

# Algorithmen für Routenplanung

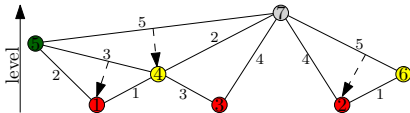
8. Sitzung, Sommersemester 2013

Julian Dibbelt | 22. Mai 2013

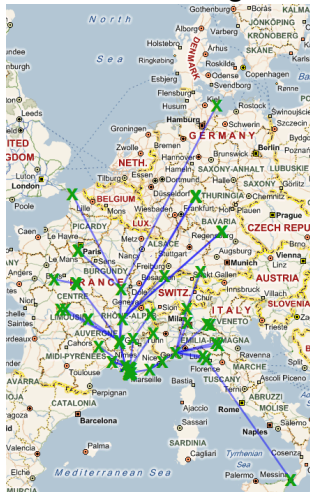
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



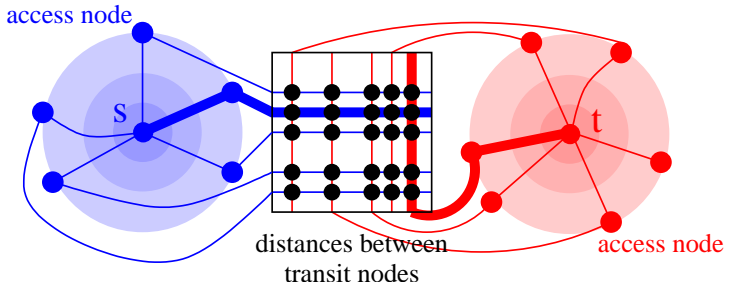
## Contraction Hierarchies



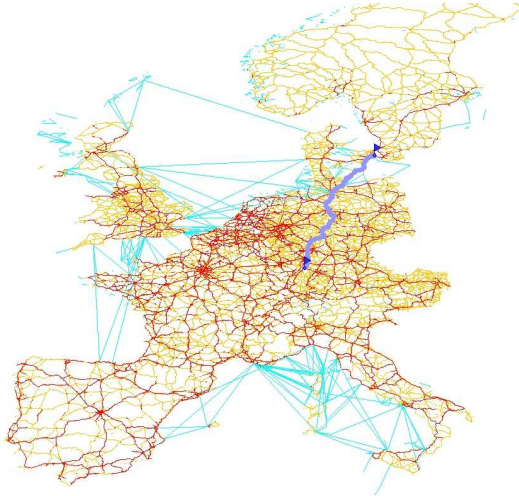
## Hub-Labeling



# Transit-Node Routing



# Transit-Node Routing

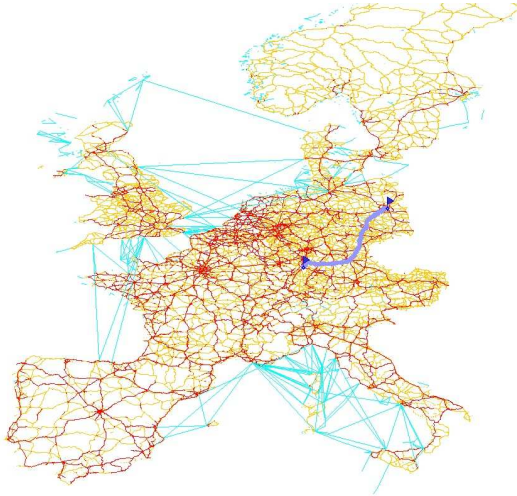


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach. . .  
Kopenhagen

# Transit-Node Routing

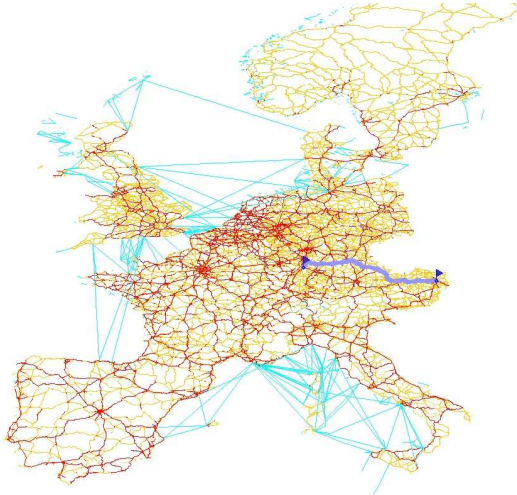


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Berlin

# Transit-Node Routing

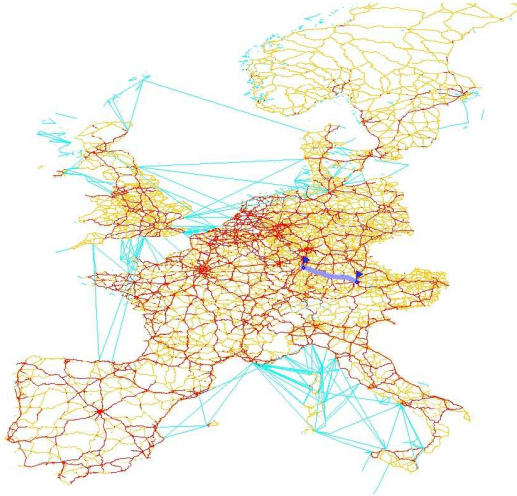


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Wien

# Transit-Node Routing

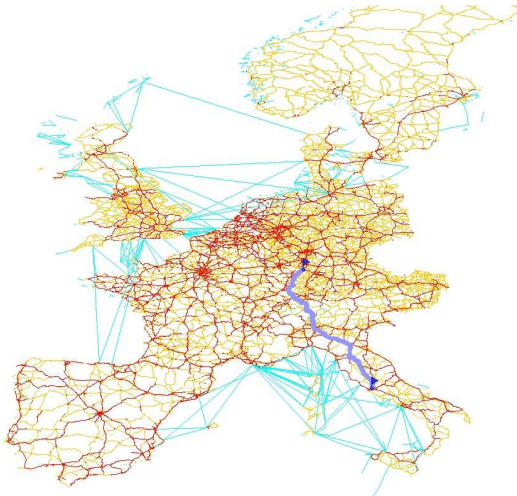


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
München

# Transit-Node Routing



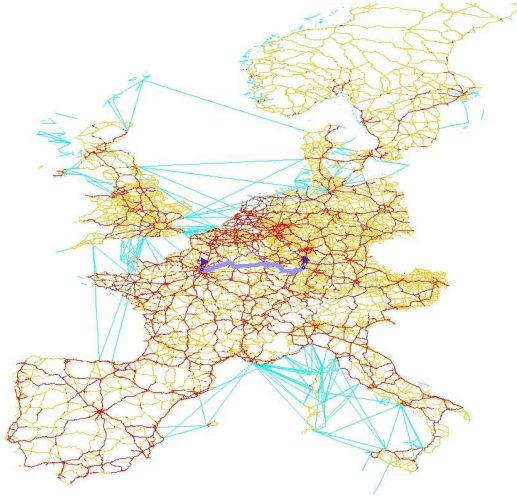
## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Rom



