Heute

- Medium Access Control / Färbungen, Teil 2
  - kurze Wiederholung
  - Schöner verteilter Färbungsalgorithmus
- Kapazität & Scheduling
  - Interferenz etwas realistischer
  - neue Probleme und Herangehensweisen

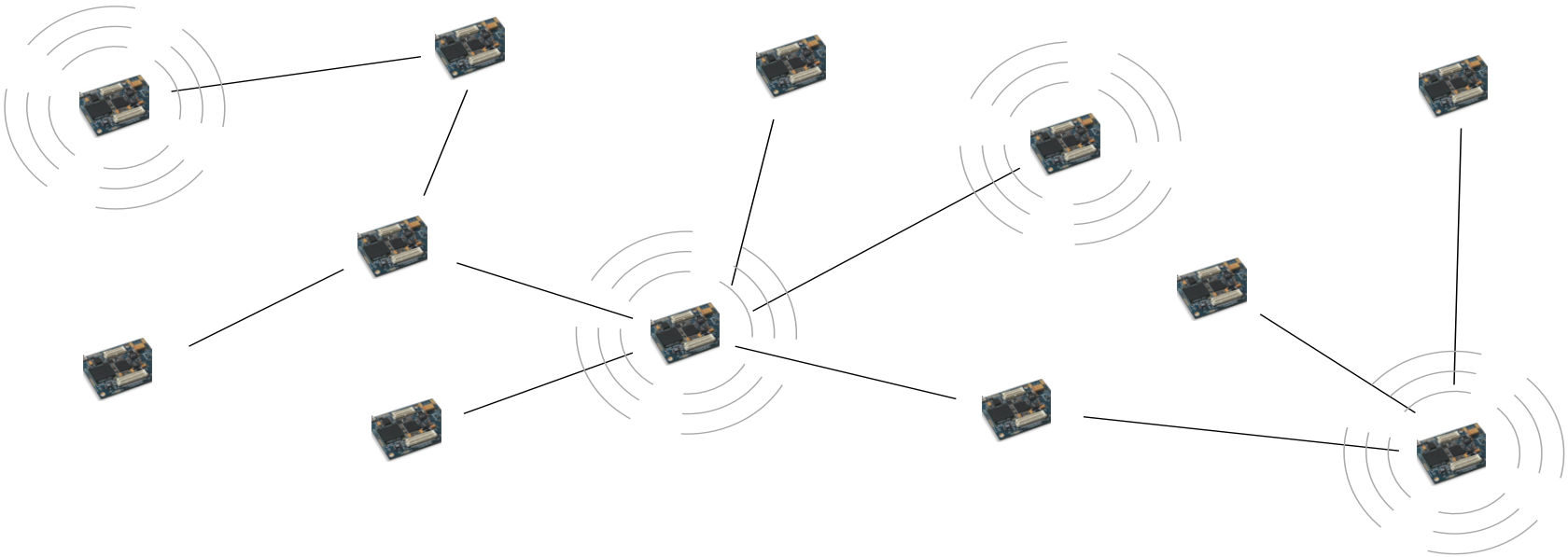
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Ad-hoc- und Sensornetze

VL 10 – Eine kurze Geschichte vom Färben (Teil 2)

Markus Völker | 04. Juli 2012 (Version 1)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK - LEHRSTUHL FÜR ALGORITHMIK (PROF. WAGNER)



Erinnerung: MAC-Layer

- Übertragungen können nicht beliebig parallel stattfinden
  - Interferenzen naher Übertragungen verhindert erfolgreiches Dekodieren
- Lösung 1: CSMA/CA
  - Spontane Benutzung des Mediums, aber vorsichtig
  - Warten auf freien Kanal, Anfragen beim Empfänger
  - Übliche Lösung, kostet aber Energie (Kollisionen, Mithören)
- Lösung 2: TDMA/CDMA/FDMA
  - feste Zuweisung von Zeiten/Codierung/Frequenzen an Sender/Übertragungen
  - gleiche Ressource immer nur so genutzt, dass es keine Konflikte geben sollte
  - (Noch) wenig populär in WSN

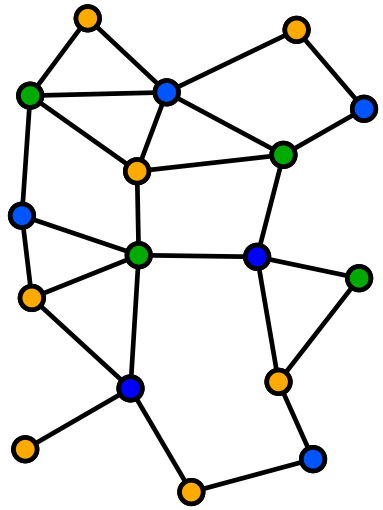
Erinnerung: Färbungen

Definition

Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $c : V \to \mathbb{N}$, so dass für jede Kante die beiden Endpunkte unterschiedliche Farben haben, also

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

- Eine Färbung c hat die Größe $|c| = \max_{v \in V} c(v)$



- darauf lassen sich allgemeinere Färbungsprobleme reduzieren
- es gibt immer eine $\Delta + 1$-Färbung
  - in jeder schlechteren Färbung kann man die Farbe eines Knotens herabsetzen
  - das ging auch verteilt, aber bisher nur langsam

Satz

Satz

Es gibt einen verteilten Algorithmus, der eine $\Delta + 1$-Färbung in $O(\Delta^2 + \log_2^*(n))$ Schritten berechnet.

- $\log^*(n)$: Anzahl der Anwendungen von log, bevor das Argument unter 1 fällt. (Bsp.: $\log_2^*(10^{50}) = 5$)
- Andere Möglichkeit sich das zu merken:

$$\log_2^*(x) = 5 \Leftrightarrow 2^{2^{2^2}} < x \leq 2^{2^{2^{2^2}}}$$

Beweisstruktur

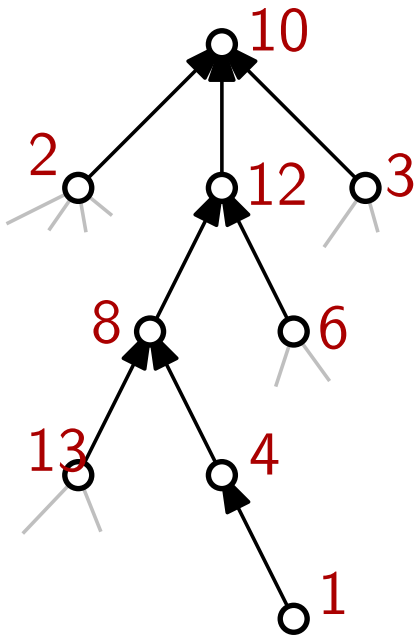
Beweisstruktur

- es gibt einen Algorithmus, der in einem Baum in $\log^*(n)$ Schritten eine 6-Färbung berechnet
- es gibt einen Algorithmus, der in einem Baum in k Runden eine Färbung mit $3 + k$ Farben auf 3 Farben reduziert
- beide Verfahren funktionieren auch auf „Pseudo-Wäldern“
- jeder Graph läßt sich in konstanter Zeit verteilt in Δ Pseudo-Wälder zerlegen
- Δ Färbungen mit je 3 Farben lassen sich in Δ^2 Runden auf $\Delta + 1$ Farben reduzieren

6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

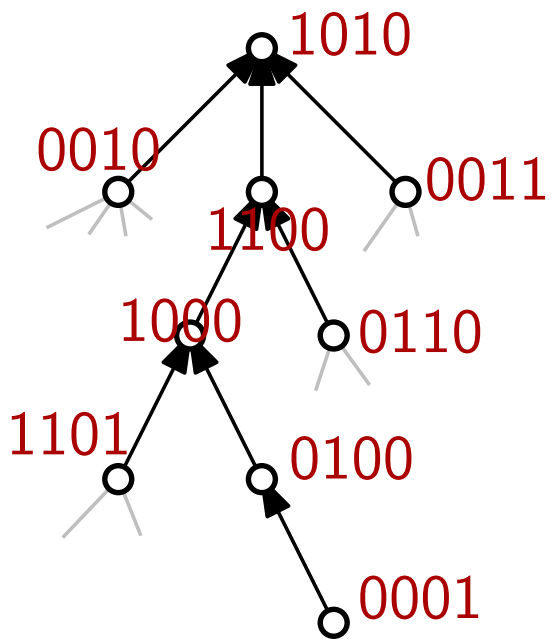
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

