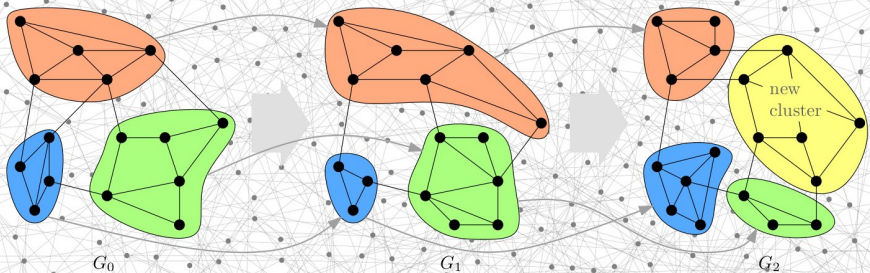


Spektraltheorie

Expandergraphen – Seminar im SS11

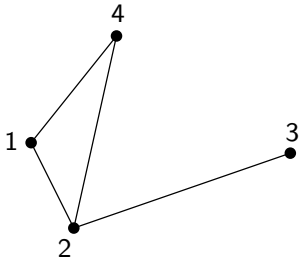
Robert Görke | Sommer 2011

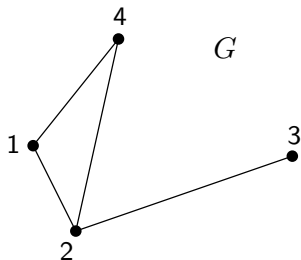
KARLSRUHE INSTITUTE OF TECHNOLOGY – INSTITUTE OF THEORETICAL INFORMATICS



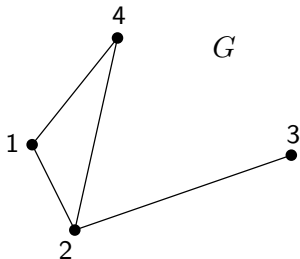
- 1 Matrizen eines Graphen
- 2 Adjazenzmatrix
- 3 Laplacematrix
- 4 Die Spektrale Lücke
- 5 Das Expander Mixing Lemma
- 6 Perron-Frobenius
- 7 Ende

Matrizen eines Graphs



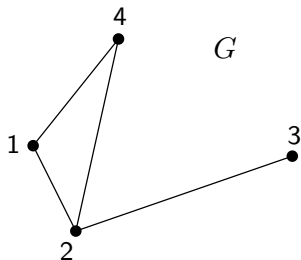


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



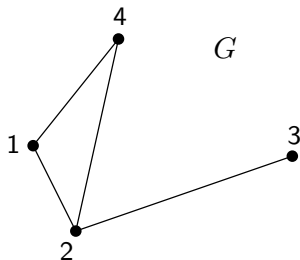
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 : (A^3)_{ii} =$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

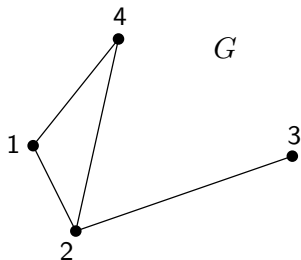
$$A^3 : (A^3)_{ii} = |\{\pi : |\pi| = 3, \pi = (v_i, \dots, v_i)\}|$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 : (A^3)_{ii} = |\{\pi : |\pi| = 3, \pi = (v_i, \dots, v_i)\}|$$

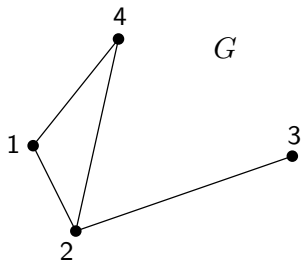
$$\sum_i (A^3)_{ii} = \text{tr}(A^3) = 6 \cdot \#\Delta$$



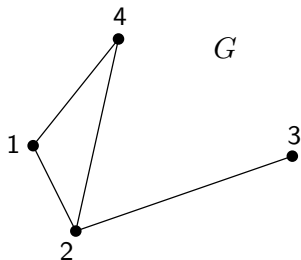
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 : (A^2)_{ii} = |\{\pi : |\pi| = 2, \pi = (v_i, \dots, v_i)\}|$$

$$\sum_i (A^2)_{ii} = \text{tr}(A^2) = 2 \cdot m$$

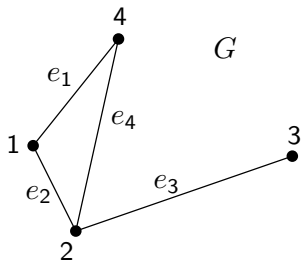


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D(G) - A(G)$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D(G) - A(G)$$