# Transit-Node Routing

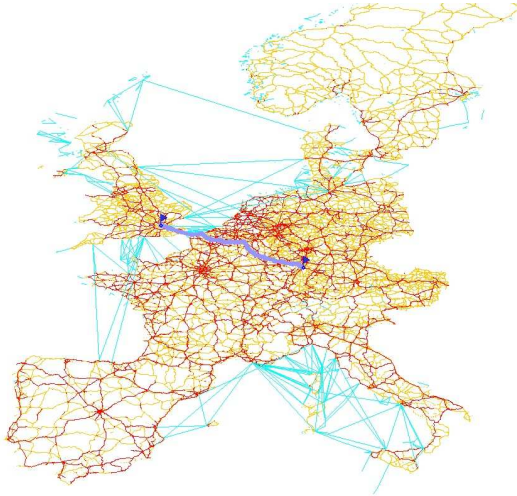


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Paris

# Transit-Node Routing

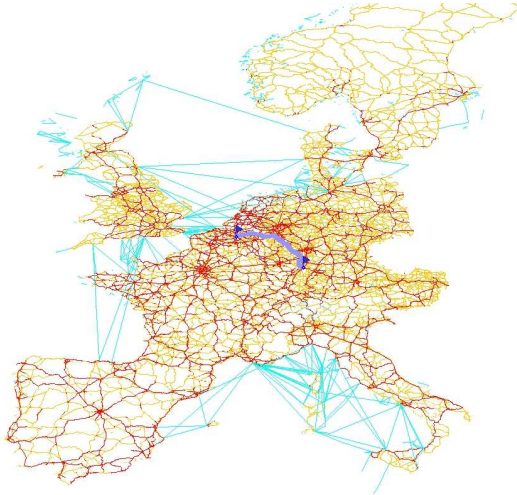


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
London

# Transit-Node Routing

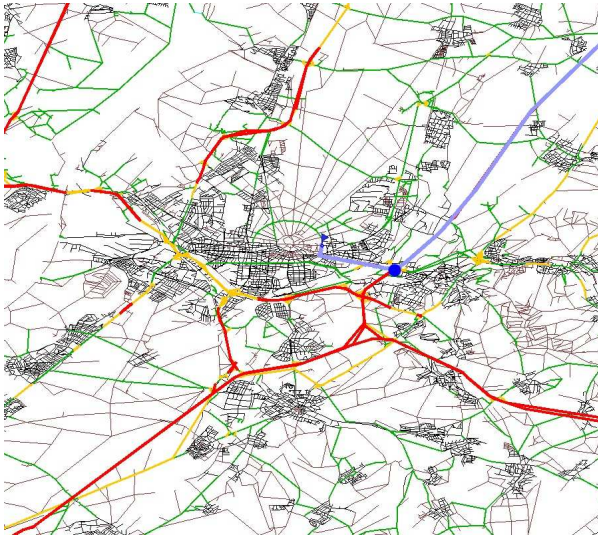


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach. . .  
Brüssel

# Transit-Node Routing

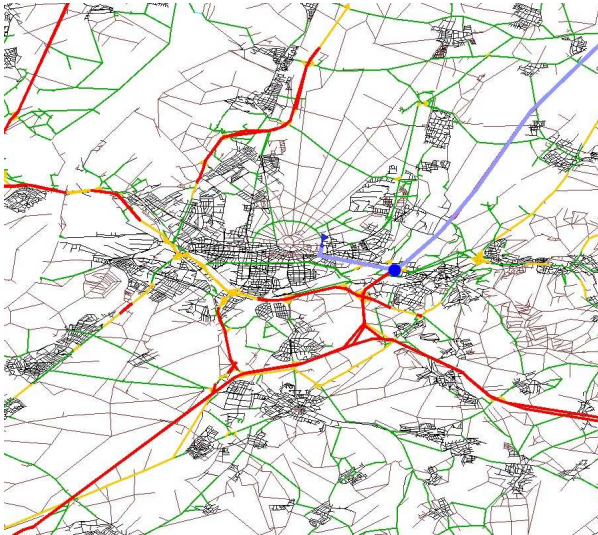


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Kopenhagen

