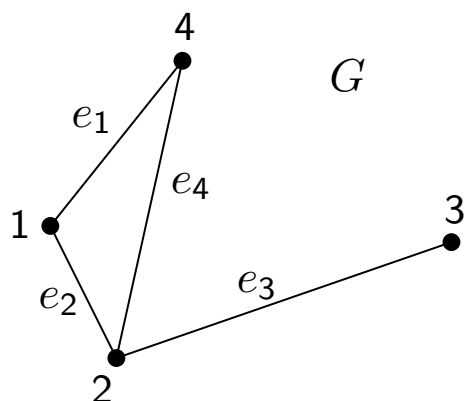
$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D(G) - A(G)$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D(G) - A(G)$$

ordne  $V$  (strikt, total, egal)  $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

ordne  $V$  (strikt, total, egal)  $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

$$\sigma: \{(v, w) : \{v, w\} \in E\} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \sigma((v, w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

ordne  $V$  (strikt, total, egal)  $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

$$\sigma: \{(v, w) : \{v, w\} \in E\} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \sigma((v, w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

Gerichtete Inzidenzmatrix  $K(G^\sigma)$

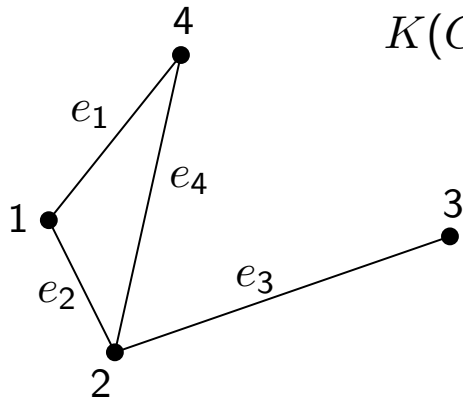
$$K(G^\sigma)_{v,e} = \begin{cases} \sigma((v, w)) & e = \{v, w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ordne  $V$  (strikt, total, egal)  $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

$$\sigma: \{(v, w) : \{v, w\} \in E\} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \sigma((v, w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

Gerichtete Inzidenzmatrix  $K(G^\sigma)$

$$K(G^\sigma)_{v,e} = \begin{cases} \sigma((v, w)) & e = \{v, w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$K(G^\sigma) = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



$$K = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array} \quad K^T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$K = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array} \quad K^T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$(KK^T)_{ij} =$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(KK^T)_{ij} = \begin{cases} -1 & i \neq j, i \sim j \\ 0 & i \neq j, i \not\sim j \\ \deg(v_i) & i = j \end{cases}$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A \\ \Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K)$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A \\ \Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K) = n - \dim(\text{kern}(K))$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 KK^T &= L = D - A \\
 \Rightarrow \text{rang}(L) &= \text{rang}(K) = n - \dim(\text{kern}(K)) \underbrace{=}_{\text{zsh.}} n - 1
 \end{aligned}$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 KK^T &= L = D - A \\
 \Rightarrow \text{rang}(L) &= \text{rang}(K) = n - \dim(\text{kern}(K)) \underbrace{=}_{\text{zsh.}} n - 1
 \end{aligned}$$

$$\dim(\text{Lösungsraum von } L \cdot x = 0) = \dim(\text{kern}(L)) = 1$$

$$K = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad K^T = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$KK^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K) = n - \dim(\text{kern}(K)) \underset{\text{zsh.}}{=} n - 1$$

$$\dim(\text{Lösungsraum von } L \cdot x = 0) = \dim(\text{kern}(L)) = 1$$

allgemeiner:  $k > 1$  Zsg.-Komponenten:  $1 \rightsquigarrow k$

$$\text{Lösungsraum} = \text{span}(\{\mathbf{1}_{v_i \in H_\ell} \mid \ell = 1 \dots k\})$$

## Adjazenzmatrix $d$ -regulärer Graphen

- $A$  symmetrisch, reell  $\Rightarrow$  EW reell
- EW & EV & Eigenpaare:
 
$$\begin{matrix} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \dots & \geq & \lambda_n \\ v_1 & , & v_2 & , & \dots & , & v_n \end{matrix} \quad (\text{orthonormales System})$$
- nette Eigenschaften ablesbar:
  - $\lambda_1 = d, v_1 = \mathbf{1}/\sqrt{n}$
  - zusammenhängend  $\Leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2$
  - bipartit  $\Leftrightarrow \lambda_1 > -\lambda_n$
  - $\lambda_2$  hängt eng mit Expansion zusammen!