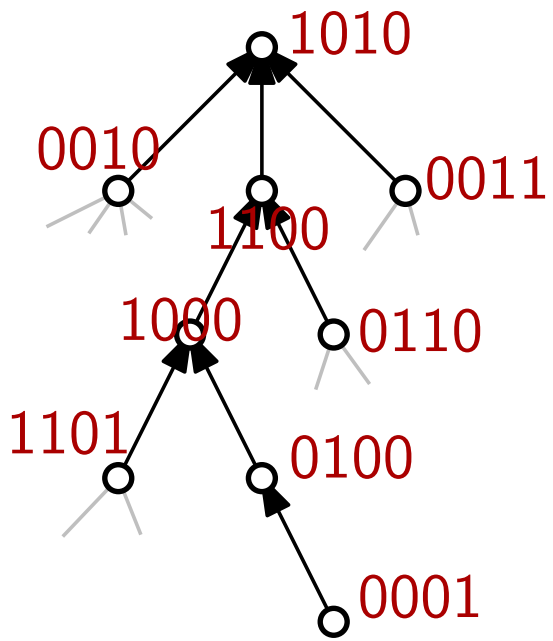
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

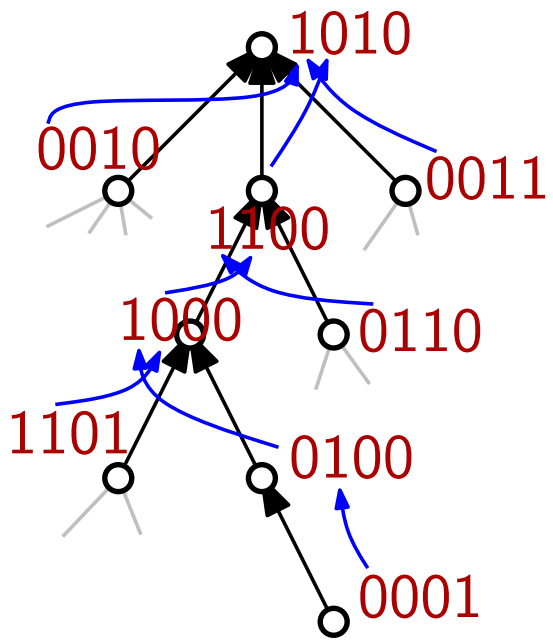
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

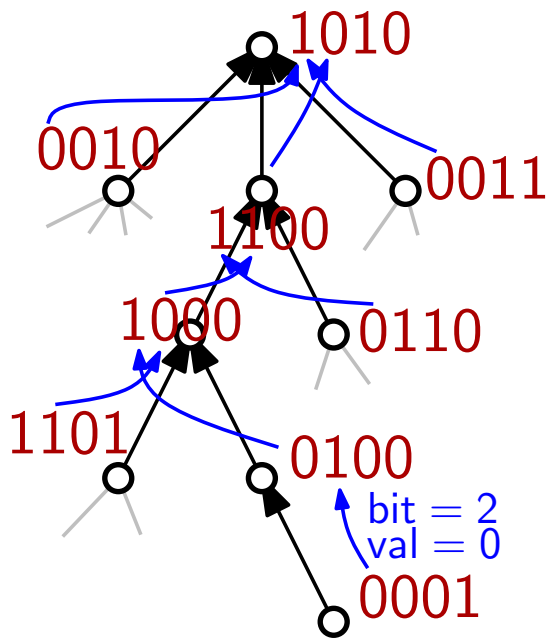
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

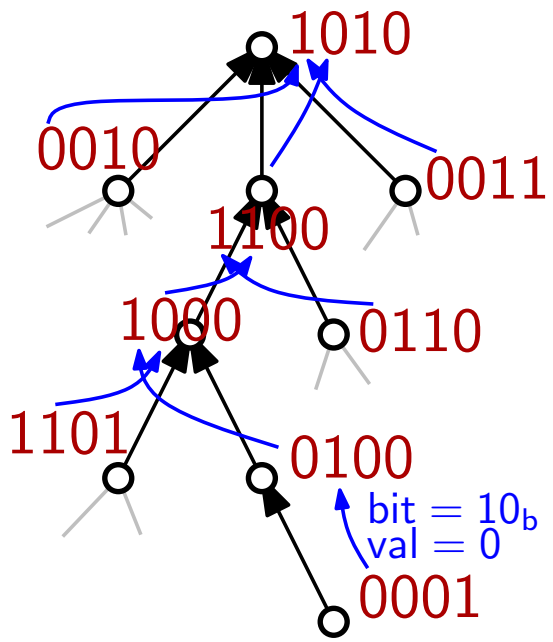
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

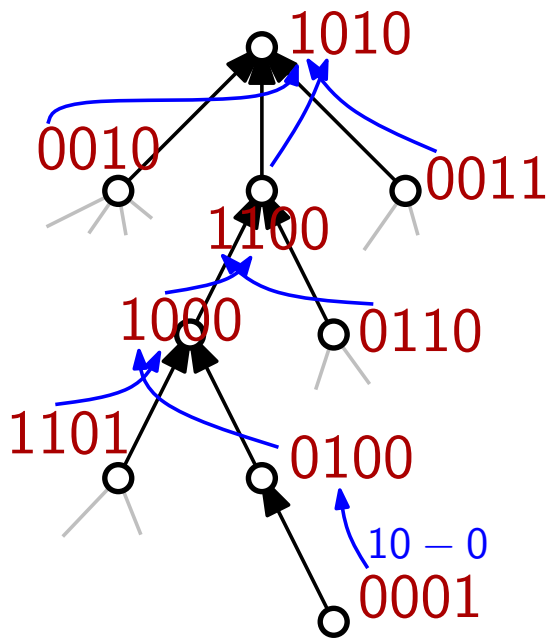
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

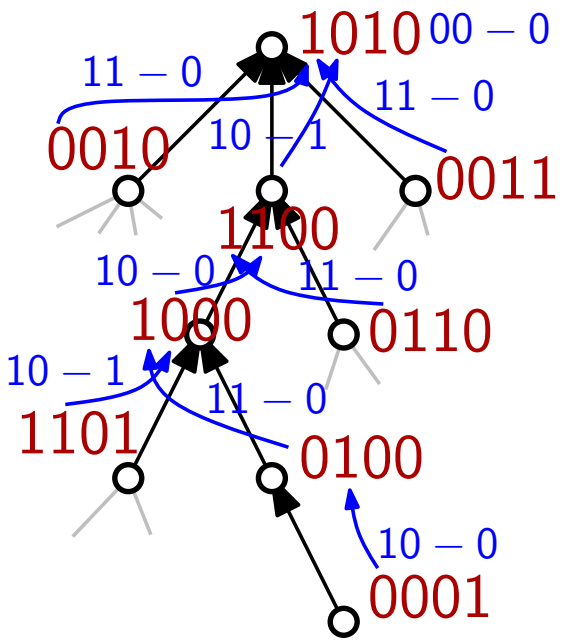
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