# Transit-Node Routing

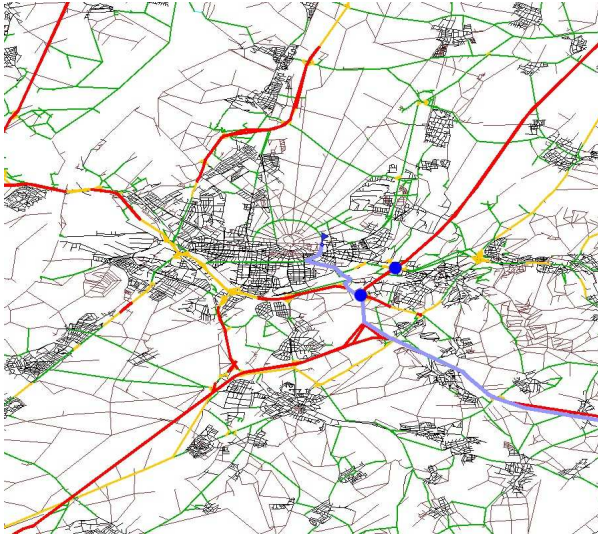


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Berlin

# Transit-Node Routing

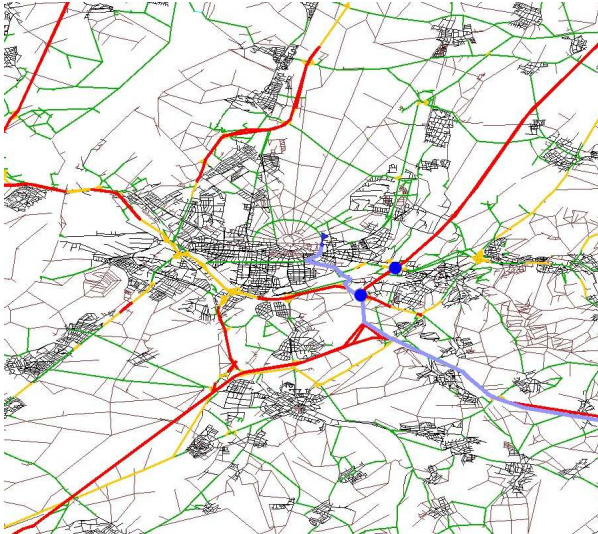


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Wien

# Transit-Node Routing

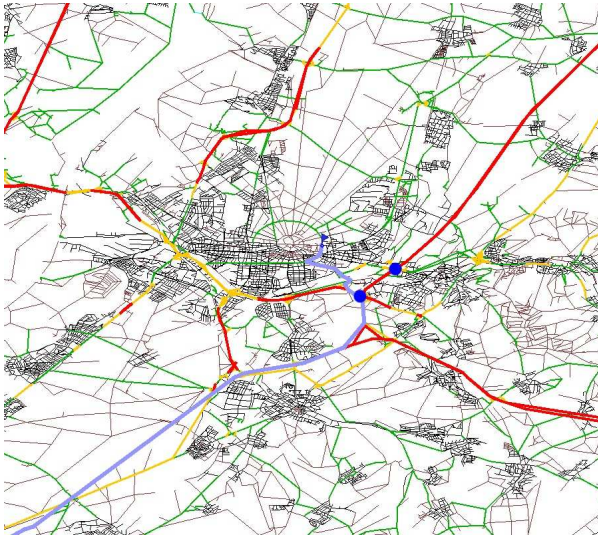


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
München

# Transit-Node Routing



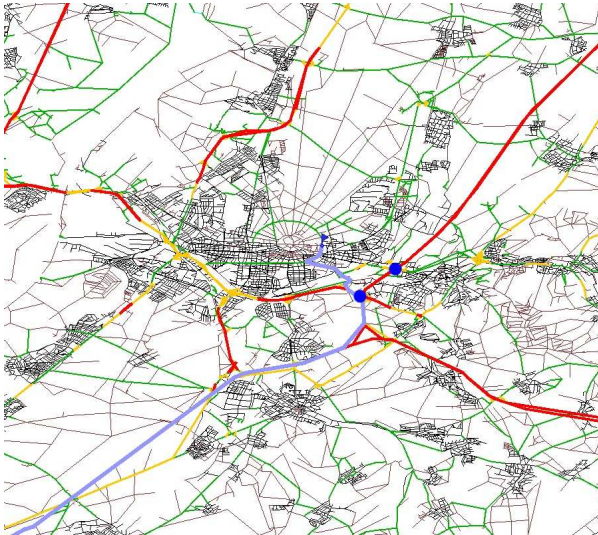
## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Rom



