Karlsruher Institut für Technologie

Maximale s–t-Flüsse in Planaren Graphen

Vorlesung "Algorithmen für planare Graphen" · June 18, 2012

Ignaz Rutter

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Maximales Flussproblem

Gegeben:

- Gerichteter Graph $G = (V, E)$, $rev(u \to v) := v \to u$
- $c \colon E \to \mathbb{R}$, (OE $rev(e) \in E \quad \forall e \in E$)
- $s, t \in V$

$\phi \colon E \to \mathbb{R}$ $s - t$-Fluß:

- $\phi(e) = -\phi(rev(e))$
- $\sum_w \phi(v \to w) = 0$ für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$

ϕ *zulässig*: $\phi(e) \leq c(e)$ für alle $e \in E$

Gesucht:

Zulässiges ϕ mit maximalem $\sum_{s \to v \in E} \phi(s \to v)$.

Parametrische Kürzeste Wege

Parametrisches Kürzeste-Wege-Problem:

Gegeben: Gerichteter Graph $G = (V, E)$, $E' \subseteq E$, $c\colon E \to \mathbb{R}$
$c(\lambda, e) = c(e) - \lambda$ für $e \in E'$, $c(\lambda, e) = c(e)$ für $e \notin E'$
Gesucht: Größtes λ mit G enthält bzgl. $c(\lambda, \cdot)$ keine negativen Kreise.

Geht in Zeit $O(nm \log n)$ [Karp, Orlin] bzw. $O(n^2 \log n)$ [Young et al.]

Idee:

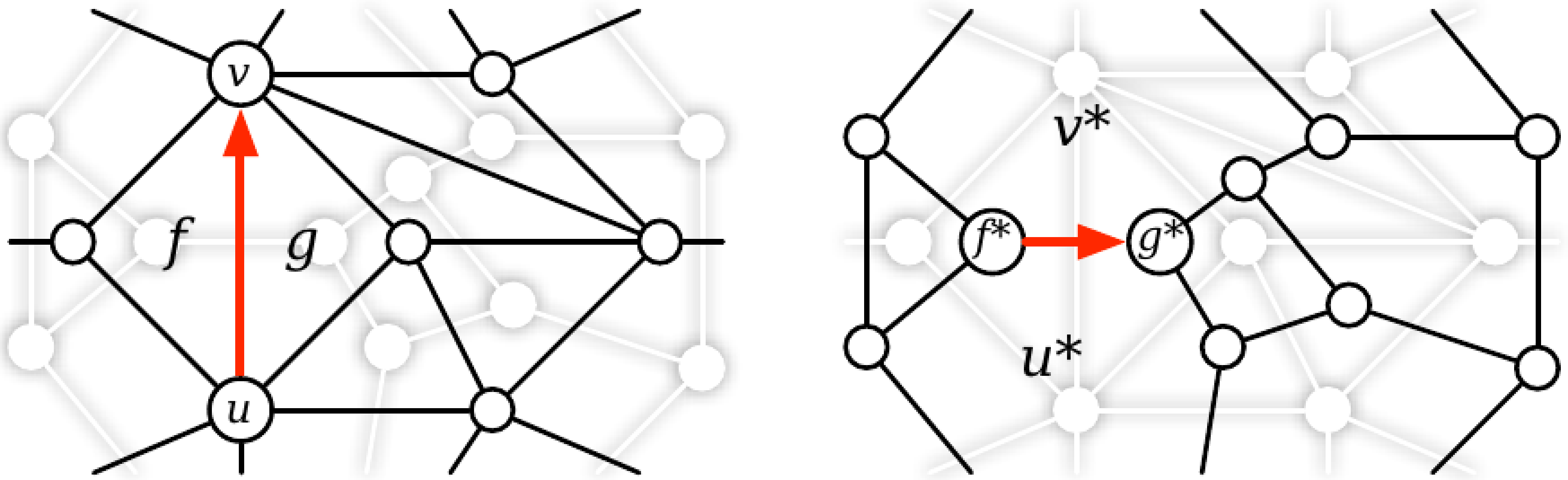
- Betrachte kürzeste-Wege-Baum bzgl. $c(\lambda, \cdot)$ bei bel. Startknoten s.
- erhöhe λ
- $dist(\lambda, v) \leq dist(\lambda, u) + c(\lambda, u \to v)$
- Kritische Stelle bei Gleichheit, $u \to v$ kommt in den Baum, ersetzt $u' \to v$.
- Jeder Pivot-Schritt erhöht Anzahl Kanten in E' auf einem s–v-Pfad $\rightsquigarrow O(n^2)$ Pivot-Schritte

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Dual-Graphen, gerichtet(!)

$G = (V, E)$ gerichtet

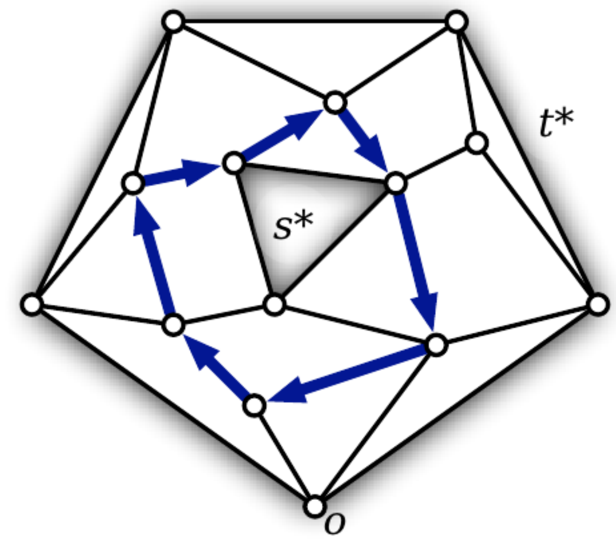
Dualgraph: Wie gehabt, $(u \to v)^\star$ kreuzt $u \to v$ von links nach rechts!