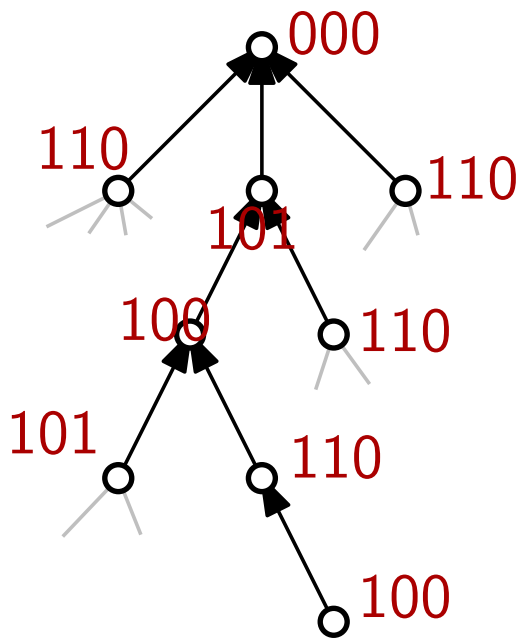
1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



6-Färbung eines Baumes

6-Färbung eines Baumes

1. schreibe Label binär in $\log_2 n$ Bits
   - (dafür muss a priori zumindest obere Schranke an n bekannt sein)
2. Setze $L = \log_2 n$ (aktuelle Labellänge)
3. Solange $L > 3$ und dann noch einmal:
   - suche ein Bit, in dem sich das eigene Label und das des Vorgängers unterscheiden
   - kodiere dessen Position in $\log_2(L)$ Bits
   - verwende als neues Label die kodierte Position und den Wert des eigenen Bits
   - die Wurzel wählt dafür beliebiges Bit aus
   - setze $L = \log_2(L) + 1$ (neue Labellänge)



Korrektheit Baum-6-Färbung

Satz

Der beschriebene Algorithmus berechnet eine 6-Färbung.

- Nach jeder Runde liegt eine Färbung des Baumes vor
  - Annahme: zwei Knoten haben nach einer Runde dasselbe Label
  - dann haben sie beide dasselbe Bit ausgewählt und hatten dort vorher denselben Wert stehen
  - aber das Kind sollte Bit wählen, in dem es sich vom Vorgänger unterscheidet! Widerspruch!
- Die Färbung enthält zum Schluss maximal 6 Farben
  - L ist immer aktuelle Labellänge
  - sobald $L \leq 3$ wird noch eine Runde ausgeführt.
  - dann reichen die drei Beschreibungen $00, 01, 10$ für die Position
  - dann gibt es nur noch die Labels $000, 001, 010, 011, 100, 101$

Laufzeit Baum-6-Färbung

Satz

Der beschriebene Algorithmus terminiert nach $O(\log^*(n))$ Schritten.

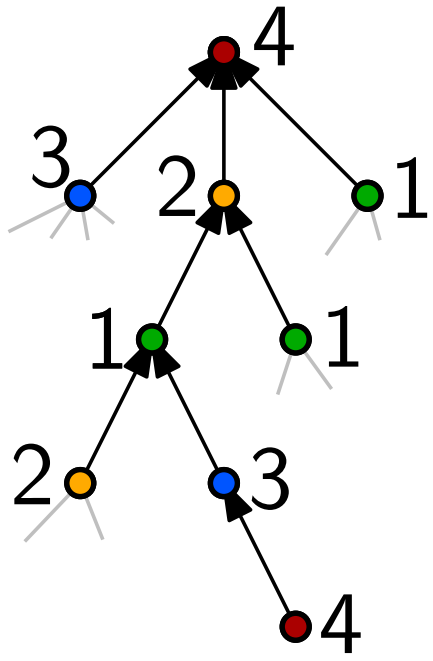
- Das werden wir nicht beweisen.
- Grobe Vorstellung:
  - in jeder Runde wird die Labellänge von L auf $\log_2(L) + 1$ gedrückt
  - ohne das $+1$ wäre die Aussage klar
  - ein bisschen Formelschieberei löst das Problem
    (bei Interesse an den Details: siehe Buch)

Das war schon Teil 1: Wir können einen Baum in $O(\log^*(n))$ Schritten mit 6 Farben färben!

Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3 + k), \ldots, 4$ tue folgendes:

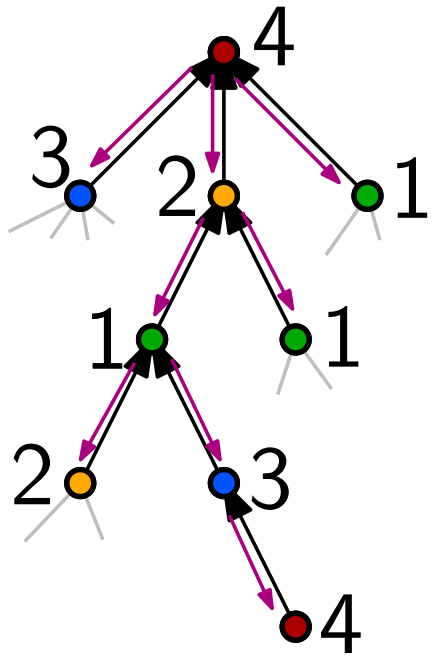


Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3 + k), \ldots, 4$ tue folgendes:

1. jeder Knoten nimmt die Farbe seines Vorgängers an („shift down“)
   - Wurzel nimmt *neue Farbe* aus $\{1, 2, 3\}$

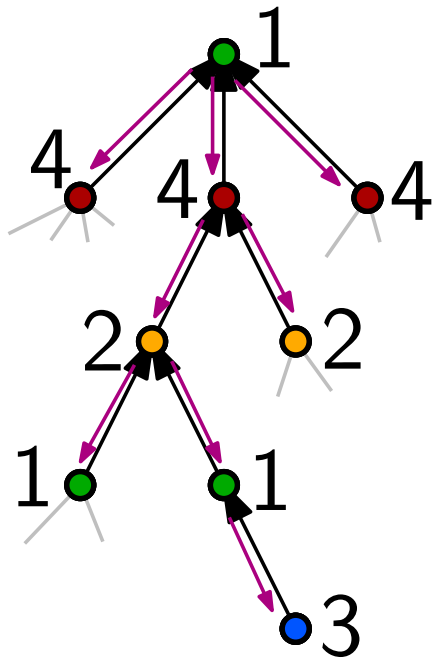


Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3 + k), \ldots, 4$ tue folgendes:

1. jeder Knoten nimmt die Farbe seines Vorgängers an („shift down“)
   - Wurzel nimmt *neue Farbe* aus $\{1, 2, 3\}$

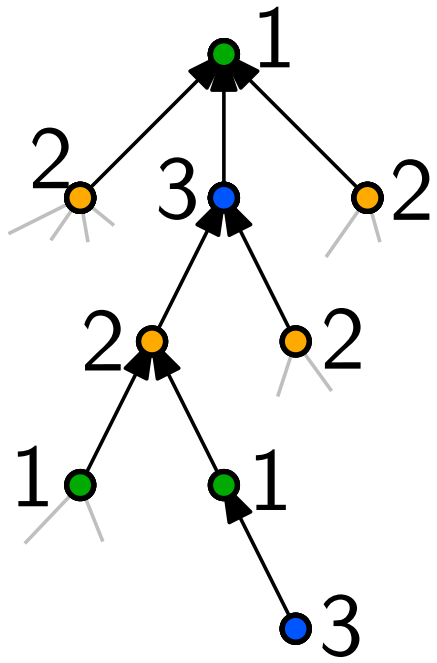


Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3 + k), \ldots, 4$ tue folgendes:

1. jeder Knoten nimmt die Farbe seines Vorgängers an („shift down“)
   - Wurzel nimmt *neue Farbe* aus $\{1, 2, 3\}$
2. jeder Knoten mit Farbe i wählt Farbe aus $\{1, 2, 3\}$, die kein Nachbar hat

