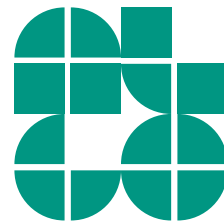


Vorlesung Algorithmische Geometrie

Well-Separated Pair Decomposition

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

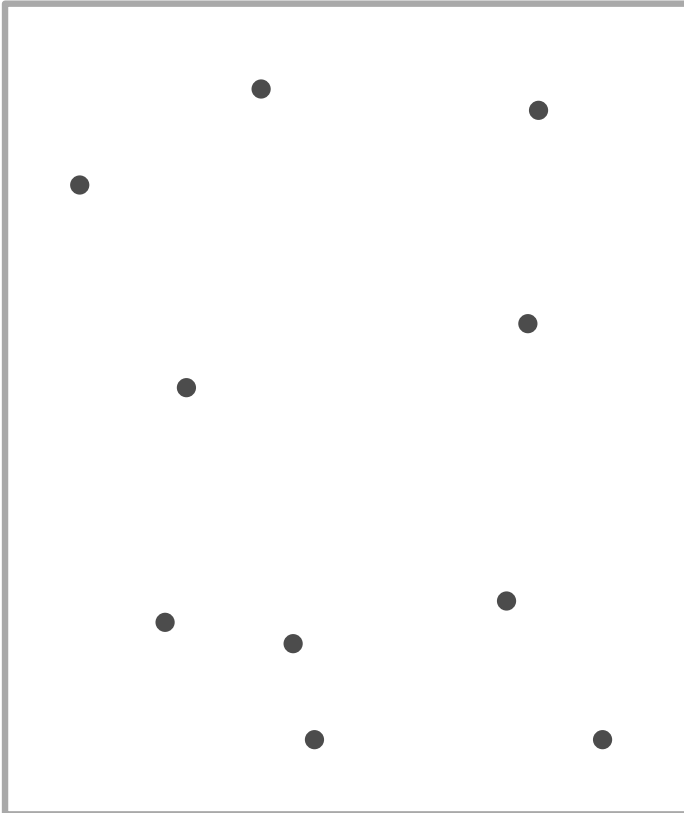
Martin Nöllenburg
01.07.2014



Motivation: Spanner

Aufgabe:

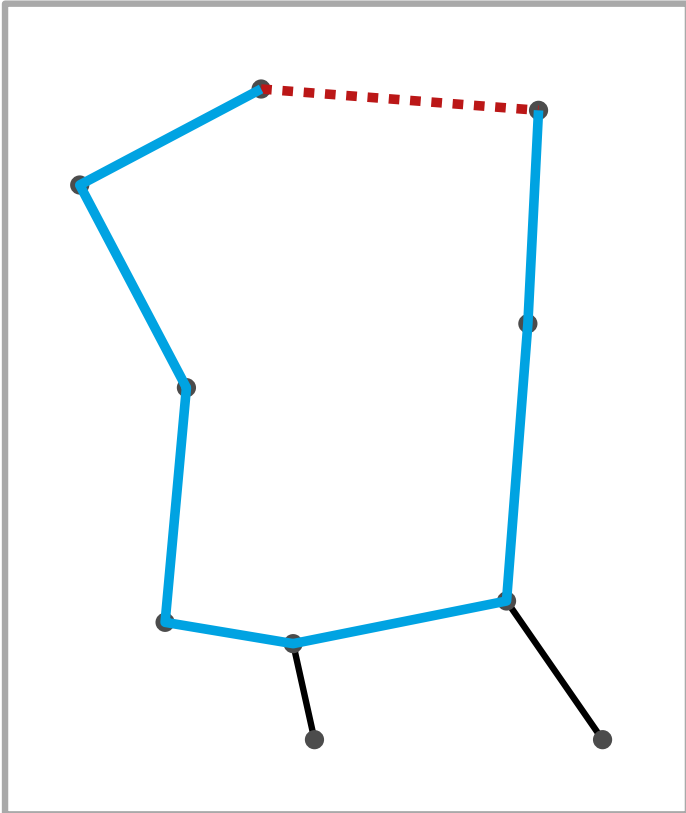
Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.