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

$$\sigma: \{(v, w) : \{v, w\} \in E\} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \sigma((v, w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

$$\sigma: \{(v, w) : \{v, w\} \in E\} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \sigma((v, w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

Gerichtete Inzidenzmatrix $K(G^\sigma)$

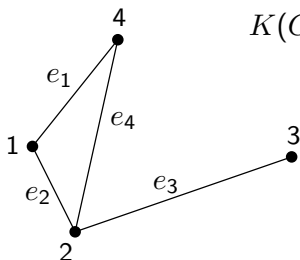
$$K(G^\sigma)_{v,e} = \begin{cases} \sigma((v, w)) & e = \{v, w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \dots < v_n$

$$\sigma: \{(v, w) : \{v, w\} \in E\} \rightarrow \{-1, 1\} \quad \sigma((v, w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

Gerichtete Inzidenzmatrix $K(G^\sigma)$

$$K(G^\sigma)_{v,e} = \begin{cases} \sigma((v, w)) & e = \{v, w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$K(G^\sigma) = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Matrizen eines Graphs

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$K = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$K^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(KK^T)_{ij} =$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(KK^T)_{ij} = \begin{cases} -1 & i \neq j, i \sim j \\ 0 & i \neq j, i \not\sim j \\ \deg(v_i) & i = j \end{cases}$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$K^T = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A$$
$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K)$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K) = n - \dim(\text{kern}(K))$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K) = n - \dim(\text{kern}(K)) \underbrace{=}_{\text{zsh.}} n - 1$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K) = n - \dim(\text{kern}(K)) \underbrace{=}_{\text{zsh.}} n - 1$$

$$\dim(\text{Lösungsraum von } L \cdot x = 0) = \dim(\text{kern}(L)) = 1$$

$$K = \begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad K^T = \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$KK^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(K) = n - \underbrace{\dim(\text{kern}(K))}_{\text{zsh.}} = n - 1$$

$$\dim(\text{Lösungsraum von } L \cdot x = 0) = \dim(\text{kern}(L)) = 1$$

allgemeiner: $k > 1$ Zsg.-Komponenten: $1 \rightsquigarrow k$

$$\text{Lösungsraum} = \text{span}(\{\mathbf{1}_{v_i \in H_\ell} \mid \ell = 1 \dots k\})$$

- A symmetrisch, reell \Rightarrow EW reell

- A symmetrisch, reell \Rightarrow EW reell
- EW & EV & Eigenpaare:
 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

- A symmetrisch, reell \Rightarrow EW reell

- EW & EV & Eigenpaare:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq & \dots & \geq & \lambda_n \\ v_1 & , & v_2 & , & \dots & , & v_n \end{array} \quad (\text{orthonormales System})$$

- A symmetrisch, reell \Rightarrow EW reell
- EW & EV & Eigenpaare:
 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
 v_1, v_2, \dots, v_n (orthonormales System)
- nette Eigenschaften ablesbar:
 - $\lambda_1 = d, v_1 = \mathbf{1}/\sqrt{n}$
 - zusammenhängend $\Leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2$
 - bipartit $\Leftrightarrow \lambda_1 > -\lambda_n$
 - λ_2 hängt eng mit Expansion zusammen!

Laplacematrix von (d -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung: $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

(Exaktheit mit Füßen getreten)



Laplacematrix von (d -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung: $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei Temperaturverteilung im Raum

(Exaktheit mit Füßen getreten)



Laplacematrix von (d -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung: $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei Temperaturverteilung im Raum

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$\hat{=}$ Veränderung der Temp. als Vektorfeld

(Exaktheit mit Füßen getreten)



Laplacematrix von (d -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung: $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei Temperaturverteilung im Raum

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$\hat{=}$ Veränderung der Temp. als Vektorfeld

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

$\hat{=}$ "Quellenhaftigkeit" / Fluss durch Kugeloberfläche um Punkt

(Exaktheit mit Füßen getreten)



Laplacematrix von (d -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung: $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei Temperaturverteilung im Raum

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$\hat{=}$ Veränderung der Temp. als Vektorfeld

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

$\hat{=}$ "Quellenhaftigkeit" / Fluss durch Kugeloberfläche um Punkt

Analogon auf Graphen: $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Knotenbewertung

(Exaktheit mit Füßen getreten)



Laplacematrix von (d -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung: $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei Temperaturverteilung im Raum

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$\hat{=}$ Veränderung der Temp. als Vektorfeld

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

$\hat{=}$ "Quellenhaftigkeit" / Fluss durch Kugeloberfläche um Punkt

Analogon auf Graphen: $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Knotenbewertung

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = fK \quad \rightsquigarrow \quad (fK)_{(u,v)} = f_u - f_v$$