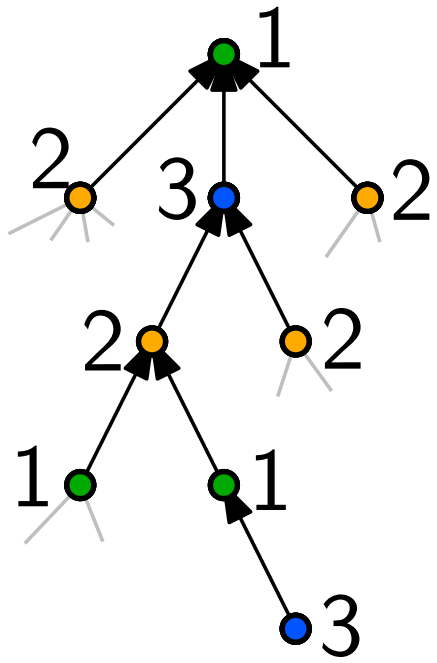


Kompression von 6 auf 3 Farben im Baum

Baum-(3+k)-zu-3-Färbung

Für $i = (3 + k), \ldots, 4$ tue folgendes:

1. jeder Knoten nimmt die Farbe seines Vorgängers an („shift down“)
   - Wurzel nimmt *neue Farbe* aus $\{1, 2, 3\}$
2. jeder Knoten mit Farbe i wählt Farbe aus $\{1, 2, 3\}$, die kein Nachbar hat



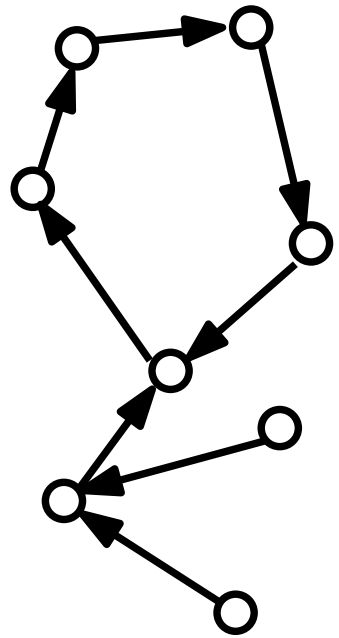
- Korrektheit:
  - nach einem Shift hat jeder Knoten die Farbe seines Vorgängers, und seine Kinder seine alte Farbe
    - das ist eine Färbung!
    - jeder Knoten „sieht“ nur 2 benachbarte Farben
  - in jeder Runde werden wir Farbe i los!
- nach k Runden je 2 Schritte haben wir noch 3 Farben!

Pseudo-Wälder (klingt schlimmer als es ist)

Definition Pseudo-Wald

Ein gerichteter Graph heißt *Pseudo-Wald*, wenn jeder Knoten höchstens eine ausgehende Kante hat.

- jeder Knoten zeigt auf maximal einen „Vorgänger“
  - Vorsicht: Graph kann gerichtete Kreise enthalten



Satz

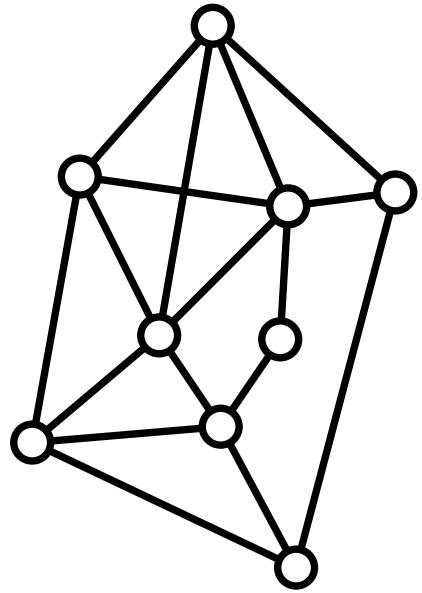
Die Dreifärbung von Pseudo-Wäldern funktioniert exakt wie bei Bäumen.

- Beweise gehen *exakt* wie vorher, nur gibt es ggf. mehrere Knoten ohne Vorgänger

Pseudo-Wald-Dekomposition

Definition

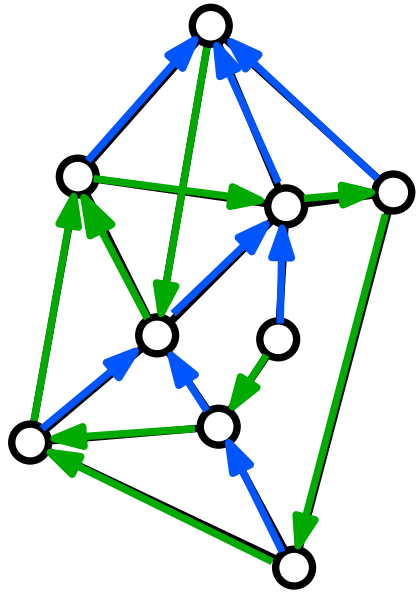
Eine *Pseudo-Wald-Dekomposition* eines Graphen G ist eine Menge von Pseudo-Wäldern $F_1, \ldots, F_\Delta$, so dass jede Kante von G in mindestens einem F_i vorkommt (in beliebiger Richtung).



Pseudo-Wald-Dekomposition

Definition

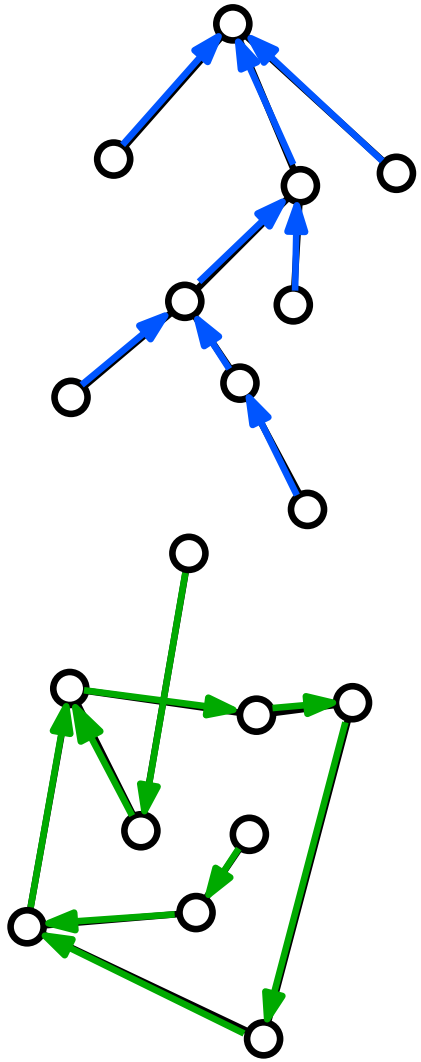
Eine *Pseudo-Wald-Dekomposition* eines Graphen G ist eine Menge von Pseudo-Wäldern $F_1, \ldots, F_\Delta$, so dass jede Kante von G in mindestens einem F_i vorkommt (in beliebiger Richtung).



Pseudo-Wald-Dekomposition

Definition

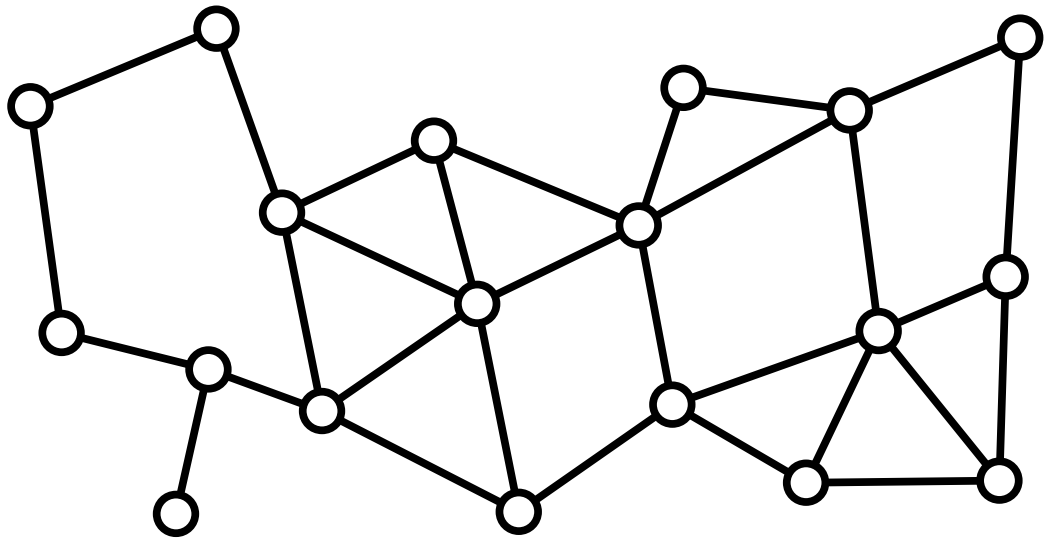
Eine *Pseudo-Wald-Dekomposition* eines Graphen G ist eine Menge von Pseudo-Wäldern $F_1, \ldots, F_\Delta$, so dass jede Kante von G in mindestens einem F_i vorkommt (in beliebiger Richtung).