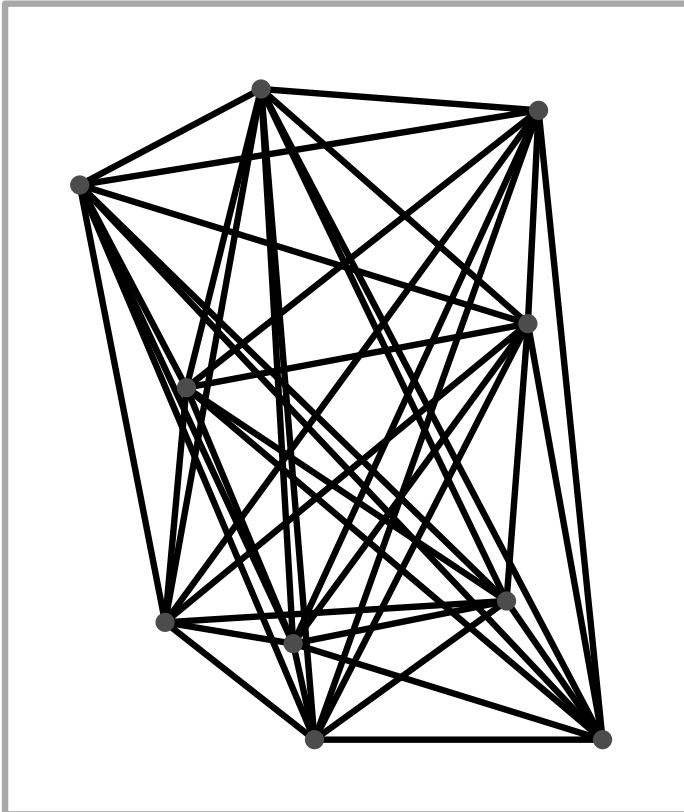
Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $\|xy\|$ sein.



1. Idee: Euklid. min. Spannbaum



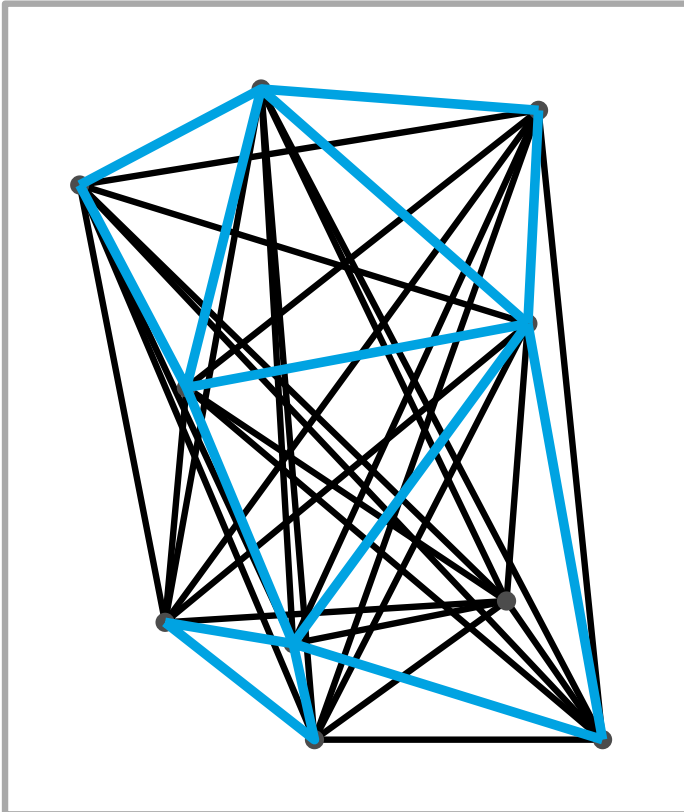
Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $\|xy\|$ sein.

Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.

1. **Idee:** Euklid. min. Spannbaum
2. **Idee:** vollständiger Graph



Aufgabe:

Eine Menge von Städten soll über ein neues Straßennetz miteinander verbunden werden.