# Transit-Node Routing

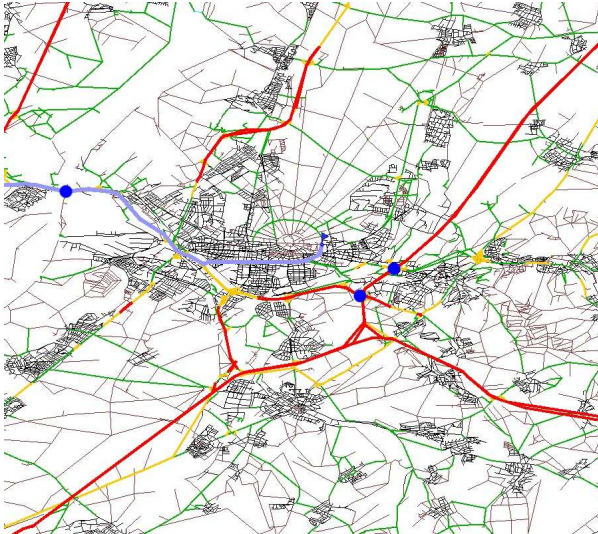


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Paris

# Transit-Node Routing

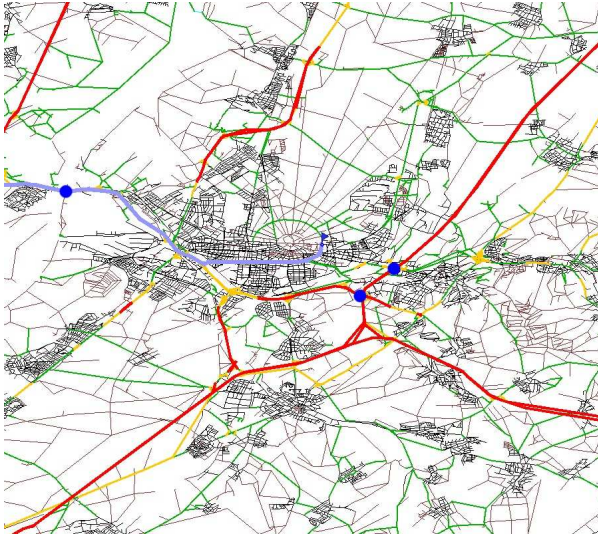


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
London

# Transit-Node Routing

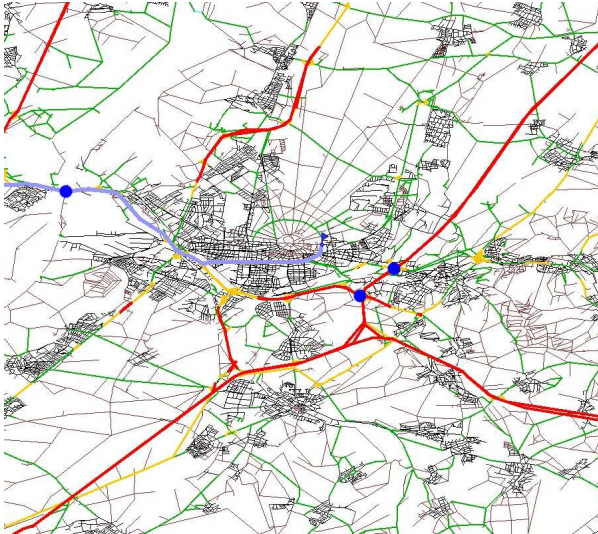


## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach . . .  
Brüssel

# Transit-Node Routing



## Beobachtung:

- wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach. . .

Abgrenzung Partition /  
Natural Cuts?

Wie ausnutzen?

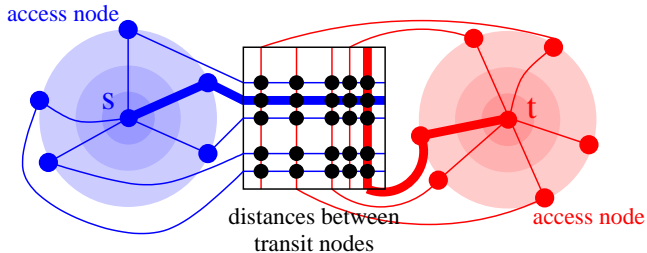
# Transit-Node Routing

## Idee:

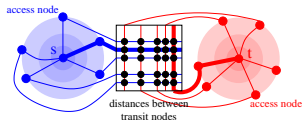
- reduziere Anfragen auf Table-Lookups
- identifiziere “wichtige” Knoten
- vollständige Distanztabelle zwischen diesen Knoten

## Probleme:

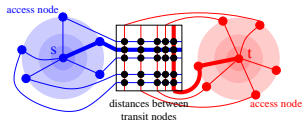
- Speicherverbrauch
- nahe Anfragen



- Transit nodes:  $T \subseteq V$
- Forward/backward access mapping:  $\vec{A} : V \rightarrow 2^T, \overleftarrow{A} : V \rightarrow 2^T$   
für jeden Knoten die für ihn wichtigen transit nodes, seine access nodes
- Vorberechnete Distanzen:  $D_T$  und  $d_A$

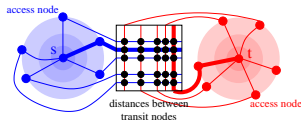


- **Transit nodes:**  $T \subseteq V$
- Forward/backward **access mapping:**  $\vec{A} : V \rightarrow 2^T, \overleftarrow{A} : V \rightarrow 2^T$   
für jeden Knoten die für ihn wichtigen transit nodes, seine **access nodes**
- Vorberechnete Distanzen:  $D_T$  und  $d_A$