$\hat{=}$ Veränderung der Knotenbewertung, auf Kanten notiert

(Exaktheit mit Füßen getreten)



Laplacematrix von (d -reg.) Graphen

(Literaturempfehlung: Dissertation von Daniel Fleischer '09 Konstanz)

Klassische Vektorenrechnung: $\Delta(f) = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei Temperaturverteilung im Raum

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$\hat{=}$ Veränderung der Temp. als Vektorfeld

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

$\hat{=}$ "Quellenhaftigkeit" / Fluss durch Kugeloberfläche um Punkt

Analogon auf Graphen: $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Knotenbewertung

$$\Rightarrow \operatorname{grad}(f) = fK \rightsquigarrow (fK)_{(u,v)} = f_u - f_v$$

$\hat{=}$ Veränderung der Knotenbewertung, auf Kanten notiert

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = K(\operatorname{grad}(f)) \rightsquigarrow K(\operatorname{grad}(f))_u = \sum_{e \text{ raus aus } u} \operatorname{grad}(f)_e - \sum_{e \text{ rein nach } u} \operatorname{grad}(f)_e = df_u - \sum_{v \sim u} f_v$$

$\hat{=}$ Quellenhaftigkeit von Knoten

(Exaktheit mit Füßen getreten)



- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\text{spectrum}(L)$ ist in $[0, 2d]$

- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\text{spectrum}(L)$ ist in $[0, 2d]$

Exkurs: Layoutproblem

Knoten sollen nah bei Nachbarn liegen, minimaler quadratischer Fehler!

- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\text{spectrum}(L)$ ist in $[0, 2d]$

Exkurs: Layoutproblem

Knoten sollen nah bei Nachbarn liegen, minimaler quadratischer Fehler!

G zsh. $\Rightarrow \text{kern}(L) = \text{span}(\mathbf{1}) \Rightarrow$ eindeutige Lösung trivial :-)

- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\text{spectrum}(L)$ ist in $[0, 2d]$

Exkurs: Layoutproblem

Knoten sollen nah bei Nachbarn liegen, minimaler quadratischer Fehler!

G zsh. $\Rightarrow \text{kern}(L) = \text{span}(\mathbf{1}) \Rightarrow$ eindeutige Lösung trivial :-)

Lösung: suche v mit $v \perp \mathbf{1}$ und $\|v\| = 1$, so dass $vLv^T = \text{minimal}$

- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\text{spectrum}(L)$ ist in $[0, 2d]$

Exkurs: Layoutproblem

Knoten sollen nah bei Nachbarn liegen, minimaler quadratischer Fehler!

G zsh. $\Rightarrow \text{kern}(L) = \text{span}(\mathbf{1}) \Rightarrow$ eindeutige Lösung trivial :-)

Lösung: suche v mit $v \perp \mathbf{1}$ und $\|v\| = 1$, so dass $vLv^T = \text{minimal}$

$$\Rightarrow \text{Rayleigh-Ritz} \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T L(G)x}{x^T x} = \lambda_{n-i}$$
$$x \perp \text{span}(v_n, \dots, v_{n-i+1})$$

- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\text{spectrum}(L)$ ist in $[0, 2d]$

Exkurs: Layoutproblem

Knoten sollen nah bei Nachbarn liegen, minimaler quadratischer Fehler!

G zsh. $\Rightarrow \text{kern}(L) = \text{span}(\mathbf{1}) \Rightarrow$ eindeutige Lösung trivial :-)

Lösung: suche v mit $v \perp \mathbf{1}$ und $\|v\| = 1$, so dass $vLv^T = \text{minimal}$

$$\Rightarrow \text{Rayleigh-Ritz} \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T L(G)x}{x^T x} = \lambda_{n-i}$$
$$x \perp \text{span}(v_n, \dots, v_{n-i+1})$$

\Rightarrow nutze v_{n-1} und v_{n-2} in 2D

- $L = KK^T$
- $fLf^T = \sum_{(u,v) \in E} (f(u) - f(v))^2$
- $\lambda_{\min} = 0$
- $\text{spectrum}(L)$ ist in $[0, 2d]$

Exkurs: Layoutproblem

Knoten sollen nah bei Nachbarn liegen, minimaler quadratischer Fehler!