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

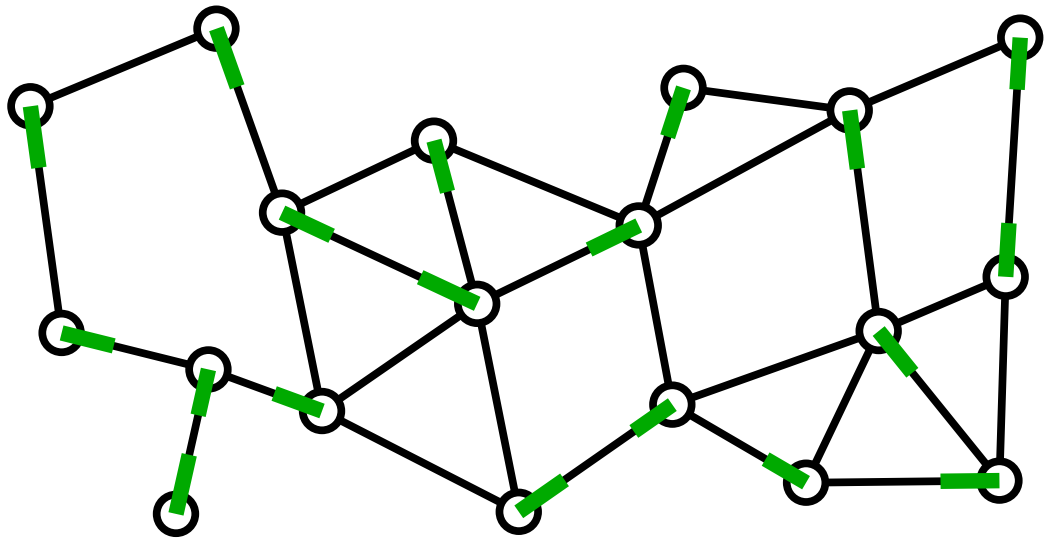
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

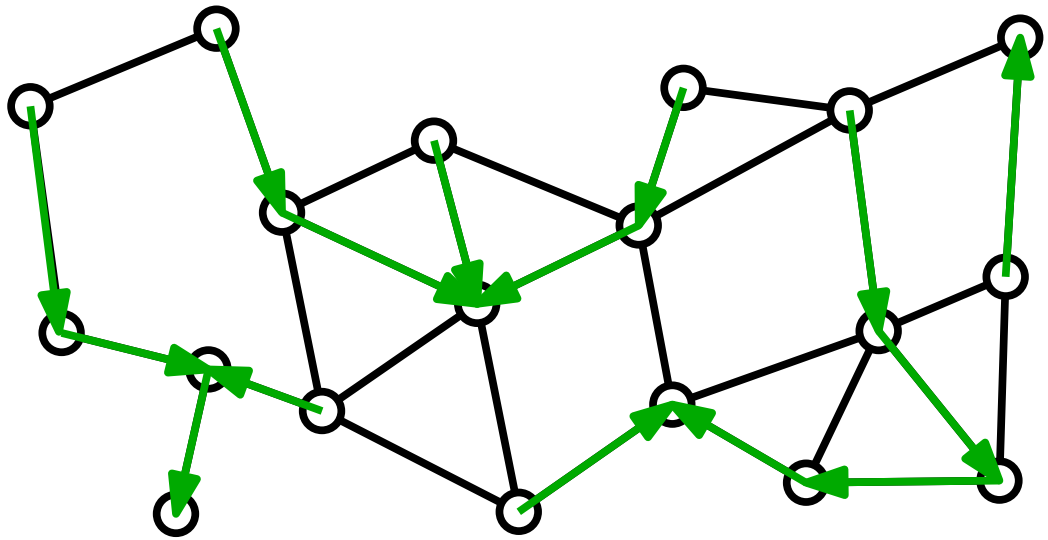
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

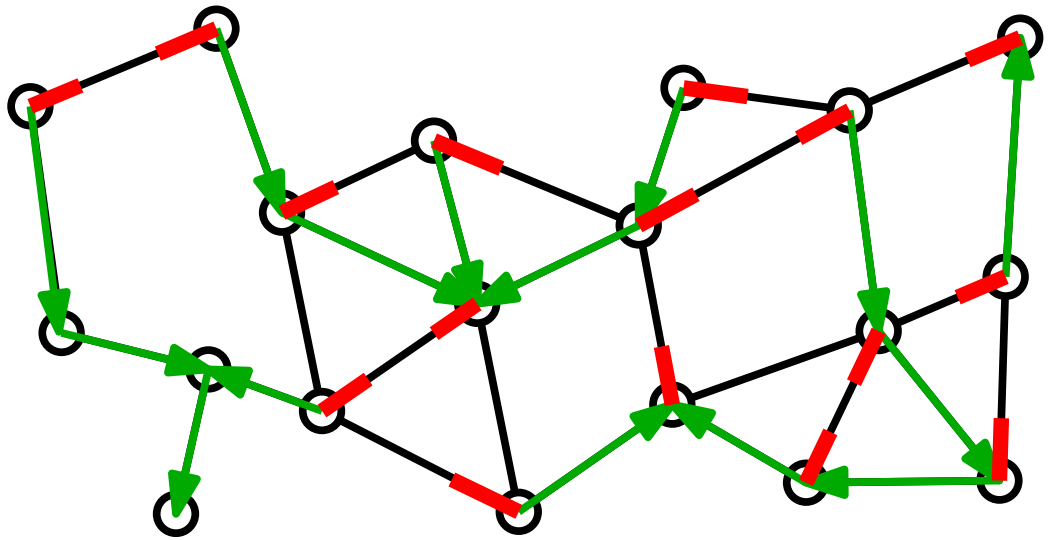
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

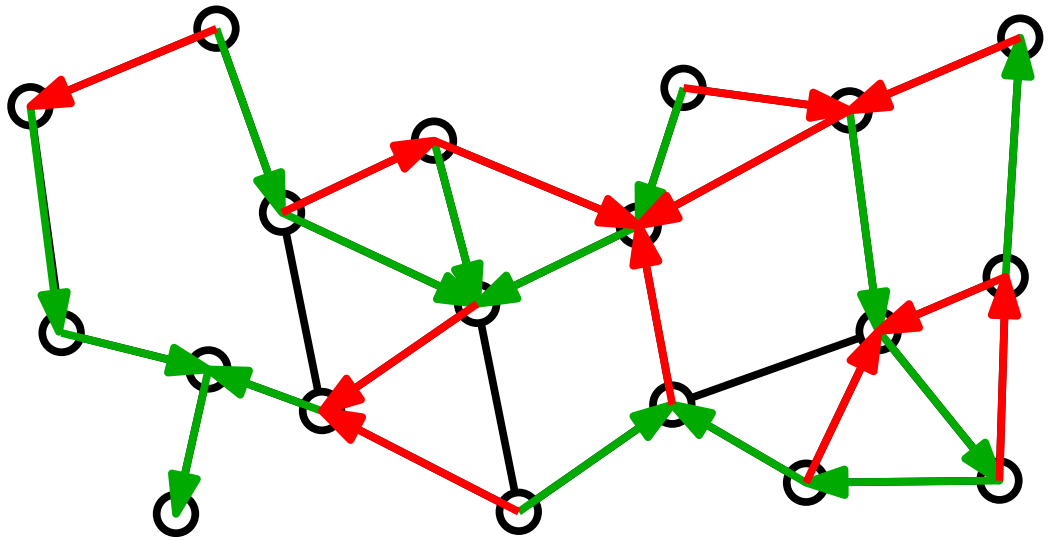
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