# Laplacematrix von ( $d$ -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung:  $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

**Beispiel:**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei Temperaturverteilung im Raum

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$\hat{=}$  Veränderung der Temp. als Vektorfeld

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \nabla \cdot \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

$\hat{=}$  "Quellenhaftigkeit" / Fluss durch Kugeloberfläche um Punkt

**Analogon auf Graphen:**  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  Knotenbewertung

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = fK \rightsquigarrow (fK)_{(u,v)} = f_u - f_v$$

$\hat{=}$  Veränderung der Knotenbewertung, auf Kanten notiert

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = K(\operatorname{grad}(f)) \rightsquigarrow K(\operatorname{grad}(f))_u = \sum_{e \text{ raus aus } u} \operatorname{grad}(f)_e - \sum_{e \text{ rein nach } u} \operatorname{grad}(f)_e = df_u - \sum_{v \sim u} f_v$$

$\hat{=}$  Quellenhaftigkeit von Knoten

(Exaktheit mit Füßen getreten)

# Laplacematrix: Beobachtungen

- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\operatorname{spectrum}(L)$  ist in  $[0, 2d]$

**Exkurs:** Layoutproblem

Knoten sollen nah bei Nachbarn liegen, minimaler quadratischer Fehler!

$G$  zsh.  $\Rightarrow \operatorname{kern}(L) = \operatorname{span}(\mathbf{1}) \Rightarrow$  eindeutige Lösung trivial :-)

**Lösung:** suche  $v$  mit  $v \perp \mathbf{1}$  und  $\|v\| = 1$ , so dass  $vLv^T = \text{minimal}$

$$\Rightarrow \text{Rayleigh-Ritz} \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T L(G) x}{x^T x} = \lambda_{n-i}$$

$$x \perp \operatorname{span}(v_n, \dots, v_{n-i+1})$$

$\Rightarrow$  nutze  $v_{n-1}$  und  $v_{n-2}$  in 2D Oder andere? [Animation!](#)

$$d - \lambda_2 \approx \text{Expansion!}$$

Erinnerung: (edge-)expansion(ratio)( $G$ ) =  $h(G) := \min_{\{S \subset V \mid |S| \leq \frac{n}{2}\}} \frac{|\delta S|}{|S|}$   
 (Analogon zur Cheeger-Konstante in Riemannscher Geometrie)

## Theorem (Doziuk'84, Alon-Milman'85, Alon'86)

$G$  endlich, zusammenh.,  $d$ -regulär, dann:

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

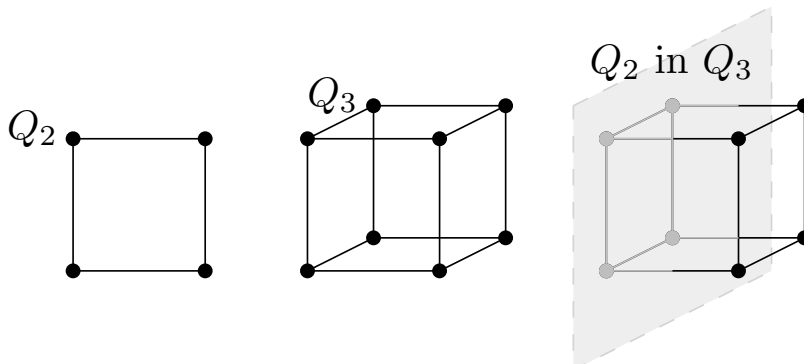
Analogon: Sei  $M$  kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\lambda$  der kleinste EW seines Laplaceoperators, dann:  
 $\lambda \geq h^2/4$

## Schärfe der Abschätzung I

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

**untere Schranke:**  $\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G)$

Betrachte Hyperwürfel  $Q_d$ :



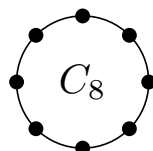
- $h(G) = 1$  ( $Q_{d-1}$  in  $Q_d$ )
- $EW = 3, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -3$
- $d - \lambda_2 = 2$

↪ scharf

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

**obere Schranke:**  $h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$

Betrachte  $n$ -Zykel  $C_n$ :



- $h(C_n) = \frac{4}{n}$
- $d - \lambda_2 = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$