G zsh. $\Rightarrow \text{kern}(L) = \text{span}(\mathbf{1}) \Rightarrow$ eindeutige Lösung trivial :-)

Lösung: suche v mit $v \perp \mathbf{1}$ und $\|v\| = 1$, so dass $vLv^T = \text{minimal}$

$$\Rightarrow \text{Rayleigh-Ritz} \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{x^T L(G)x}{x^T x} = \lambda_{n-i}$$
$$x \perp \text{span}(v_n, \dots, v_{n-i+1})$$

\Rightarrow nutze v_{n-1} und v_{n-2} in 2D Oder andere? [Animation!](#)



Die Spektrale Lücke

$$d - \lambda_2$$

Die Spektrale Lücke

$$d - \lambda_2$$

\approx Expansion!

$$d - \lambda_2 \\ \approx \text{Expansion!}$$

Erinnerung: (edge-)expansion(ratio)(G) = $h(G) := \min_{\{S \subset V \mid |S| \leq \frac{n}{2}\}} \frac{|\delta S|}{|S|}$
(Analogon zur Cheeger-Konstante in Riemannscher Geometrie)

$$d - \lambda_2 \\ \approx \text{Expansion!}$$

Erinnerung: (edge-)expansion(ratio)(G) = $h(G) := \min_{\{S \subset V \mid |S| \leq \frac{n}{2}\}} \frac{|\delta S|}{|S|}$
(Analogon zur Cheeger-Konstante in Riemannscher Geometrie)

Theorem (Doziuk'84, Alon-Milman'85, Alon'86)

G endlich, zusammenh., d -regulär, dann:

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

$$d - \lambda_2 \\ \approx \text{Expansion!}$$

Erinnerung: (edge-)expansion(ratio)(G) = $h(G) := \min_{\{S \subset V \mid |S| \leq \frac{n}{2}\}} \frac{|\delta S|}{|S|}$
(Analogon zur Cheeger-Konstante in Riemannscher Geometrie)

Theorem (Doziuk'84, Alon-Milman'85, Alon'86)

G endlich, zusammenh., d -regulär, dann:

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

Analogon: Sei M kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und λ der kleinste EW seines Laplaceoperators, dann:

$$\lambda \geq h^2/4$$

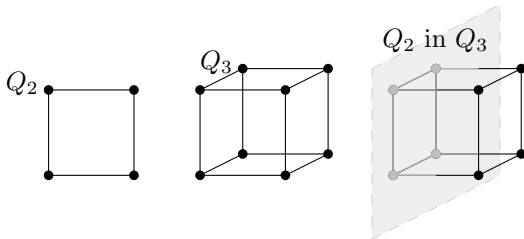


$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

untere Schranke: $\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G)$

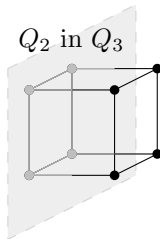
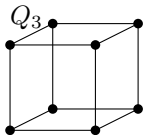
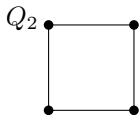
Betrachte Hyperwürfel Q_d :



$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

untere Schranke: $\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G)$

Betrachte Hyperwürfel Q_d :

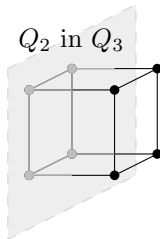
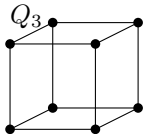
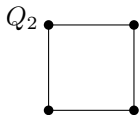


- $h(G) = 1$ (Q_{d-1} in Q_d)
- $EW = 3, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -3$
- $d - \lambda_2 = 2$

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

untere Schranke: $\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G)$

Betrachte Hyperwürfel Q_d :



- $h(G) = 1$ (Q_{d-1} in Q_d)
- $EW = 3, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -3$
- $d - \lambda_2 = 2$

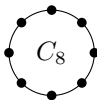
↪ scharf

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

obere Schranke: $h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$

Betrachte n -Zykel C_n :

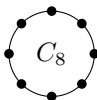


- $h(C_n) = \frac{4}{n}$
- $d - \lambda_2 = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$$

obere Schranke: $h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)}$

Betrachte n -Zykel C_n :



- $h(C_n) = \frac{4}{n}$
- $d - \lambda_2 = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$

↪ scharf

Lücke Groß \Rightarrow Expansion Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, untere Schranke:

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 \geq d - 2h(G)$$

Lücke Groß \Rightarrow Expansion Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, untere Schranke:

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 \geq d - 2h(G)$$

Idee: geeigneten Vektor f nahe v_2 ausdenken!

Forderungen: $f \perp \mathbf{1}$ und f hat ausreichend großen Rayleigh-Quotienten

Lücke Groß \Rightarrow Expansion Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, untere Schranke:

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 \geq d - 2h(G))$$

Idee: geeigneten Vektor f nahe v_2 ausdenken!

Forderungen: $f \perp \mathbf{1}$ und f hat ausreichend großen Rayleigh-Quotienten

$$\rightsquigarrow \quad \lambda_2 \quad \underbrace{\geq}_{\text{Satz v. Ray.-R.}} \quad \frac{fAf^T}{\|f\|^2} \quad \underbrace{\geq}_{\text{z.z.}} \quad d - 2h(G)$$

Lücke Groß \Rightarrow Expansion Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, untere Schranke:

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 \geq d - 2h(G)$$

Idee: geeigneten Vektor f nahe v_2 ausdenken!