[Erickson'10]

Gerichteter Dual-Graph und Gerichtete Schnitte

Gerichteter (s,t)-Schnitt:
Kantenmenge C mit jeder gerichtete $s-t$-Pfad enthält Kante aus C

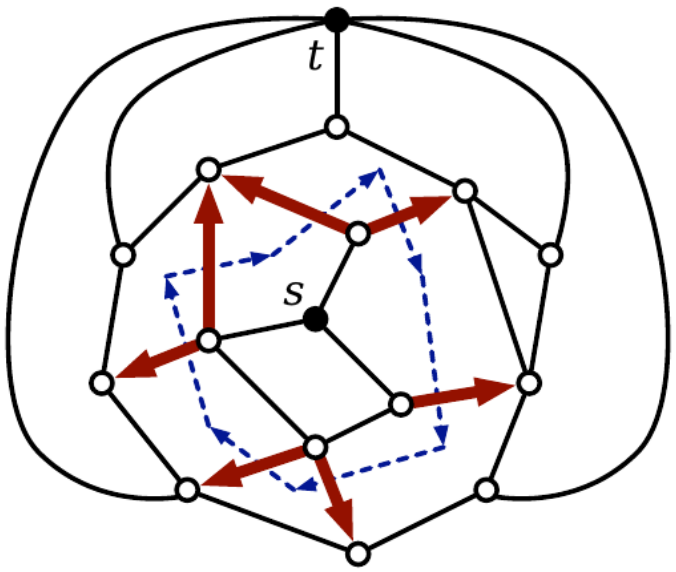


Dualität:

Gerichteter (s,t)-Schnitt in G

$\equiv$

gerichteter Kreis in $G^\star$, der $s^\star$ und $t^\star$ trennt.



Kantenmenge $C \subseteq E$ *Kozykel*

$:\Leftrightarrow$

$C^\star$ einfacher gerichter Kreis

Flüsse und Kürzeste Wege

P beliebiger gerichteter Pfad von s nach t.

Definiere $\pi : E \to \mathbb{R}$, *Einheitsfluß auf* P

$$\pi(e) := \begin{cases} 1 & e \in P \\ -1 & rev(e) \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $E' \subseteq E$ definiere: $\pi(E') := \sum_{e \in E'} \pi(e)$

Lemma

Für jeden Kozykel C gilt: $\pi(C) \in \{-1, 0, 1\}$

$\pi(C) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C$ ist (s, t)-Schnitt.

Betrachte Fluß von λ auf P

Setze $\phi := \lambda \cdot \pi$

Betrachte *Residual-Netzwerk* $G_\lambda := G_{\lambda \cdot \phi}$

Das ist G mit residualer Kapazitätsfunktion $c(\lambda, e) := c(e) - \lambda \cdot \pi(e)$

$G_\lambda^\star$: Dual-Graph mit $e^\star$ hat Kosten $c(\lambda, e^\star) := c(\lambda, e)$.

Lemma

G besitzt gültigen $s - t$-Fluß mit Wert λ

$\Leftrightarrow$

$G_\lambda^\star$ enthält keinen negativen Kreis

Liefert parametrisches Kürzeste-Wege-Problem!

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis

Lemma

G besitzt gültigen $s-t$-Fluß mit Wert λ

$\Leftrightarrow$

$G^\star_\lambda$ enthält keinen negativen Kreis

" $\Rightarrow$ "

$G^\star_\lambda$ enthält Kreis $C^\star$.

$c(\lambda, C^\star) = \sum_{e \in C} c(\lambda, e) = \sum_{e \in C} c(e) - \lambda \cdot \pi(C) < 0$

$\pi(C) > 0$, also C (s,t)-Schnitt mit Gewicht $\leq \lambda$.

" $\Leftarrow$ "

Wähle $o \in V(G^\star)$ beliebig, betrachte Distanzen von o.

Setze $\phi(\lambda, e) := dist(\lambda, head(e^\star)) - dist(\lambda, tail(e^\star)) + \lambda \cdot \pi(e)$.

Flußbedingung: $\sum_w \phi(\lambda, v \to W) = \sum_w \lambda\pi(v \to w) = 0$ für $v \neq s, t$.

Kapazitätsbedingung:

Für $e \in E$ gilt: $dist(\lambda, head(e^\star)) \leq dist(\lambda, tail(e^\star)) + c(\lambda, e)$

Also $\phi(\lambda, e) \leq \lambda \cdot \pi(e) + c(\lambda, e) = c(e)$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Parametrische Kürzeste Wege

Löse also spezielles parametrisches Kürzeste-Wege-Problem Koeffizienten $-1, 0, 1$

Verwalte Kürzeste-Wege-Baum T_λ in $G^\star_\lambda$ mit Wurzel o.
PlanarMaxFlow(G,c,s,t)

- Berechnet T_0
- Verwalte T_λ, während λ kontinuierlich von 0 bis λ_{max} läuft.
- Berechnet $\phi(\lambda_{\text{max}}, \cdot)$ aus $T_{\lambda_{\text{max}}}$.

Lemma

λ_{max} ist erster kritischer Wert von λ, dessen Pivot einen gerichteten Kreis in T_λ erzeugt.

Laufzeit

Zeige weiter,

- Iteration lässt sich in $O(\log n)$ Zeit implementieren mittels top-trees
- Spezielle Struktur $\Rightarrow O(n)$ Pivot-Schritte

$\rightsquigarrow$ Gesamtlaufzeit $O(n \log n)$

siehe
"Maximum Flows and Parametric Shortest Paths in Planar Graphs",
Jeff Erickson, SODA'10