↪ scharf

## Lücke Groß $\Rightarrow$ Expansion Groß

(Beweis Abschätzung  $h$  vs. Spektrale Lücke, untere Schranke:

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 \geq d - 2h(G) )$$

**Idee:** geeigneten Vektor  $f$  nahe  $v_2$  ausdenken!

Forderungen:  $f \perp \mathbf{1}$  und  $f$  hat ausreichend großen Rayleigh-Quotienten

$$\rightsquigarrow \lambda_2 \underset{\text{Satz v. Ray.-R.}}{\geq} \frac{fAf^T}{\|f\|^2} \underset{\text{z.z.}}{\geq} d - 2h(G)$$

**Wahl von  $f$ :**

Sei  $S \subseteq V$   $h(G)$ -scharf (i.e.,  $h(G) = \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|}$ ,  $|S| \leq n/2$ )

Setze  $f = |\bar{S}|1_S - |S|1_{\bar{S}}$

$$\text{liefert: } \rightsquigarrow \lambda_2 \geq \frac{fAf^T}{\|f\|^2} = d - \frac{n}{|S|} \cdot \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|} \geq d - 2h(G) \quad \Rightarrow \checkmark$$



# Expansion Groß $\Rightarrow$ Lücke Groß

(Beweis Abschätzung  $h$  vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

**Idee:** billigen Schnitt nahe  $h(G)$  ausdenken!  
Schnitt induziert Vektor  $f$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2$$

**Baue  $f$ :**

- man nehme  $v_2$  (oBdA: mehr positive als negative Einträge)
- $f := v_2^+$  (i.e.,  $f_x = \max(0, v_{2(x)})$ )
- $V^+ := \text{support}(f)$  (i.e.,  $V^+ = \{x \mid f_x > 0\}$ )

**Merken:** basierend auf  $v_2$  findet man billigen Schnitt!

## (i) und (ii)

$$(\dots \text{ aus } \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2 \quad )$$

**(i) grob:**  $x \in V^+ : (Lf)_x \leq (Lg)_x = (d - \lambda_2) \cdot g_x \quad \underbrace{\Rightarrow}_{f_x \text{ sonst } 0} fLf^T \leq (d - \lambda_2) \cdot \|f\|^2$

**(ii) grob:** technisch, ohne merk-würdigen Kniff

## Lemma (diverse, ab '89)

$G$   $d$ -regulär,  $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$  EW von  $A(G)$ , dann:

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

**Bedeutet:**  $|S-T\text{-Kanten} - \mathbb{E}(S-T\text{-Kanten})|$  klein, wenn  $\lambda$  klein  
 $\Rightarrow$  Graph „recht zufällig“, diesbezüglich

(auch genannt: *discrepancy*)

## Expander Mixing Anwendungen

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Betrachte  $(n, d, \alpha)$ -Graphen:  $d$ -regulär,  $\lambda \leq \alpha d$

### ■ Unabhängige Mengen:

$\forall$  unabh. Menge  $S: |S| \leq \alpha n$

### ■ Chromatische Zahl $\chi(G)$ :

$\forall$  Farbe  $j$ : Knoten( $j$ ) sind unabh. Mengen  $\Rightarrow \chi(G) \geq 1/\alpha$

### ■ Durchmesser:

$\rightsquigarrow$  jedes  $S \subset V$  hat  $\varepsilon|S|$  neue Nachbarn

$\rightsquigarrow$  wachsende Kugeln um  $u$  und  $v$  begegnen sich nach  $O(\log(n))$  Schritten

$\Rightarrow$  kleines  $\alpha$  liefert Durchmesser  $O(\log n)$

### ■ Umgekehrtes Lemma (to appear):

Abschätzung gilt für ein  $\rho \Rightarrow \lambda$  „nahe“  $O(\rho)$

- Man nehme  $\mathbf{1}_S$  und  $\mathbf{1}_T$ , charakteristische Vektoren von  $S, T$
- Darstellung durch EV-Basis:  $\mathbf{1}_S = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i$  und  $\mathbf{1}_T = \sum_j \beta_j \mathbf{v}_j$
- $|E(S, T)| = \mathbf{1}_S A \mathbf{1}_T = (\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i) A (\sum_j \beta_j \mathbf{v}_j)$   
 $= (\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i) \cdot (\sum_j \beta_j \lambda_j \mathbf{v}_j)$   
 $= \sum_i \alpha_i \beta_i \lambda_i$