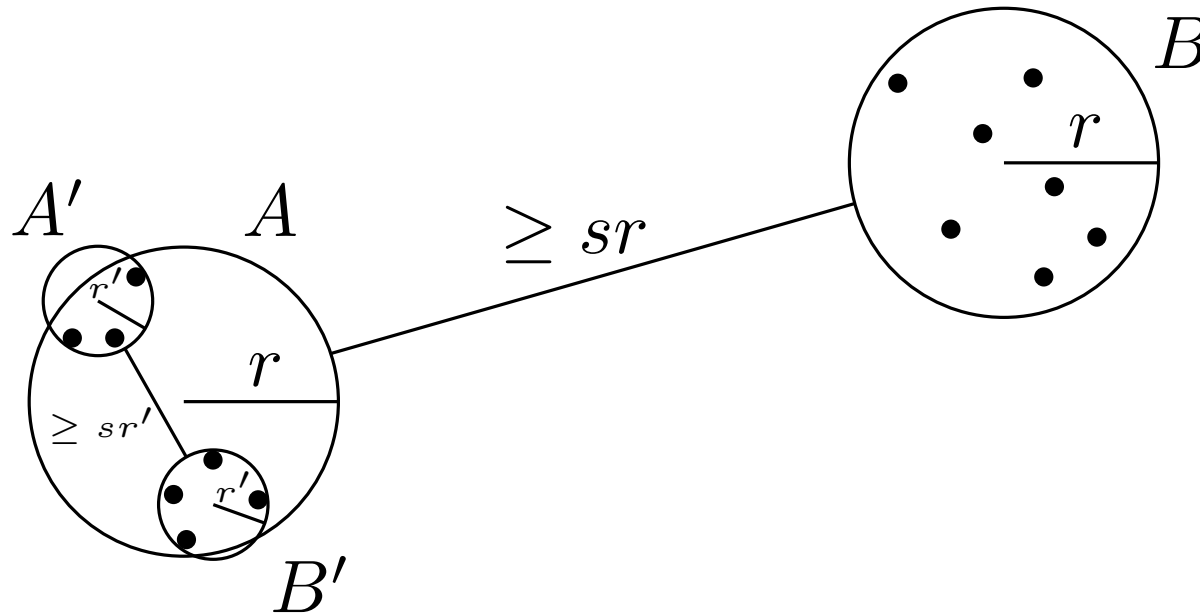
Allerdings soll für kein Paar (x, y) der Weg im Straßennetz viel länger als die Distanz $\|xy\|$ sein.

Die Baukosten sollen im Rahmen bleiben, also z.B. nur $O(n)$ Kanten.

1. **Idee:** Euklid. min. Spannbaum
2. **Idee:** vollständiger Graph
3. **Idee:** sparse t -Spanner

Well-Separated Pairs

Def.: Ein Paar disjunkter Punktmenge A und B im \mathbb{R}^d heißt **s -well separated** für ein $s > 0$, falls A und B jeweils von einer Kugel mit Radius r überdeckt werden und der Abstand der beiden Kugeln mindestens sr ist.



Beob.:

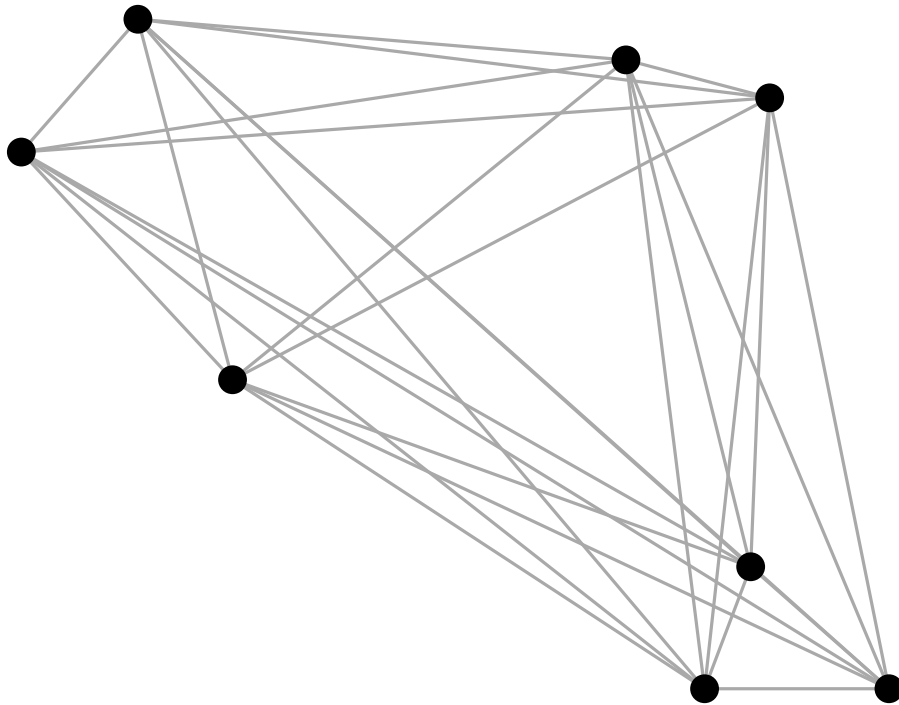
- s -well separated \Rightarrow s' -well separated für alle $s' \leq s$
- Singletons $\{a\}$ und $\{b\}$ sind s -well separated für alle $s > 0$

Für wohlsepariertes Paar $\{A, B\}$ gilt, dass der Abstand für alle Punktpaare in $A \otimes B = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}$ ähnlich ist.