Forderungen: $f \perp \mathbf{1}$ und f hat ausreichend großen Rayleigh-Quotienten

$$\rightsquigarrow \quad \lambda_2 \quad \underbrace{\geq}_{\text{Satz v. Ray.-R.}} \quad \frac{fAf^T}{\|f\|^2} \quad \underbrace{\geq}_{\text{z.z.}} \quad d - 2h(G)$$

Wahl von f :

Sei $S \subseteq V$ $h(G)$ -scharf (i.e., $h(G) = \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|}$, $|S| \leq n/2$)

Setze $f = |\bar{S}|1_S - |S|1_{\bar{S}}$

Lücke Groß \Rightarrow Expansion Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, untere Schranke:

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 \geq d - 2h(G)$$

Idee: geeigneten Vektor f nahe v_2 ausdenken!

Forderungen: $f \perp \mathbf{1}$ und f hat ausreichend großen Rayleigh-Quotienten

$$\rightsquigarrow \lambda_2 \underbrace{\geq}_{\text{Satz v. Ray.-R.}} \frac{fAf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\geq}_{\text{z.z.}} d - 2h(G)$$

Wahl von f :

Sei $S \subseteq V$ $h(G)$ -scharf (i.e., $h(G) = \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|}$, $|S| \leq n/2$)

Setze $f = |\bar{S}|1_S - |S|1_{\bar{S}}$

$$\text{liefert: } \rightsquigarrow \lambda_2 \geq \frac{fAf^T}{\|f\|^2} = d - \frac{n}{|S|} \cdot \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|} \geq d - 2h(G)$$



Lücke Groß \Rightarrow Expansion Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, untere Schranke:

$$\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \quad \text{bzw.} \quad \lambda_2 \geq d - 2h(G)$$

Idee: geeigneten Vektor f nahe v_2 ausdenken!

Forderungen: $f \perp \mathbf{1}$ und f hat ausreichend großen Rayleigh-Quotienten

$$\rightsquigarrow \lambda_2 \underbrace{\geq}_{\text{Satz v. Ray.-R.}} \frac{fAf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\geq}_{\text{z.z.}} d - 2h(G)$$

Wahl von f :

Sei $S \subseteq V$ $h(G)$ -scharf (i.e., $h(G) = \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|}$, $|S| \leq n/2$)

Setze $f = |\bar{S}|1_S - |S|1_{\bar{S}}$

$$\text{liefert: } \rightsquigarrow \lambda_2 \geq \frac{fAf^T}{\|f\|^2} = d - \frac{n}{|S|} \cdot \frac{|E(S, \bar{S})|}{|S|} \geq d - 2h(G) \quad \Rightarrow \checkmark$$



Expansion Groß \Rightarrow Lücke Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

Expansion Groß \Rightarrow Lücke Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

Idee: billigen Schnitt nahe $h(G)$ ausdenken!
Schnitt induziert Vektor f

Expansion Groß \Rightarrow Lücke Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

Idee: billigen Schnitt nahe $h(G)$ ausdenken!
Schnitt induziert Vektor f

$$\rightsquigarrow \quad \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2$$

Expansion Groß \Rightarrow Lücke Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

Idee: billigen Schnitt nahe $h(G)$ ausdenken!

Schnitt induziert Vektor f

$$\rightsquigarrow \quad \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2$$

Baue f :

- man nehme v_2 (oBdA: mehr positive als negative Einträge)

Expansion Groß \Rightarrow Lücke Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

Idee: billigen Schnitt nahe $h(G)$ ausdenken!

Schnitt induziert Vektor f

$$\rightsquigarrow \quad \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2$$

Baue f :

- man nehme v_2 (oBdA: mehr positive als negative Einträge)
- $f := v_2^+$ (i.e., $f_x = \max(0, v_{2(x)})$)

Expansion Groß \Rightarrow Lücke Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

Idee: billigen Schnitt nahe $h(G)$ ausdenken!
Schnitt induziert Vektor f

$$\rightsquigarrow \quad \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2$$

Baue f :

- man nehme v_2 (oBdA: mehr positive als negative Einträge)
- $f := v_2^+$ (i.e., $f_x = \max(0, v_{2(x)})$)
- $V^+ := \text{support}(f)$ (i.e., $V^+ = \{x \mid f_x > 0\}$)

Expansion Groß \Rightarrow Lücke Groß

(Beweis Abschätzung h vs. Spektrale Lücke, obere Schranke:

$$h(G) \leq \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h^2}{2d} \leq d - \lambda_2$$

Idee: billigen Schnitt nahe $h(G)$ ausdenken!
Schnitt induziert Vektor f

$$\rightsquigarrow \quad \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2$$

Baue f :

- man nehme v_2 (oBdA: mehr positive als negative Einträge)
- $f := v_2^+$ (i.e., $f_x = \max(0, v_{2(x)})$)
- $V^+ := \text{support}(f)$ (i.e., $V^+ = \{x \mid f_x > 0\}$)

Merken: basierend auf v_2 findet man billigen Schnitt!