- **Transit nodes:**  $T \subseteq V$
- Forward/backward **access mapping:**  $\vec{A} : V \rightarrow 2^T, \overleftarrow{A} : V \rightarrow 2^T$   
für jeden Knoten die für ihn wichtigen transit nodes, seine **access nodes**
- Vorberechnete Distanzen:  $D_T$  und  $d_A$
- $\text{dist}(s, t) \stackrel{?}{=} \min_{u \in \vec{A}(s), v \in \overleftarrow{A}(t)} \{d_A(s, u) + D_T(u, v) + d_A(v, t)\}$





- **Transit nodes:**  $T \subseteq V$
- Forward/backward **access mapping:**  $\vec{A} : V \rightarrow 2^T, \overleftarrow{A} : V \rightarrow 2^T$   
für jeden Knoten die für ihn wichtigen transit nodes, seine **access nodes**
- Vorberechnete Distanzen:  $D_T$  und  $d_A$
- $\text{dist}(s, t) \stackrel{?}{=} \min_{u \in \vec{A}(s), v \in \overleftarrow{A}(t)} \{d_A(s, u) + D_T(u, v) + d_A(v, t)\}$

## Berechnete Distanz nur für hinreichend weite Anfragen korrekt

- **Locality filter:**  $L : V \times V \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$
- true  $\rightarrow$  **Fallback-Routine** für lokale Anfragen
- Einseitige Fehler erlaubt (falsch positiv)

## Also:

- Wie Transit-Nodes bestimmen?
- Wie Access-Nodes und deren Distanz bestimmen?
- Wie Distanztabelle zwischen Transit-Nodes berechnen?
- Welcher Locality-Filter?
- Wie lokale Anfragen berechnen?

## Also:

- Wie Transit-Nodes bestimmen?
- Wie Access-Nodes und deren Distanz bestimmen?
- Wie Distanztabelle zwischen Transit-Nodes berechnen?
- Welcher Locality-Filter?
- Wie lokale Anfragen berechnen?

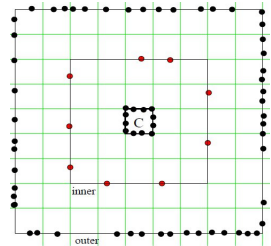
## Ideen?

**Idee:** Lege Locality-Filter fest, Rest folgt.

- Gleichmäßiges Gitter. LF: Abstand  $\leq 4$  Zellen

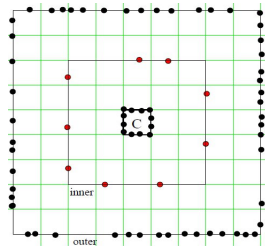
**Idee:** Lege Locality-Filter fest, Rest folgt.

- Gleichmäßiges Gitter. LF: Abstand  $\leq 4$  Zellen



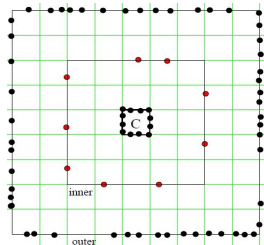
**Idee:** Lege Locality-Filter fest, Rest folgt.

- Gleichmäßiges Gitter. LF: Abstand  $\leq 4$  Zellen
- Zelle C, Inner:  $5 \times 5$  Quadrat,  
Outer:  $9 \times 9$  Quadrat



**Idee:** Lege Locality-Filter fest, Rest folgt.

- Gleichmäßiges Gitter. LF: Abstand  $\leq 4$  Zellen
- Zelle C, Inner:  $5 \times 5$  Quadrat, Outer:  $9 \times 9$  Quadrat
- Access-Nodes von C: Randknoten von Inner, die auf KW von C zu Outer-Randknoten liegen
- Transit-Nodes: Vereinigung aller Access-Nodes
- Distanzberechnung und lokale Anfragen: Dijkstra



**Idee:** Lege Transit-Nodes fest, alles bis auf Locality-Filter folgt.

- HH ist ein Vorgänger von CH (nicht Teil der VL)
- Transit-Nodes: Top- $k$  Knoten der Hierarchie

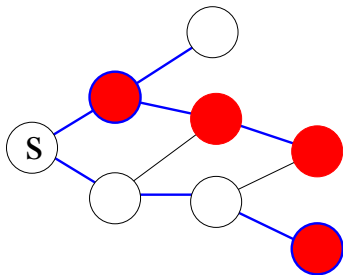


**Idee:** Lege Transit-Nodes fest, alles bis auf Locality-Filter folgt.

- HH ist ein Vorgänger von CH (nicht Teil der VL)
- Transit-Nodes: Top- $k$  Knoten der Hierarchie
- Distanztabelle: Many-to-many [KSSSW07] (mehr in späterer VL)
- Access-Nodes von  $v$ : „erste“ Transit-Nodes auf KW-Baum von  $v$
- Locality-Filter: **geometrisch**
- Lokale Anfragen: HH query
- Multi-Level
- Anmerkung: geht natürlich auch mit CH statt HH  
(hat keinen offiziellen Namen, hier „CH-TNR-geo“)

## Vorgehen:

- lokale Suche, bis Transit-Knoten alle Zweige abdecken



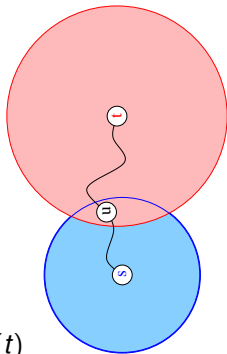


## Vorgehen:

- speicher für jeden Knoten den (euklidischen) Abstand zum am weitesten entfernten lokalen Knoten ab, also  $\vec{K}(u)$  und  $\overleftarrow{K}(u)$
- geht während Vorberechnung
- locality filter schlägt zu, wenn

$$\|s - t\| < \vec{K}(s) + \overleftarrow{K}(t)$$

- dadurch manchmal falscher Alarm



## Gegeben:

- $L + 1$  Mengen von *transit nodes*  $V =: T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_L$