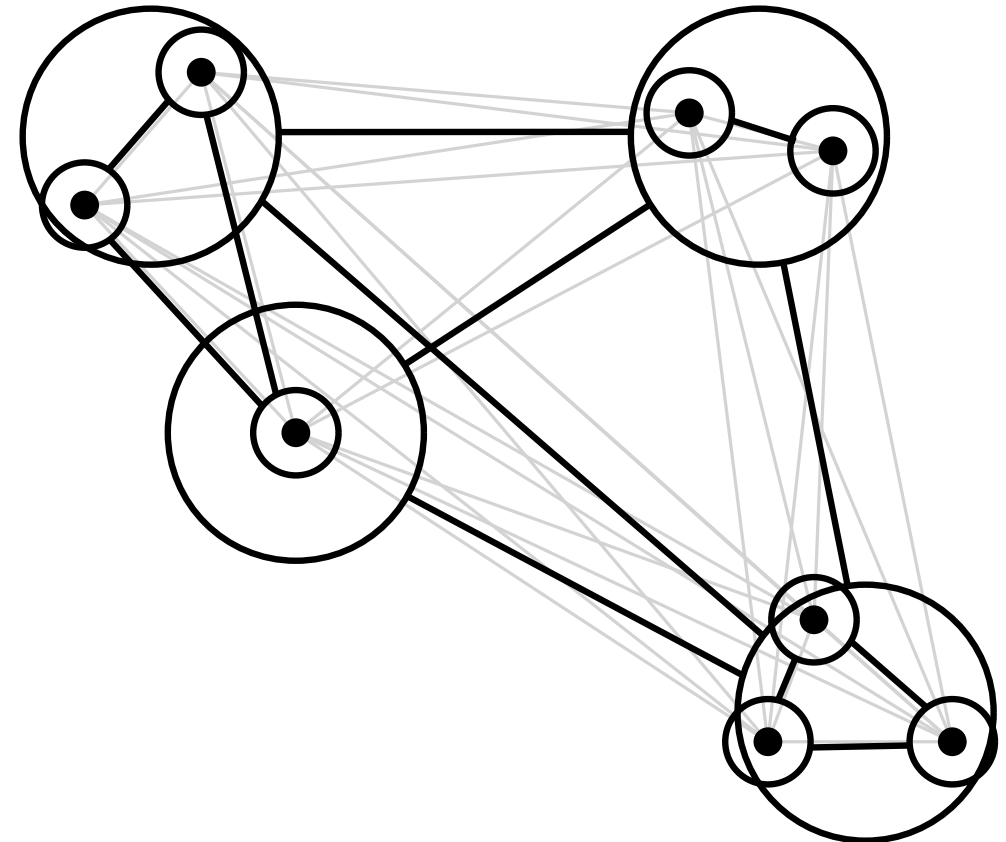
Ziel: $o(n^2)$ -Datenstruktur, die den Abstand aller $\binom{n}{2}$ Paare von Punkten einer Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ approximiert.

Def.: Für eine Punktmenge P und ein $s > 0$ ist eine **s -well separated pair decomposition** (s -WSPD) eine Menge von Paaren $\{\{A_1, B_1\}, \dots, \{A_m, B_m\}\}$ mit

- $A_i, B_i \subset P$ für alle i
- $A_i \cap B_i = \emptyset$ für alle i
- $\bigcup_{i=1}^m A_i \otimes B_i = P \otimes P$
- $\{A_i, B_i\}$ s -well separated für alle i



