Drittes Übungsblatt

Ausgabe: 4. Mai 2012
Abgabe: keine, wird im Rahmen der Vorlesung besprochen

Sei ein einfacher, zusammenhängender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten gegeben. Der Graph G sei kombinatorisch eingebettet, d.h. dargestellt als $\mathcal{G} = (V, \vec{E}, s, t, \Theta, ^{-})$, wobei $\mathcal{G}$ in der Form ,,erweiterter Inzidenzlisten” gespeichert sei:
Es gibt eine doppelt verkettete Liste von Zeigern auf die *Knoten*. Ein *Knoten* ist dargestellt als eine zirkulär verkettete Liste von *gerichteten Kanten*, die im Gegenuhrzeigersinn geordnet sind. Die Nachfolgekante (“links”) von e ist $\Theta(e)$. Eine *gerichtete Kante* $e \in \vec{E}$ besteht aus einem Zeiger auf die Kante $\bar{e}$ (e in entgegengesetzter Richtung) und einem Zeiger auf den Fußknoten der Kante. Dadurch sind die Funktionen s(ource), t(arget), $^{-}$, Θ und $\Theta^*(e) := \Theta(\bar{e})$ repräsentiert. Alle Funktionen können so in konstanter Zeit berechnet werden.

1 Triangulierung

1. Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung $\mathcal{G}'$ findet.
   (Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten. Eine Möglichkeit ist, zuerst einen Graph G'' zu konstruieren, der Mehrfachkanten enthalten darf, und in einem zweiten Schritt Mehrfachkanten geeignet durch andere Kanten zu ersetzen.)

2. Führen Sie Ihren Algorithmus an folgenden Beispielgraphen aus und numerieren Sie jeweils die von Ihrem Algorithmus eingefügten Kanten in der Reihenfolge, in der Ihr Algorithmus sie einfügt.

   a) $K_{1,2}$ b) $K_{1,3}$ c) Q_2 d) G_1

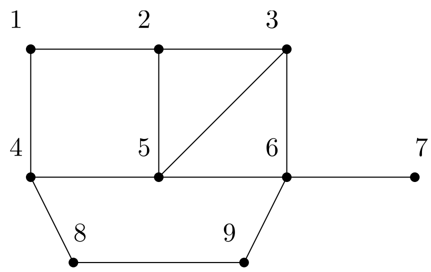

Figure 1: Der Graph G_1 zu Aufgabe 5

Bitte Wenden

2 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^*. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^*, (E \setminus E')^*)$ von G^* unzusammenhängend ist.

2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^* = (V^*, E^*)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^*, (E \setminus E')^*)$ ein aufspannender Baum von G^* ist.

3 Färbung von Graphen

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

2. Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$ gilt.

3. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

4 Färbung von planaren Graphen

Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der einen planaren Graphen $G = (V, E)$ mit sechs Farben färbt.

Bonusfrage: Lässt sich Ihr Algorithmus so verallgemeinern, dass er den Graphen auch in Linearzeit mit fünf Farben färbt?

5 Adjazenztest in planaren Graphen

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können. Das heißt, gegeben zwei Knoten u und v von G, kann die Frage ob die Kante $\{u, v\}$ in G ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.

Hinweis: Richten Sie die Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.

Bonusfrage: Lässt sich die Datenstruktur so erweitern, dass auch abgefragt werden kann, ob u und v durch einen Weg aus höchstens zwei Kanten verbunden sind?