## Gegeben:

- $L + 1$  Mengen von *transit nodes*  $V =: T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_L$

## Betrachte für jeden Level $\ell$ mit $0 \leq \ell \leq L$ :

- *access mapping*  $\vec{A}_\ell : V \rightarrow 2^{T_\ell}$  mapt Knoten auf *access nodes*

## Gegeben:

- $L + 1$  Mengen von *transit nodes*  $V =: T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_L$

## Betrachte für jeden Level $\ell$ mit $0 \leq \ell \leq L$ :

- *access mapping*  $\vec{A}_\ell : V \rightarrow 2^{T_\ell}$  mapt Knoten auf *access nodes*
- *locality filter*  $L_\ell : V \times V \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$  gibt an, ob  $d(s, t)$  nicht mit Transit-Knoten der Level  $\geq \ell$  berechnet werden kann

## Gegeben:

- $L + 1$  Mengen von *transit nodes*  $V =: T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_L$

## Betrachte für jeden Level $\ell$ mit $0 \leq \ell \leq L$ :

- *access mapping*  $\vec{A}_\ell : V \rightarrow 2^{T_\ell}$  mapt Knoten auf *access nodes*
- *locality filter*  $L_\ell : V \times V \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$  gibt an, ob  $d(s, t)$  nicht mit Transit-Knoten der Level  $\geq \ell$  berechnet werden kann
- *Distanztabelle*  $D_\ell : T_\ell \times T_\ell \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  Abstände zwischen Transit-Knoten auf Level  $\ell$  bis auf solche, die mit höheren Levels berechnet werden können



## Gegeben:

- $L + 1$  Mengen von *transit nodes*  $V =: T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_L$

## Betrachte für jeden Level $\ell$ mit $0 \leq \ell \leq L$ :

- *access mapping*  $\vec{A}_\ell : V \rightarrow 2^{T_\ell}$  mapt Knoten auf *access nodes*
- *locality filter*  $L_\ell : V \times V \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$  gibt an, ob  $d(s, t)$  nicht mit Transit-Knoten der Level  $\geq \ell$  berechnet werden kann
- *Distanztabelle*  $D_\ell : T_\ell \times T_\ell \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  Abstände zwischen Transit-Knoten auf Level  $\ell$  bis auf solche, die mit höheren Levels berechnet werden können
- $d_\ell : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  gibt Abstand zwischen zwei Knoten auf einem Level an, also Abstand zu *access nodes* und zwischen Transit-Knoten auf Level  $\ell$

## Gegeben:

- $L + 1$  Mengen von *transit nodes*  $V =: T_0 \supseteq T_1 \supseteq \dots \supseteq T_L$

## Betrachte für jeden Level $\ell$ mit $0 \leq \ell \leq L$ :

- *access mapping*  $\vec{A}_\ell : V \rightarrow 2^{T_\ell}$  mapt Knoten auf *access nodes*
- *locality filter*  $L_\ell : V \times V \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$  gibt an, ob  $d(s, t)$  nicht mit Transit-Knoten der Level  $\geq \ell$  berechnet werden kann
- *Distanztabelle*  $D_\ell : T_\ell \times T_\ell \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  Abstände zwischen Transit-Knoten auf Level  $\ell$  bis auf solche, die mit höheren Leveln berechnet werden können
- $d_\ell : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  gibt Abstand zwischen zwei Knoten auf einem Level an, also Abstand zu access nodes und zwischen Transit-Knoten auf Level  $\ell$
- $d_{\geq \ell} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  gibt Abstand an, der mit Hilfe aller Level  $\geq \ell$  berechnet werden kann

## Bemerkungen:

- In der Distanztabelle werden nur relevante Informationen abgelegt

$$D_\ell(s, t) := \begin{cases} d_\ell(s, t) & \text{wenn } d_\ell(s, t) < d_{\geq \ell+1}(s, t) \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- $d_\ell$  gibt die Distanz in dem entsprechenden Level an

$$d_\ell(s, t) := \min_{\substack{u \in \vec{A}(s) \\ v \in \overleftarrow{A}(t)}} \{d(s, u) + D_\ell(u, v) + d(v, t)\}$$

- $d_{\geq \ell}$  gibt die Distanz aller Level  $\geq \ell$  an

$$d_{\geq \ell}(s, t) := \min_{k \geq \ell} d_k(s, t)$$

---

TNR-Query( $s, t$ )

---

```
1  $d' = \infty$ 
2 for  $\ell = L$  down to 0 do
3    $d' := \min\{d', d_\ell(s, t)\}$ 
4   if  $\neg L_\ell(s, t)$  then break
5 return  $d'$ 
```

---

## Bemerkungen:

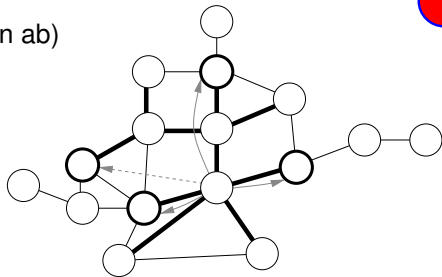
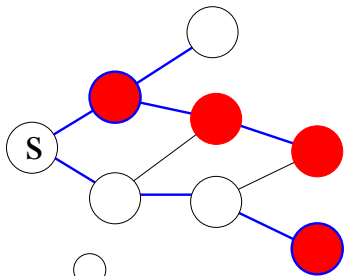
- speichere in  $D_\ell$  nur nicht- $\infty$ -Einträge (Hash-Tabelle)
- benutze HH/CH (oder bel. andere Technik) für Level 0 Anfragen