28 Punktpaare

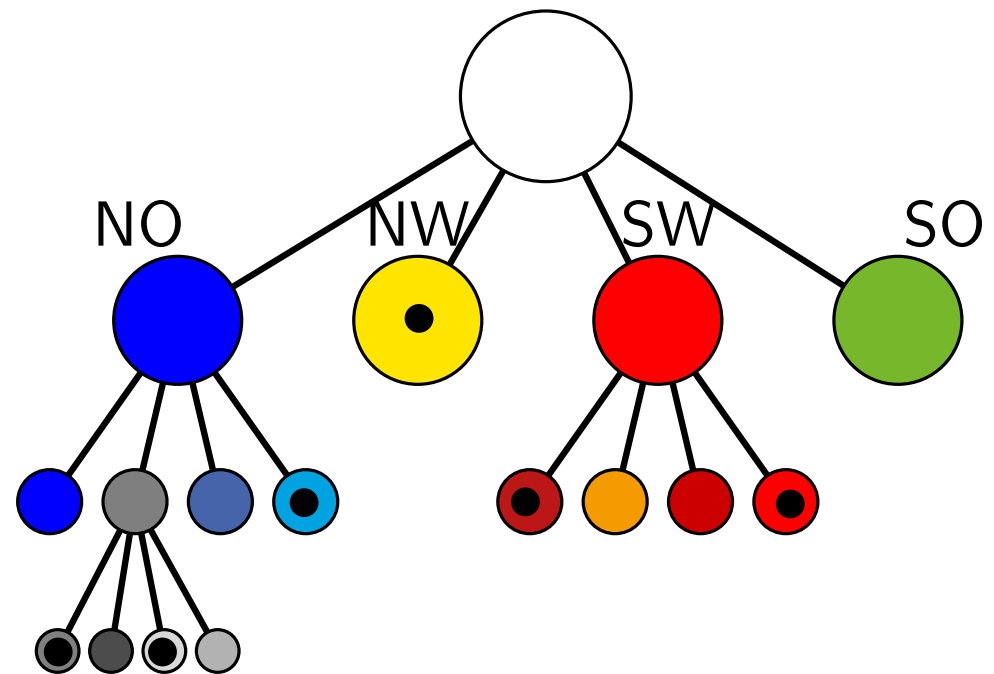
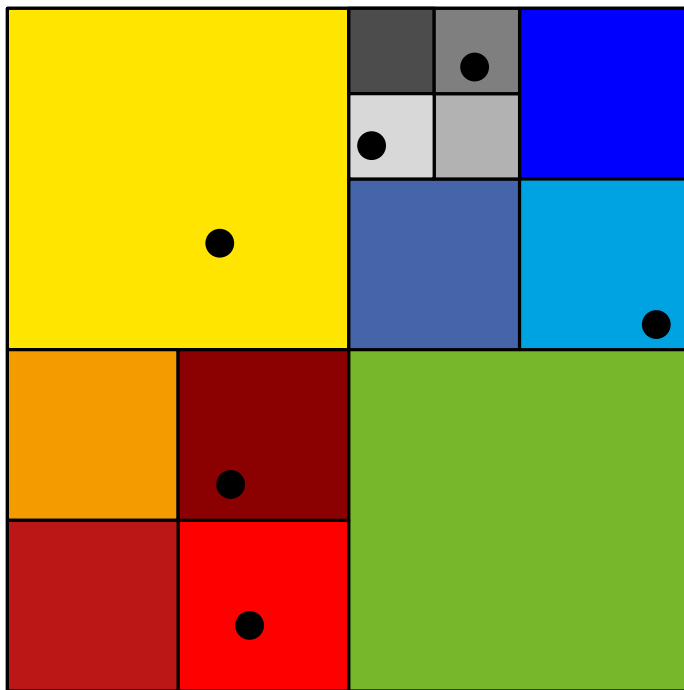


12 s -well separated pairs

WSPD der Größe $O(n^2)$ ist trivial. Geht es auch in $O(n)$?

Wiederholung: Quadrees

Def.: Ein **Quadtree** $\mathcal{T}(P)$ für eine Punktmenge P ist ein Wurzelbaum, in dem jeder innere Knoten vier Kinder hat. Jeder Knoten entspricht einem Quadrat und die Quadrate der Blätter bilden eine Unterteilung des Wurzelquadrats.