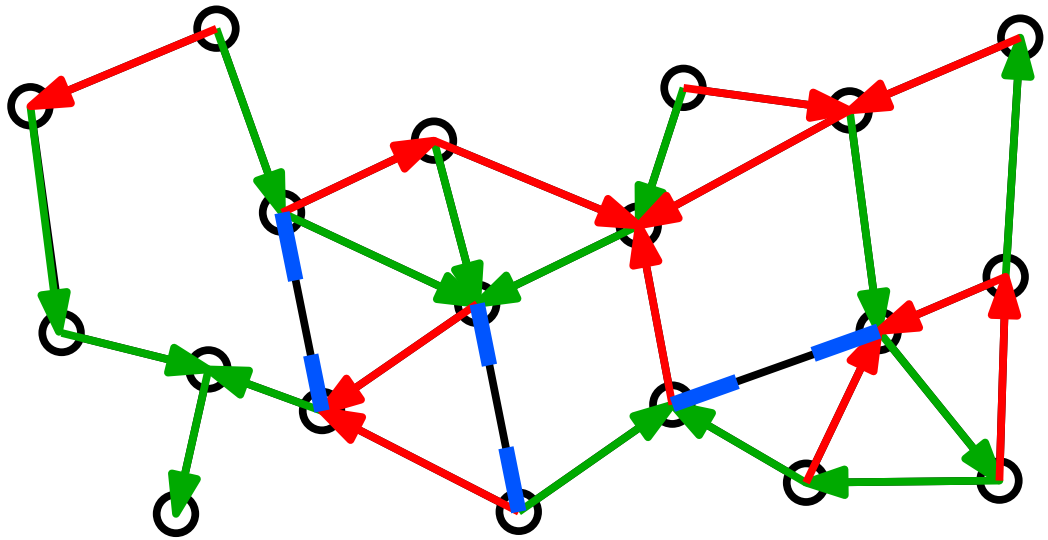
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

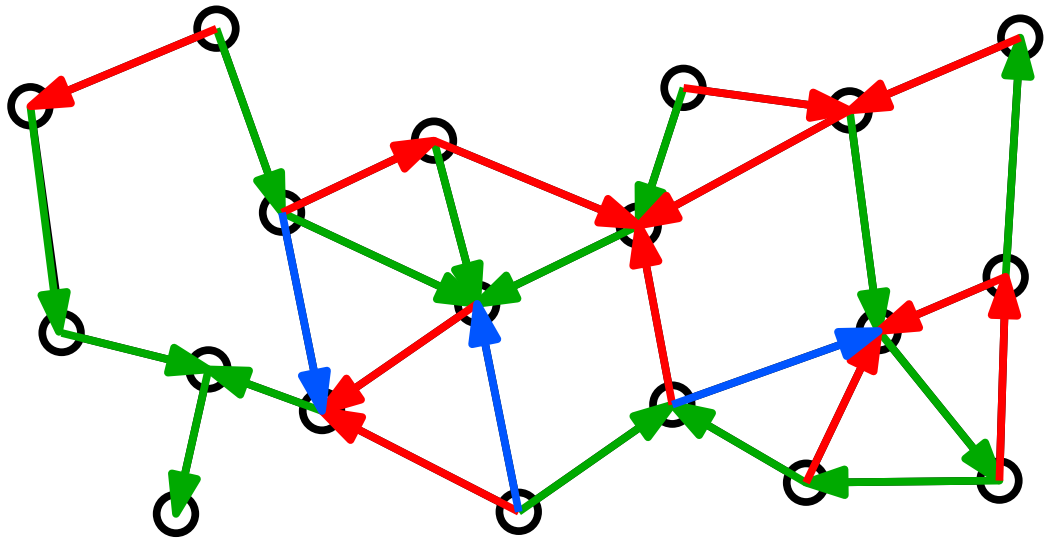
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

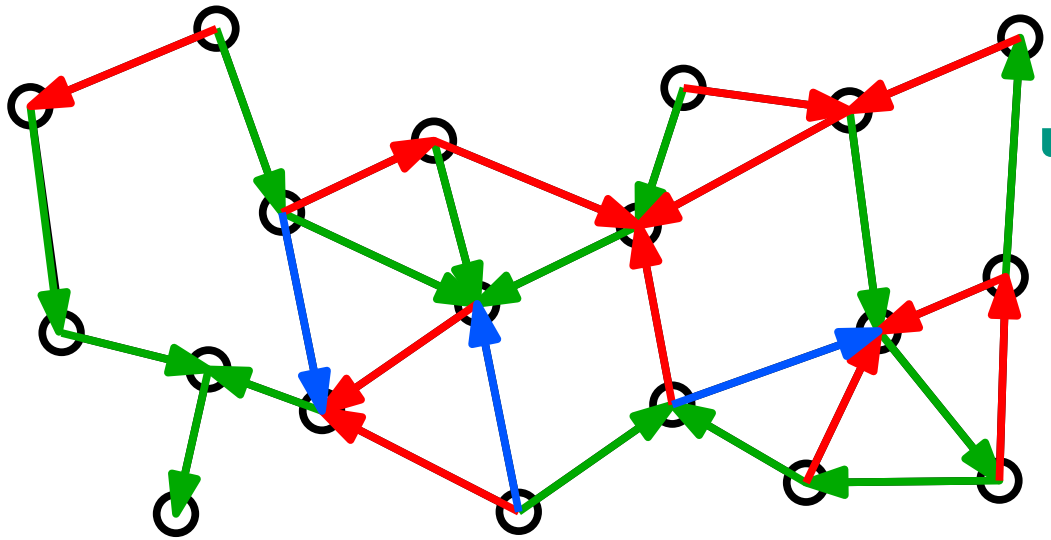
1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.

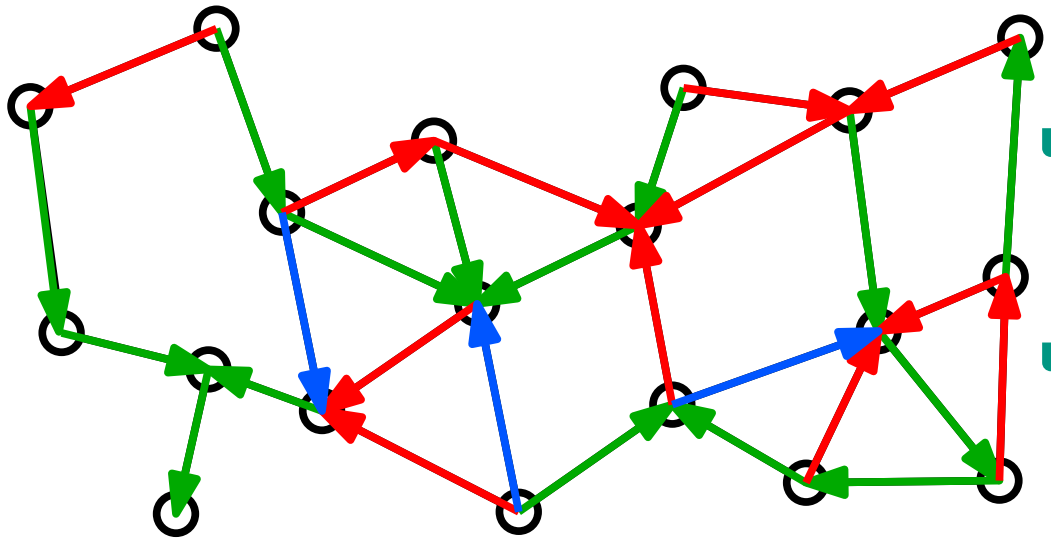


- nach Δ Runden (oder früher) sind alle Kanten markiert

Verteilte Pseudo-Wald-Dekomposition

Verteilte Dekomposition, Runde $i = 1, \ldots, \Delta$

1. jeder Knoten wählt eine inzidente unmarkierte Kante aus, wenn noch möglich
2. eine gewählte Kante $\{u, v\}$ wird markiert und zu F_i hinzugefügt, und zwar von einem Knoten weg, der sie wählte.