(i) und (ii)

$$\left(\dots \text{aus } \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fL f^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2 \right)$$

(i) und (ii)

$$\left(\dots \text{aus } \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2 \right)$$

$$\text{(i) } \mathbf{grob: } x \in V^+ : (Lf)_x \leq (Lg)_x = (d - \lambda_2) \cdot g_x \underbrace{\Rightarrow}_{f_x \text{ sonst } 0} fLf^T \leq (d - \lambda_2) \cdot \|f\|^2$$

(i) und (ii)

$$\left(\dots \text{aus } \frac{h^2}{2d} \underbrace{\leq}_{(ii)} \frac{fLf^T}{\|f\|^2} \underbrace{\leq}_{(i)} d - \lambda_2 \right)$$

$$\text{(i) } \mathbf{grob: } x \in V^+ : (Lf)_x \leq (Lg)_x = (d - \lambda_2) \cdot g_x \underbrace{\Rightarrow}_{f_x \text{ sonst } 0} fLf^T \leq (d - \lambda_2) \cdot \|f\|^2$$

(ii) grob: technisch, ohne merk-würdigen Kniff

Lemma (diverse, ab '89)

G d -regulär, $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$ EW von $A(G)$, dann:

$$\forall S, T \subseteq V : \left| E(S, T) - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Lemma (diverse, ab '89)

G d -regulär, $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$ EW von $A(G)$, dann:

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Bedeutet: $|S-T\text{-Kanten} - \mathbb{E}(S-T\text{-Kanten})|$ klein, wenn λ klein
 \Rightarrow Graph „recht zufällig“, diesbezüglich

(auch genannt: *discrepancy*)

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Betrachte (n, d, α) -Graphen: d -regulär, $\lambda \leq \alpha d$

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Betrachte (n, d, α) -Graphen: d -regulär, $\lambda \leq \alpha d$

■ Unabhängige Mengen:

\forall unabh. Menge S : $|S| \leq \alpha n$

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Betrachte (n, d, α) -Graphen: d -regulär, $\lambda \leq \alpha d$

- **Unabhängige Mengen:**

\forall unabh. Menge S : $|S| \leq \alpha n$

- **Chromatische Zahl $\chi(G)$:**

\forall Farbe j : Knoten(j) sind unabh. Mengen $\Rightarrow \chi(G) \geq 1/\alpha$

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Betrachte (n, d, α) -Graphen: d -regulär, $\lambda \leq \alpha d$

- **Unabhängige Mengen:**

\forall unabh. Menge S : $|S| \leq \alpha n$

- **Chromatische Zahl $\chi(G)$:**

\forall Farbe j : Knoten(j) sind unabh. Mengen $\Rightarrow \chi(G) \geq 1/\alpha$

- **Durchmesser:**

\rightsquigarrow jedes $S \subset V$ hat $\varepsilon|S|$ neue Nachbarn

\rightsquigarrow wachsende Kugeln um u und v begegnen sich nach $O(\log(n))$ Schritten

\Rightarrow kleines α liefert Durchmesser $O(\log n)$

$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Betrachte (n, d, α) -Graphen: d -regulär, $\lambda \leq \alpha d$

■ Unabhängige Mengen:

\forall unabh. Menge S : $|S| \leq \alpha n$

■ Chromatische Zahl $\chi(G)$:

\forall Farbe j : Knoten(j) sind unabh. Mengen $\Rightarrow \chi(G) \geq 1/\alpha$

■ Durchmesser:

\rightsquigarrow jedes $S \subset V$ hat $\varepsilon|S|$ neue Nachbarn

\rightsquigarrow wachsende Kugeln um u und v begegnen sich nach $O(\log(n))$ Schritten

\Rightarrow kleines α liefert Durchmesser $O(\log n)$

■ Umgekehrtes Lemma (to appear):

Abschätzung gilt für ein $\rho \Rightarrow \lambda$ „nahe“ $O(\rho)$



Beweis Expander Mixing Lemma

- Man nehme 1_S und 1_T , charakteristische Vektoren von S, T

Beweis Expander Mixing Lemma

- Man nehme 1_S und 1_T , charakteristische Vektoren von S, T
- Darstellung durch EV-Basis: $1_S = \sum_i \alpha_i v_i$ und $1_T = \sum_j \beta_j v_j$