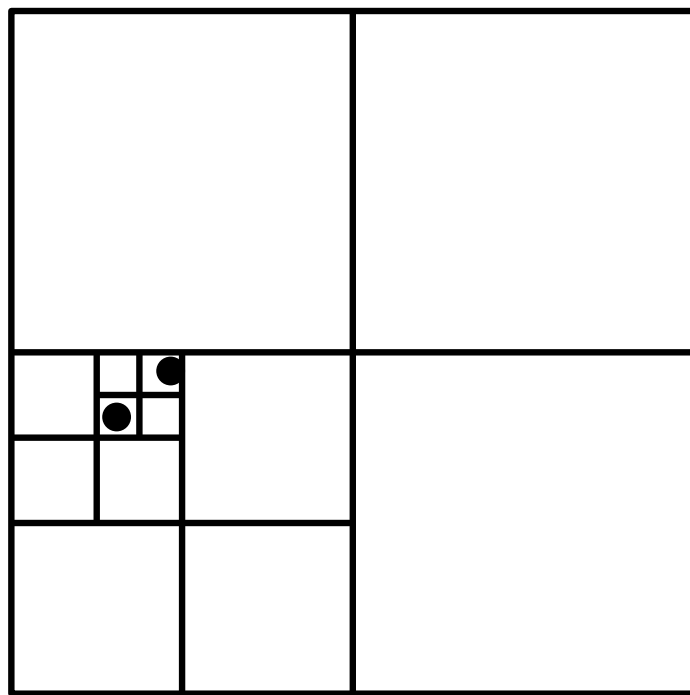
Def.: Ein **Quadtree** $\mathcal{T}(P)$ für eine Punktmenge P ist ein Wurzelbaum, in dem jeder innere Knoten vier Kinder hat. Jeder Knoten entspricht einem Quadrat und die Quadrate der Blätter bilden eine Unterteilung des Wurzelquadrats.

Lemma 1: Die Tiefe d von $\mathcal{T}(P)$ ist höchstens $\log(s/c) + 3/2$, wobei c der kleinste Abstand in P ist und s die Seitenlänge des Wurzelquadrats Q .

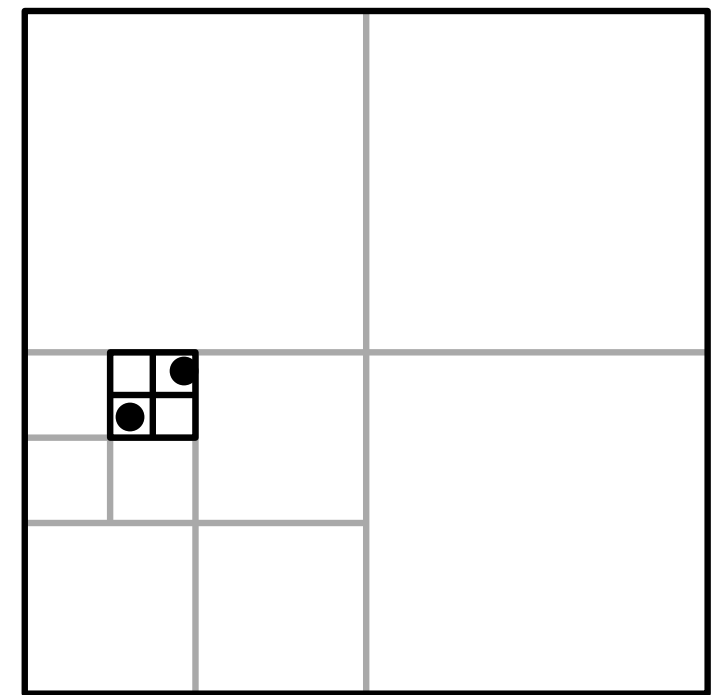
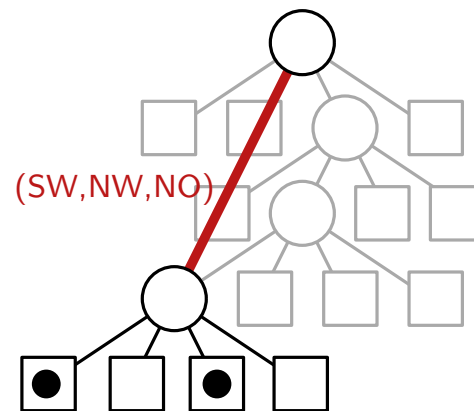
Satz 1: Ein Quadtree $\mathcal{T}(P)$ für n Punkte und mit Tiefe d hat $O((d+1)n)$ Knoten und kann in $O((d+1)n)$ Zeit konstruiert werden.

Komprimierte Quadrees

Def.: Ein **komprimierter** Quadtree ist ein Quadtree, bei dem Pfade nicht-separierender innerer Knoten zu einer Kante komprimiert sind. Die Kante hat ein Label zur Rekonstruktion der Pfadstruktur.