## Vorgehen:

- lokale Suche, bis Transit-Knoten **des Levels** alle Zweige abdecken

## Beschleunigung:

- prune* an Transit-Knoten (breche Zweig bei Transit-Knoten ab)
- dünne dann später mit Hilfe der Distanz-Tabelle wieder aus



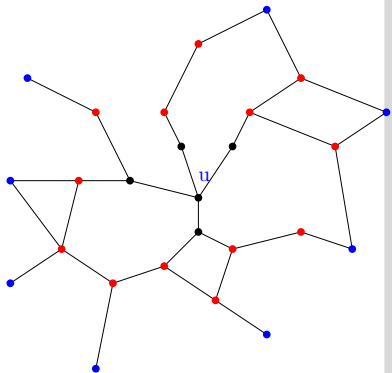
# ML: “Runter”propagieren von ANs

Idee: Access-Nodes können propagiert werden

- Berechne  $\vec{A}_\ell(v)$  für alle  $v \in T_{\ell-1}$
- Berechne  $\vec{A}_{\ell-1}$  für alle  $u \in V$
- SchlieÙe von  $\ell - 1$  auf  $\ell$ :

$$\vec{A}_\ell(u) := \bigcup_{v \in \vec{A}_{\ell-1}(u)} \vec{A}_\ell(v)$$

- kann auf mehrere Level verallgemeinert werden  
Berechne ANs für TNs “runter”,  
berechne ANs für “normale” Knoten “hoch”
- können mit Distanztabelle wieder ausgedünnt werden



## Vorgehen:

- benutze Many-to-Many Ansatz (später mehr Details dazu!)

## Problem:

- wir speichern  $d_\ell(u, v)$  in  $D_\ell(u, v)$  nur, wenn  $d_\ell(u, v) < d_{\ell+1}(u, v)$
- Anzahl Transit Knoten auf niederigem Level hoch  $\rightsquigarrow$  ineffizient

## Lösungen:

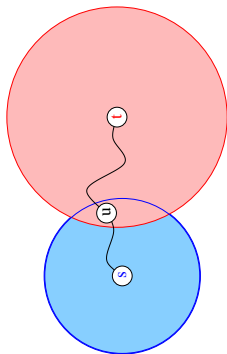
- gehe top-down vor, dann ist  $d_{\ell+1}(u, v)$  verfügbar
- breche Suchen an hochleveligen Transit-Knoten ab

## Vorgehen:

- speicher für jeden Knoten den (euklidischen) Abstand zum am weitesten entfernten lokalen Knoten ab, also  $\vec{K}(u)$  und  $\overleftarrow{K}(u)$
- für jeden Level, also  $\vec{K}_\ell(u)$ ,  $\overleftarrow{K}_\ell(u)$
- geht während Vorberechnung
- locality filter schlägt zu, wenn

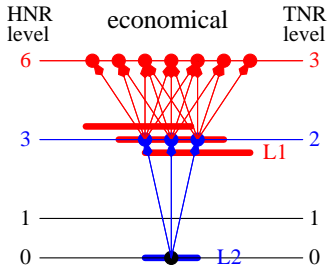
$$\|s - t\| < \vec{K}_k(s) + \overleftarrow{K}_k(t) \quad \forall k \leq \ell$$

- dadurch manchmal falscher Alarm



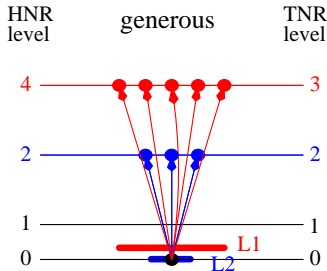


# ML HH-TNR: 2 Varianten



## economical:

- speicher keine transit knoten für level 1, benutze CH/HH
- oberster locality filter auf level der transit Knoten



## generous:

- mehr transit nodes
- locality filter auf unterstem Level
- höherer Platzverbrauch, schneller

**Idee:** TNR rein auf CH basiert. Keine geometrischen Zutaten!

**Idee:** TNR rein auf CH basiert. Keine geometrischen Zutaten!

- Studienarbeit Julian Arz
- Konferenzbeitrag SEA'13, Juni 2013
- Vielen Dank an Julian und Dennis Luxen  
kann gut sein, dass wir diesen Teil erst nach der SEA online stellen

## Ingredients

- Fallback routine: CH query
- Transit nodes: CH, top  $k$  nodes
- Distance table: [KSSSW07] (spätere VL)
- Access node mapping & distances: CH-search space exploration
- Locality filter: CH-search space exploration + graph Voronoi
- Geometry: none

Tabelle: Comparison of locality filter quality. Values for last three columns in [%]

Method	$ T $	Local queries	$L =$ true	False Pos.
Grid-TNR	7 426	2.600	2.60	-
Grid-TNR	24 899	0.800	0.80	-
HH-TNR-eco	8 964	0.540	2.87	81.2
HH-TNR-gen	11 293	0.260	1.35	80.7
CH-TNR	10 000	0.148	0.41	64.3
CH-TNR(compr)	10 000	0.148	0.58	73.6
CH-TNR(compr)	24 000	0.048	0.17	72.1
CH-TNR(compr)	28 000	0.041	0.14	71.2