- nach Δ Runden (oder früher) sind alle Kanten markiert
- in jeder Runde wird ein Pseudo-Wald gewählt

Wo stehen wir?

- Wir können den Graphen in einem Schritt in Δ Pseudo-Wälder dekomponieren
- Wir können Bäume und Pseudo-Wälder verteilt mit 3 Farben einfärben
  - erst färben wir in $\log^*(n)$ Runden mit konstant vielen Schritten 6-farbig,
  - dann reduzieren wir die Farben in 3 Runden mit konstant vielen Schritten auf 3

$\Rightarrow$ Wir können in $O(\log^*(n))$ Schritten jeden der Pseudo-Wälder dreifärben

- das kann in allen Pseudowäldern parallel geschehen

was fangen wir mit Δ 3-Färbungen für die Pseudo-Wälder an? Wir wollen eine $\Delta + 1$-Färbung des Graphen!

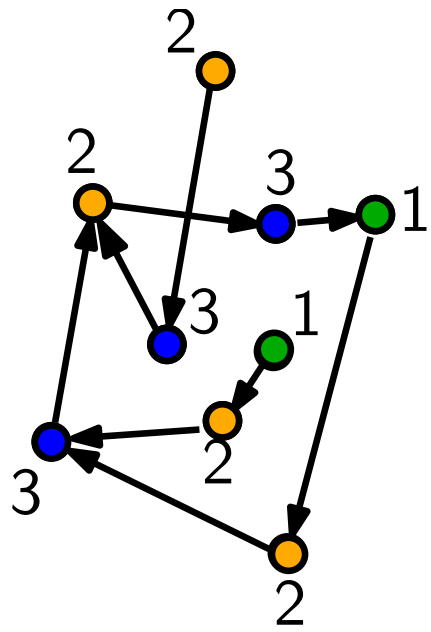
Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

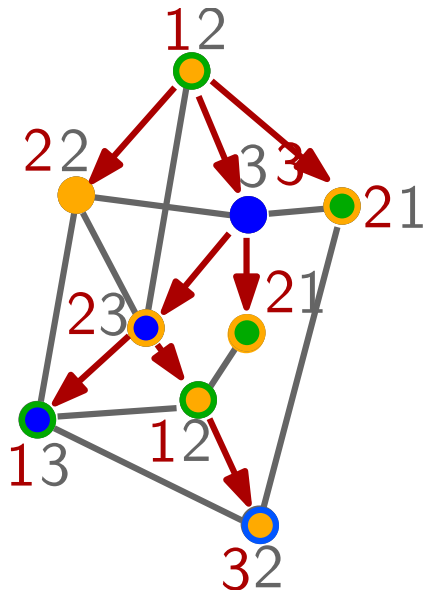
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

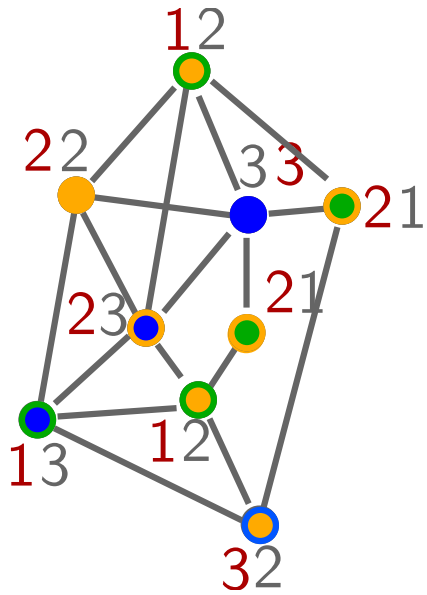
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

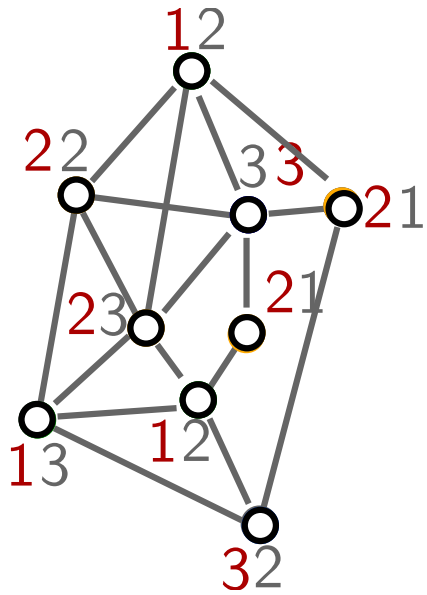
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

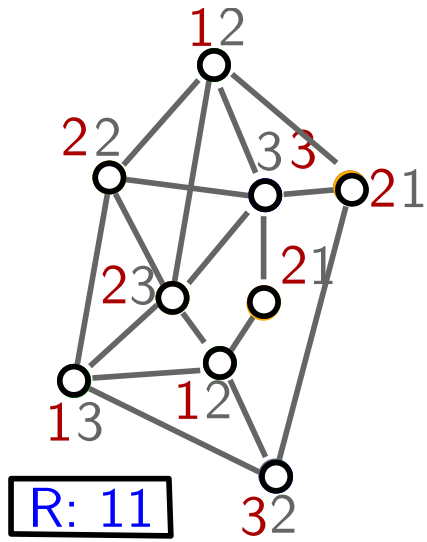
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

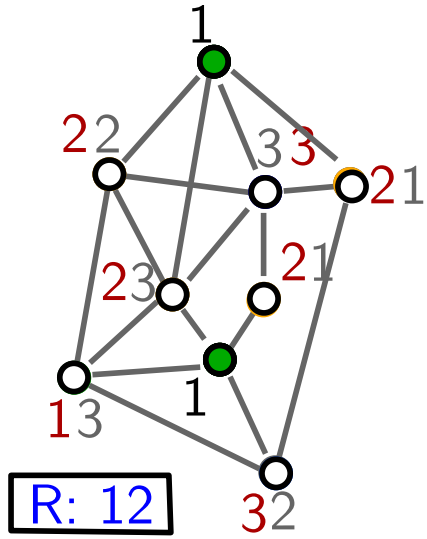
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

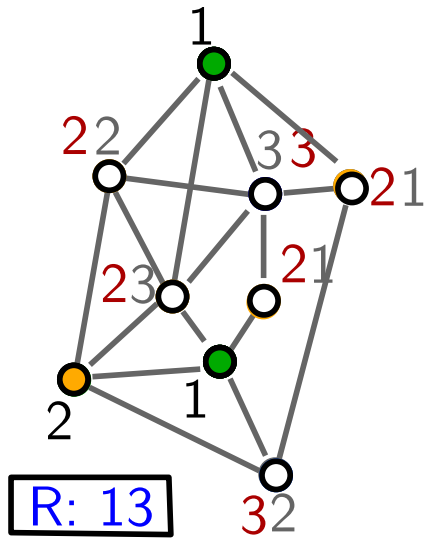
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