Quadtree



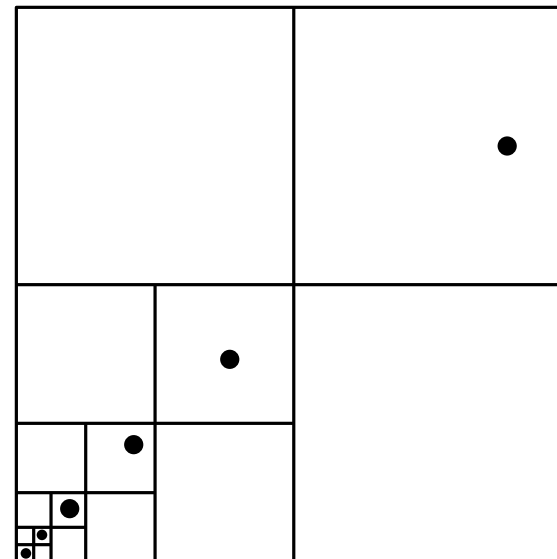
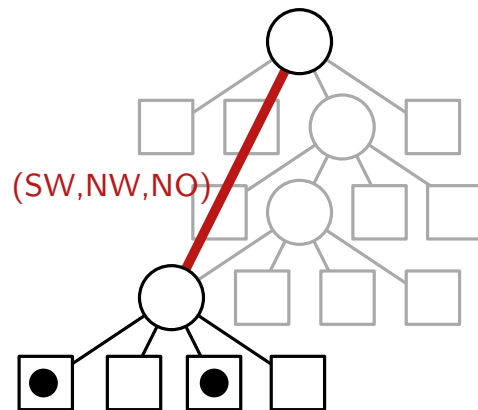
komprimierter Quadtree

Eigenschaften komprimierter Quadrees

- Beob.:**
- innere Knoten teilen ihre Punktmenge in ≥ 2 nichtleere Teile \Rightarrow max. $n - 1$ innere Knoten
 - Tiefe kann $d = n$ sein, so dass der Algorithmus aus VL11 $O(n^2)$ Zeit zur Konstruktion braucht

Satz 2: Ein komprimierter Quadtree für n Punkte im \mathbb{R}^d für festes d kann in $O(n \log n)$ Zeit konstruiert werden.

z.B. Skip-Quadtree [Eppstein et al. 2005] (hier ohne Beweis)