Tabelle: Comparison Between Various Distance Oracles. AMD Opteron 270.  
★ scaled figures

Method	Preprocessing [hh:mm]	Overhead [byte]	Query [ $\mu$ s]	
CH	00:13	24	246	
Grid-TNR	$\approx$ 20:00	21	63	
HH-TNR-eco	00:25	120	11	
HH-TNR-gen	01:15	247	4.30	
CH-TNR-geo-gen	00:46	193	3.30	
TNR+AF	03:49	321	1.90	
HL-0 local	00:35	1341	1.34	★
HL- $\infty$ global	$\approx$ 120:00	1055	0.49	★
CH-TNR	00:34	147	3.27	

Tabelle: Comparison Between Various Distance Oracles. AMD Opteron 270.  
★ scaled figures

Method	Preprocessing [hh:mm]	Overhead [byte]	Query [ $\mu$ s]	
CH	00:13	24	246	
Grid-TNR	$\approx$ 20:00	21	63	
HH-TNR-eco	00:25	120	11	
HH-TNR-gen	01:15	247	4.30	
CH-TNR-geo-gen	00:46	193	3.30	
TNR+AF	03:49	321	1.90	
HL-0 local	00:35	1341	1.34	★
HL- $\infty$ global	$\approx$ 120:00	1055	0.49	★
CH-TNR	00:34	147	3.27	
HL-Compression	00:59	100	5.74	★

- analog zu Contraction Hierarchies
- interpretiere jeden Eintrag als Shortcut
- speichere für jeden Eintrag den Pfad, den er repräsentiert
- rekursiv



## Gemeinsamkeiten:

- Level-Einteilung
- Pfadentpackung ähnlich
- (TNR basiert auf CH)

## Unterschiede:

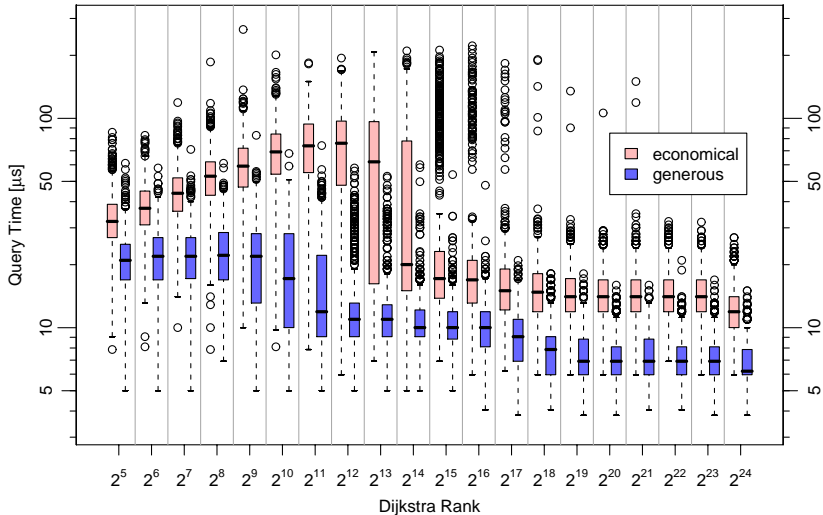
- weniger level
- Suche durch Table-Lookups ersetzt
- Locality Filter nötig
- Shortcuts  $\mapsto$  Tabellen-Einträgen

# Übersicht: bisherige Techniken

	Vorbereitung		Suchraum	Anfrage	
	Zeit [h:m]	Platz [byte/n]		Zeit [ms]	Beschl.
Dijkstra	0:00	0	9 114 385	5 591.6	1
ALT-16	1:25	128	74 669	53.6	104
Arc-Flags (128)	17:08	10	2 764	0.8	6 988
MLD-3	< 0:01	1.7	6 074	0.91	6 143
CH	0:02	-3.0	284	0.09	62 128
HL	6:12	967.1	N/A	0.0002	ca. 22 000 000
eco TNR	0:25	120	N/A	0.011	ca. 500 000
gen TNR	1:15	247	N/A	0.0043	ca. 1 300 000
CH-TNR	00:34	147	N/A	0.0033	ca. 1 700 000

Vorsicht: ggfs. verschiedene Rechner...

# Dijkstra Rank



## Transit-Node Routing

- ersetzt Suche (fast) komplett durch Table-Lookups
- 4 Zutaten:
  - Transit-Nodes
  - Distanztabelle
  - Access-Nodes
  - Locality-Filter
- Suchzeit von unter  $4 \mu s$

## Literatur (Transit-Node Routing):

- Peter Sanders and Dominik Schultes:  
**Robust, Almost Constant Time Shortest-Path Queries in Road Networks**  
In: *The Shortest Path Problem: Ninth DIMACS Implementation Challenge*, 2009
- Holger Bast, Stefan Funke, Domagoj Matijevic, Peter Sanders, Dominik Schultes:  
**In Transit to Constant Time Shortest-Path Queries in Road Networks**  
In: *Proceedings of the 9th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'07)*, 2009
- Julian Arz, Dennis Luxen and Peter Sanders:  
**Transit Node Routing Reconsidered**  
In: *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13)*, June 2013, to appear.

**Montag, 27.5.2013 (Julian)**  
Mittwoch, 29.5.2013 (Julian)