Beweis Expander Mixing Lemma

- Man nehme 1_S und 1_T , charakteristische Vektoren von S , T
- Darstellung durch EV-Basis: $1_S = \sum_i \alpha_i v_i$ und $1_T = \sum_j \beta_j v_j$
- $|E(S, T)| = 1_S A 1_T = (\sum_i \alpha_i v_i) A (\sum_j \beta_j v_j)$
 $= (\sum_i \alpha_i v_i) \cdot (\sum_j \beta_j \lambda_j v_j)$
 $= \sum_i \alpha_i \beta_i \lambda_i$

- Man nehme $\mathbf{1}_S$ und $\mathbf{1}_T$, charakteristische Vektoren von S , T
- Darstellung durch EV-Basis: $\mathbf{1}_S = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i$ und $\mathbf{1}_T = \sum_j \beta_j \mathbf{v}_j$
- $|E(S, T)| = \mathbf{1}_S \mathbf{A} \mathbf{1}_T = (\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i) \mathbf{A} (\sum_j \beta_j \mathbf{v}_j)$
 $= (\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i) \cdot (\sum_j \beta_j \lambda_j \mathbf{v}_j)$
 $= \sum_i \alpha_i \beta_i \lambda_i$
- wegen $\alpha_1 = \mathbf{1}_S \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}} = \frac{|S|}{\sqrt{n}}$ und analog $\beta_1 = \frac{|T|}{\sqrt{n}}$:

$$|E(S, T)| = d \frac{|S||T|}{n} + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i$$

Beweis Expander Mixing Lemma

- Man nehme $\mathbf{1}_S$ und $\mathbf{1}_T$, charakteristische Vektoren von S, T
- Darstellung durch EV-Basis: $\mathbf{1}_S = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i$ und $\mathbf{1}_T = \sum_j \beta_j \mathbf{v}_j$
- $|E(S, T)| = \mathbf{1}_S A \mathbf{1}_T = (\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i) A (\sum_j \beta_j \mathbf{v}_j)$
 $= (\sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i) \cdot (\sum_j \beta_j \lambda_j \mathbf{v}_j)$
 $= \sum_i \alpha_i \beta_i \lambda_i$

- wegen $\alpha_1 = \mathbf{1}_S \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{n}} = \frac{|S|}{\sqrt{n}}$ und analog $\beta_1 = \frac{|T|}{\sqrt{n}}$:

$$|E(S, T)| = d \frac{|S||T|}{n} + \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i$$

- aber $|\sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i \beta_i| \leq \sum_{i=2}^n |\lambda_i \alpha_i \beta_i| \leq \underbrace{\lambda \sum_{i=2}^n |\alpha_i \beta_i|}_{\text{Def.}}$

$$\underbrace{\leq}_{\text{CSU}} \lambda \|\alpha\|_2 \|\beta\|_2 \underbrace{=}_{\text{nur Drehung}} \lambda \|\mathbf{1}_S\|_2 \|\mathbf{1}_T\|_2 = \lambda \sqrt{|S||T|}$$

Zugrundeliegender Graph einer reellen $n \times n$ -Matrix:

$V = \{1, \dots, n\}$ und $(i, j) \in E$ iff $A_{ij} \neq 0$

starker Zusammenhang eines gerichteten Graphen G :

\exists gerichteter Pfad von u nach v , $\forall u, v \in V$

spektraler Radius ρ einer Matrix A : $\rho = \max_{\text{EW } \lambda \text{ von } A} |\lambda|$

EW nicht notw. reell, ρ nicht notw. EW

r-subharmonic: Sei A $n \times n$ Matrix, Vektor x ist *r*-subharmonic wenn:
 $x \neq 0$ und $Ax \geq rx$

Lemma (Hilfslemmata)

Ist A eine nichtneg. $n \times n$ Matrix mit $G(A)$ stark zsh.:

\exists maximales $r \in \mathbb{R}$ so dass *r*-subharmonic Vektoren existieren.

Es gilt $r = \rho$, und alle solchen *r*-subharmonic Vektoren sind EV.