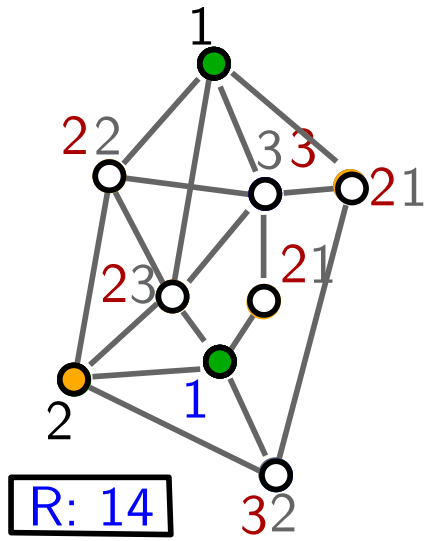
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

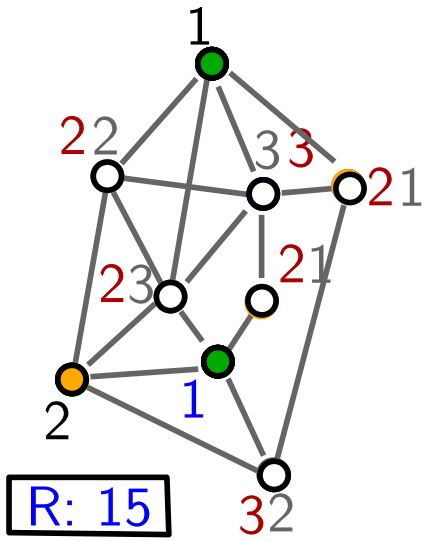
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

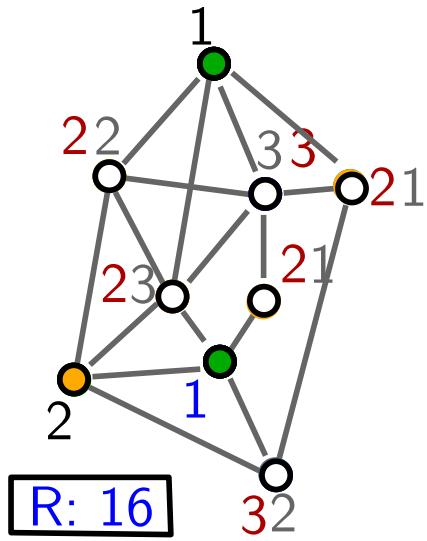
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

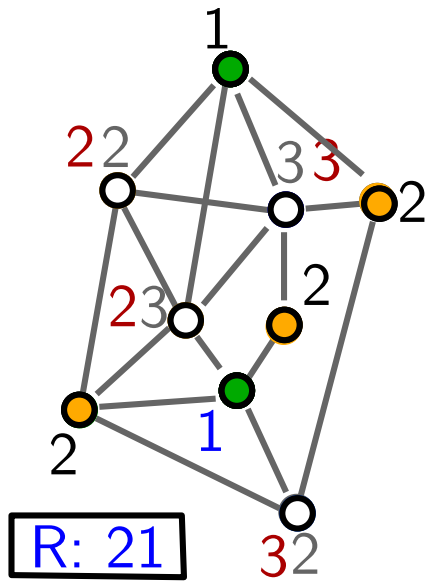
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

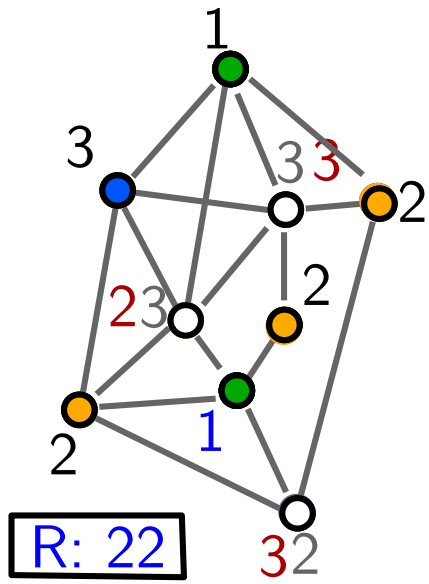
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

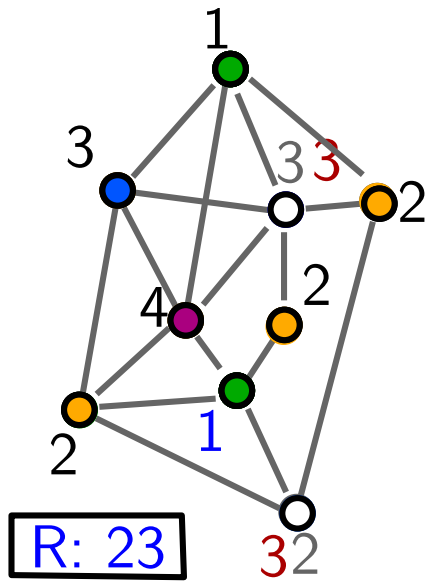
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

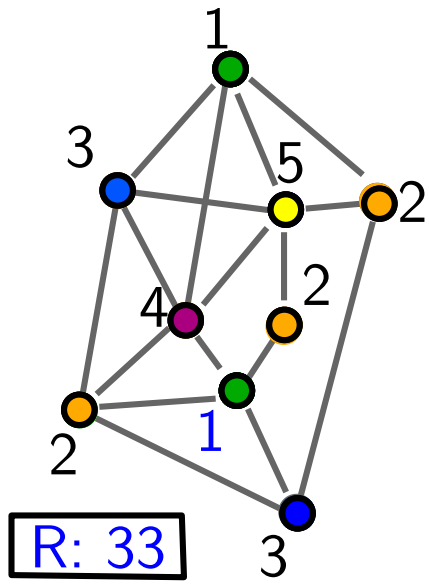
- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat



Färbungen zusammenführen

Idee: Wir blenden nacheinander die Kanten der Pseudo-Wälder ein und *warten* eine Färbung mit $\Delta + 1$ Farben!

- Wir beginnen mit F_1 und dessen 3 Farben
  - das ist eine $\Delta + 1$-Färbung von F_i
- die 3-Färbung von F_j und die $\Delta + 1$-Färbung von $F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}$ ergeben $3(\Delta + 1)$ „Mischfarben“ $(1, 0), \ldots, (3, \Delta + 1)$
- in $3(\Delta + 1)$ Runden können immer Knoten mit einer bestimmten Farbe eine einfache Farbe aus $\{1, \Delta + 1\}$ wählen, die keiner der Nachbarn hat
- das sind $\Delta \cdot 3\Delta = 3\Delta^2$ Runden zum Zusammenführen



Wo stehen wir jetzt?

- Wir können den Graphen in einem Schritt in Δ Pseudo-Wälder dekomponieren
- Wir können Bäume und Pseudo-Wälder verteilt mit 3 Farben einfärben
  - erst färben wir in $\log^*(n)$ Runden mit konstant vielen Schritten 6-farbig,
  - dann reduzieren wir die Farben in 3 Runden mit konstant vielen Schritten auf 3

$\Rightarrow$ Wir können in $O(\log^*(n))$ Schritten jeden der Pseudo-Wälder dreifärben

  - das kann ja in allen Pseudowäldern parallel geschehen

- wir können aus den 3-Färbungen für die Δ Pseudowälder in $O(\Delta^2)$ Schritten eine $\Delta + 1$-Färbung des eigentlichen Graphen gewinnen!
- wir sind fertig, Laufzeit insgesamt: $O(\Delta^2 + \log^* n)$

Zusammenfassung

- Färbungen sind ein leichtes Mittel, um gegenseitige Ausschlüsse zu modellieren
  - Knoten dürfen nicht gleichzeitig senden oder
  - Kanten dürfen nicht gleichzeitig aktiv sein
  - das lässt sich immer auf Knotenfärbungen reduzieren

- wir haben einen schnellen und verteilten Algorithmus für $\Delta + 1$-Färbungen kennengelernt!