Fünftes Übungsblatt

Ausgabe: 23. Mai 2012
Abgabe: keine, wird in der Vorlesung besprochen

1 Erhöhende Wege

Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph (jede Kante hat einen Knoten in V_1 und einen in V_2). Weiter sei v ein Knoten und M' ein kardinalitätsmaximales Matching für $G - v$, wobei v nicht „gematcht" ist (d.h. v ist zu keiner Kante aus M' inzident). Gesucht ist nun ein kardinalitätsmaximales Matching für G. Dazu soll Lemma 5.2 der Vorlesung benutzt werden: Falls es keinen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt, ist M' bereits das gesuchte Matching. Ansonsten müssen wir einen erhöhenden Weg P bzgl M' mit Endknoten v bestimmen, dann ist $(M' \cup P) \setminus (M' \cap P)$ das gewünschte Matching.

Geben Sie einen Algorithmus an, der feststellt, ob es einen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt und diesen gegebenenfalls bestimmt. Die Laufzeit soll linear in der Anzahl der Kanten von G sein.
(Hinweis: Modifizieren Sie eine Breitensuche mit Startknoten v)

2 Matching-Anwendung

Um die Position im dreidimensionalen Raum von n Objekten $O_1, \dots O_n$ zu bestimmen, werden zwei Sensoren S_1 und S_2 verwendet, die jeweils die Objekte anpeilen können und somit für jedes Objekt eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ bestimmen, auf der der Sensor S und das Objekt O_k liegen. Angenommen, keine dieser Geraden fallen zusammen, so schneiden sich jeweils die Geraden S_1O_k und S_2O_k.

Das Problem ist nun einerseits, dass S_1 die Geraden $L_{1,i}$ und S_2 die Geraden $L_{2,j}$ liefert, aber wir wissen zu keiner dieser Geraden, welches Objekt angepeilt wurde. Andererseits messen die Sensoren nicht exakt, sondern es treten Messfehler auf, so dass sich zugehörige Geraden nicht unbedingt schneiden. Jedoch gilt für die Geraden $L_{1,i}$ und $L_{2,j}$, für die dasselbe Objekt angepeilt wurde, dass der Abstand $d(L_{1,i}, L_{2,j})$ dieser Geraden sehr klein ist.

Bestimmen Sie eine Zuordnung der Geraden, also n Paare (i_k, j_k) $(k = 1, \dots, n)$, so dass die Summe der Abstünde

$$\sum_{k=1}^{n} d(L_{1,i_k}, L_{2,j_k})$$

minimiert wird. Formulieren sie dazu das Problem als Matching Problem.

Bitte wenden

3 Berechnung eines schwersten Kreises

Im Folgenden sei der Algorithmus aus Lemma 6.6 noch einmal präzisiert: In einem 3-regulären planaren Graphen G, der keinen positiven Kreis enthält, kann ein negativer einfacher Kreis maximalen Gewichts in $\mathcal{O}(n^{3/2} \log n)$ bestimmt werden.

Schritt 1: Berechne eine Partition S, V_1, V_2 in G, die die Bedingungen des Planar-Separator-Theorems erfüllt.

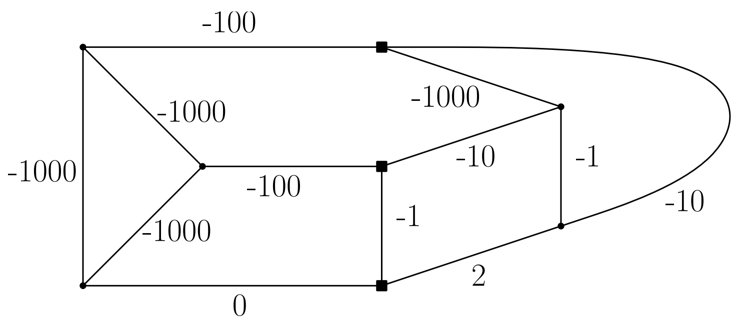
Schritt 2: Berechne rekursiv negative einfache Kreise maximalen Gewichts in den durch V_1 und V_2 induzierten Subgraphen von G. Hierzu muss zunächst durch iteratives Entfernen von Grad-1-Knoten und Kompression von Grad-2-Knoten 3-Regularität hergestellt werden.

Schritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts *in G, der v_i enthält, wie folgt:*
Konstruiere zu G den Graphen G' gemäß Schritt 3 des Mixed-Max-Cut-Algorithmus. Für jeden Knoten $v_i \in S$ erweitere G' zu G'_{v_i}, indem v_i durch den durch $\{u', u'', v', v'', w', w''\}$ induzierten Subgraphen (vgl. Abb. 6.4, rechts) ersetzt wird (jeder dieser Graphen enthält also die Knoten w' und w'' genau einmal), und bestimme in $\mathcal{O}(n \log n)$ ein perfektes Matching minimalen Gewichts von G'_{v_i}; berechne den dazu korrespondierenden negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G.

Schritt 4: Gib den Kreis maximalen Gewichts unter allen konstruierten Kreisen aus. Dieser ist der gewünschte Kreis in G, da jeder einfache Kreis in G entweder ganz in G_1 oder ganz in G_2 liegt *oder (mindestens) ein $v_i \in S$ enthält.*

Aufgabe: Wenden Sie diesen Algorithmus schrittweise auf den nachfolgenden Graphen an.

Hinweise: Wählen Sie dabei für die Separatormenge S in Schritt 2 die durch fettere Quadrate bezeichneten Knoten. Subroutinen wie das Finden eines Matchings brauchen nicht detailliert nachvollzogen, sondern können "einfach angegeben" werden.



4 Via-Minimierung und Knock-Knees

Definition: Gegeben sei ein Layout L für das Via-Minimierungsproblem. Unter einem *Knock-knee* in L verstehen wir zwei in einem Gitterpunkt gegeneinander abknickende Kanten (Drähte).

Aufgabe: Geben Sie ein Layout mit Knock-knee an, das nicht in zwei Lagen realisierbar ist, und begründen sie dies kurz.