- wegen  $\alpha_1 = \mathbf{1}_S \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}} = \frac{|S|}{\sqrt{n}}$  und analog  $\beta_1 = \frac{|T|}{\sqrt{n}}$ :

$$|E(S, T)| = d \frac{|S||T|}{n} + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i$$

- aber  $|\sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i| \leq \sum_{i=2}^n |\lambda_i \alpha_i \beta_i| \stackrel{\text{Def.}}{\leq} \lambda \sum_{i=2}^n |\alpha_i \beta_i|$

$$\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \lambda \|\alpha\|_2 \|\beta\|_2 \stackrel{\text{nur Drehung}}{=} \lambda \|\mathbf{1}_S\|_2 \|\mathbf{1}_T\|_2 = \lambda \sqrt{|S||T|}$$

## Begriffe zu Perron-Frobenius

Zugrundeliegender Graph einer reellen  $n \times n$ -Matrix:

$$V = \{1, \dots, n\} \text{ und } (i, j) \in E \text{ iff } A_{ij} \neq 0$$

starker Zusammenhang eines gerichteten Graphen  $G$ :

$\exists$  gerichteter Pfad von  $u$  nach  $v, \forall u, v \in V$

spektraler Radius  $\rho$  einer Matrix  $A$ :  $\rho = \max_{\text{EW } \lambda \text{ von } A} |\lambda|$

EW nicht notw. reell,  $\rho$  nicht notw. EW

$r$ -subharmonic: Sei  $A$   $n \times n$  Matrix, Vektor  $x$  ist  $r$ -subharmonic wenn:  
 $x \neq 0$  und  $Ax \geq rx$

### Lemma (Hilfslemmata)

Ist  $A$  eine nichtneg.  $n \times n$  Matrix mit  $G(A)$  stark zsh.:

$\exists$  maximales  $r \in \mathbb{R}$  so dass  $r$ -subharmonic Vektoren existieren.

Es gilt  $r = \rho$ , und alle solchen  $r$ -subharmonic Vektoren sind EV.

“The most important result on the eigenvalues and eigenvectors of nonnegative matrices” [Godsil, Royle]

## Theorem (Perron-Frobenius)

*A reelle, nichtnegative  $n \times n$ -Matrix mit zugr. Graph  $X$  stark zusammenhängend:*

- 1  $\rho(A)$  ist einfacher EW. Ist  $x$  EV zu  $\rho$ , dann ist  $x > \mathbf{0}$  oder  $x < \mathbf{0}$
- 2  $A_1$  reelle, nichtnegative  $n \times n$ -Matrix mit  $A - A_1 \geq 0$   
Dann gilt  $\rho(A_1) \leq \rho(A)$ , mit Gleichheit nur bei  $A = A_1$
- 3  $\theta$  EW mit  $|\theta| = \rho$ , dann ist  $\theta/\rho$   $h$ -te Einheitswurzel und für alle  $r$  ist  $e^{2\pi ir/h}$  EW ( $h$  ist Periode der Matrix).  
Und alle Zyklen in  $X$  haben Länge teilbar durch  $h$ .

## Zusammenfassung und Ende

- Adjazenzmatrix  $A(G)$ , Bedeutung von  $A^\ell$
- Laplacematrix  $L(G) = D(G) - A(G)$
- Inzidenzmatrix  $K(G)$  (Richtung, Knoten vs. Kanten),  $L = KK^T$
- Vielfachh. von EW 0 in  $L(G)$  gleich # Zusammenhangskomp. von  $G$
- $L(G)$  Analogon zu Laplace-Operator aus Vektorenrechnung
- EV von  $L(G)$  helfen bei Layouts / Clustern
  
- Spektrale Lücke  $d - \lambda_2$  vs.  $h$ :  $\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h \leq \sqrt{2d(d-\lambda)}$  (scharf)
- Markov-C: Gewichte  $\rightsquigarrow$  conductance  $\rightsquigarrow$  Konvergenz v. MC-Algos
- Expander Mixing Lemma:  $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$  EW von  $A(G)$ :  
$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$
- $\lambda$  klein  $\Rightarrow G$  „recht zufällig“
- Perron-Frobenius: spektraler Radius ist einfacher EW
- Perron-Frobenius: spektraler Radius „skaliert“ mit  $A$

Danke, Fragen