Perron-Frobenius Theorem

“The most important result on the eigenvalues and eigenvectors of nonnegative matrices” [Godsil, Royle]

“The most important result on the eigenvalues and eigenvectors of nonnegative matrices” [Godsil, Royle]

Theorem (Perron-Frobenius)

A reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit zugr. Graph X stark zusammenhängend:

“The most important result on the eigenvalues and eigenvectors of nonnegative matrices” [Godsil, Royle]

Theorem (Perron-Frobenius)

A reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit zugr. Graph X stark zusammenhängend:

① $\rho(A)$ ist einfacher EW. Ist x EV zu ρ , dann ist $x > \mathbf{0}$ oder $x < \mathbf{0}$

“The most important result on the eigenvalues and eigenvectors of nonnegative matrices” [Godsil, Royle]

Theorem (Perron-Frobenius)

A reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit zugr. Graph X stark zusammenhängend:

- 1 $\rho(A)$ ist einfacher EW. Ist x EV zu ρ , dann ist $x > \mathbf{0}$ oder $x < \mathbf{0}$
- 2 A_1 reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit $A - A_1 \geq 0$
Dann gilt $\rho(A_1) \leq \rho(A)$, mit Gleichheit nur bei $A = A_1$

“The most important result on the eigenvalues and eigenvectors of nonnegative matrices” [Godsil, Royle]

Theorem (Perron-Frobenius)

A reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit zugr. Graph X stark zusammenhängend:

- 1 $\rho(A)$ ist einfacher EW. Ist x EV zu ρ , dann ist $x > \mathbf{0}$ oder $x < \mathbf{0}$
- 2 A_1 reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit $A - A_1 \geq 0$
Dann gilt $\rho(A_1) \leq \rho(A)$, mit Gleichheit nur bei $A = A_1$
- 3 θ EW mit $|\theta| = \rho$, dann ist θ/ρ h -te Einheitswurzel und für alle r ist $e^{2\pi ir/h}$ EW (h ist Periode der Matrix).

“The most important result on the eigenvalues and eigenvectors of nonnegative matrices” [Godsil, Royle]

Theorem (Perron-Frobenius)

A reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit zugr. Graph X stark zusammenhängend:

- 1 $\rho(A)$ ist einfacher EW. Ist x EV zu ρ , dann ist $x > \mathbf{0}$ oder $x < \mathbf{0}$
- 2 A_1 reelle, nichtnegative $n \times n$ -Matrix mit $A - A_1 \geq \mathbf{0}$
Dann gilt $\rho(A_1) \leq \rho(A)$, mit Gleichheit nur bei $A = A_1$
- 3 θ EW mit $|\theta| = \rho$, dann ist θ/ρ h -te Einheitswurzel und für alle r ist $e^{2\pi ir/h}$ EW (h ist Periode der Matrix).
Und alle Zykel in X haben Länge teilbar durch h .

- Adjazenzmatrix $A(G)$, Bedeutung von A^ℓ
- Laplacematrix $L(G) = D(G) - A(G)$
- Inzidenzmatrix $K(G)$ (Richtung, Knoten vs. Kanten), $L = KK^T$
- Vielfachh. von EW 0 in $L(G)$ gleich # Zusammenhangskomp. von G
- $L(G)$ Analogon zu Laplace-Operator aus Vektorenrechnung
- EV von $L(G)$ helfen bei Layouts / Clustern

- Spektrale Lücke $d - \lambda_2$ vs. h : $\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h \leq \sqrt{2d(d-\lambda)}$ (scharf)
- Markov-C: Gewichte \rightsquigarrow *conductance* \rightsquigarrow Konvergenz v. MC-Algos
- Expander Mixing Lemma: $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$ EW von $A(G)$:
$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$
- λ klein $\Rightarrow G$ „recht zufällig“
- Perron-Frobenius: spektraler Radius ist einfacher EW
- Perron-Frobenius: spektraler Radius „skaliert“ mit A

- Adjazenzmatrix $A(G)$, Bedeutung von A^ℓ
- Laplacematrix $L(G) = D(G) - A(G)$
- Inzidenzmatrix $K(G)$ (Richtung, Knoten vs. Kanten), $L = KK^T$
- Vielfachh. von EW 0 in $L(G)$ gleich # Zusammenhangskomp. von G
- $L(G)$ Analogon zu Laplace-Operator aus Vektorenrechnung
- EV von $L(G)$ helfen bei Layouts / Clustern

- Spektrale Lücke $d - \lambda_2$ vs. h : $\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h \leq \sqrt{2d(d-\lambda)}$ (scharf)
- Markov-C: Gewichte \rightsquigarrow *conductance* \rightsquigarrow Konvergenz v. MC-Algos
- Expander Mixing Lemma: $\lambda = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$ EW von $A(G)$:
$$\forall S, T \subseteq V : \left| |E(S, T)| - \frac{d|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}$$
- λ klein $\Rightarrow G$ „recht zufällig“
- Perron-Frobenius: spektraler Radius ist einfacher EW
- Perron-Frobenius: spektraler Radius „skaliert“ mit A

Danke, Fragen