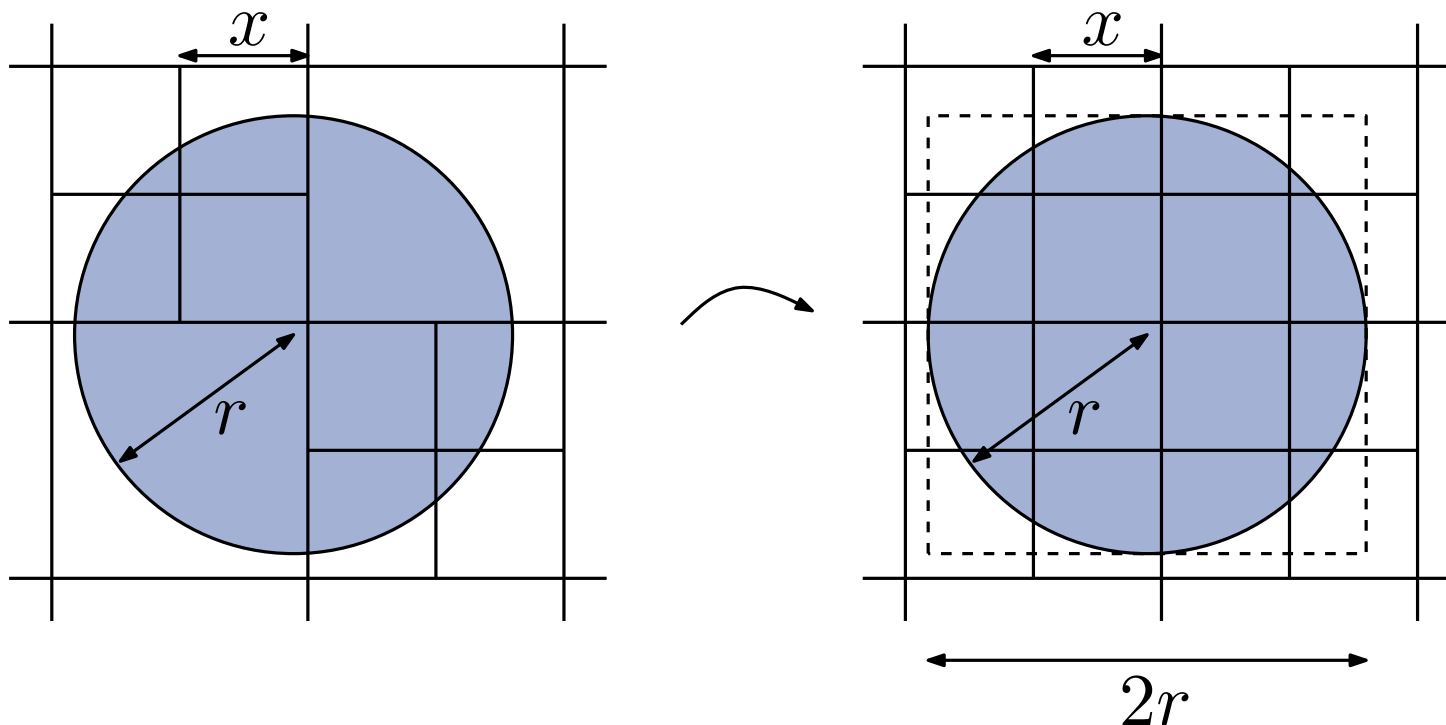


Packungslemma

Lemma 2: Gegeben sei eine Kugel K mit Radius r im \mathbb{R}^d und eine Menge X paarweise disjunkter Quadtree-Zellen mit Seitenlänge $\geq x$, die K schneiden. Dann gilt

$$|X| \leq (1 + \lceil 2r/x \rceil)^d.$$

Beweis:



Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtree $\mathcal{T}(P)$ der Punktmenge P sei $P_u = Q_u \cap P$ die Menge der Punkte im zugehörigen Quadrat Q_u . In jedem Blatt u definiere den Repräsentanten

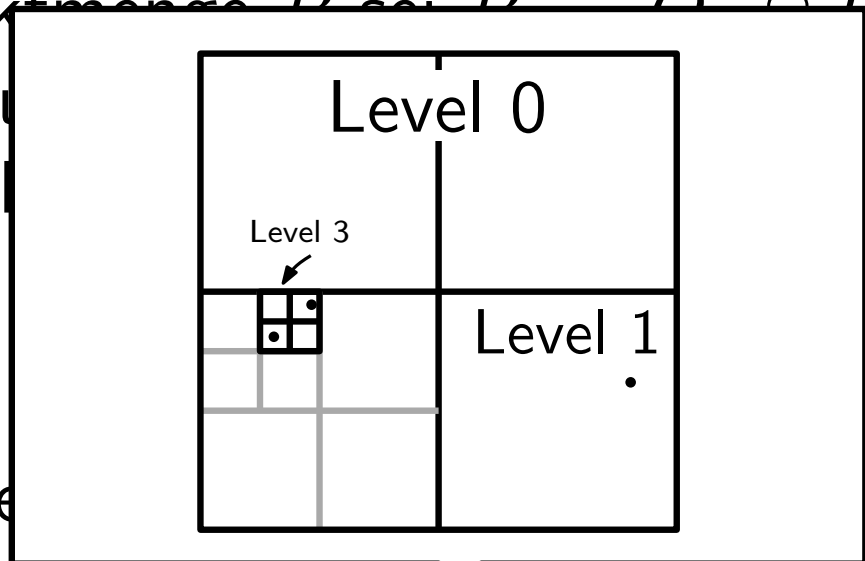
$$\text{rep}(u) = \begin{cases} p & \text{falls } P_u = \{p\} \text{ (} u \text{ ist Blatt)} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen inneren Knoten v setze $\text{rep}(v) = \text{rep}(u)$ für ein nichtleeres Kind u von v .

Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtree $\mathcal{T}(P)$ sei $\text{level}(u)$ das Level von u im zugeh. *unkomprimierten* Quadtree. Es gilt $\text{level}(u) \leq \text{level}(v)$ gdw. $\text{Fläche}(Q_u) \geq \text{Fläche}(Q_v)$.

Repräsentanten und Level

Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtree $\mathcal{T}(P)$ der Punktmenge P sei $Q_u \subseteq P$ die Menge der Punkte im zugehörigen Blatt u . Für jedes Blatt u definiere den Repräsentanten $rep(u)$ als



Für ein nichtleeres Kind v von u gilt $rep(v) = rep(u)$ für ein

Def.: Für jeden Knoten u eines Quadtree $\mathcal{T}(P)$ sei $level(u)$ das Level von u im zugehörigen *unkomprimierten* Quadtree. Es gilt $level(u) \leq level(v)$ gdw. $Fläche(Q_u) \geq Fläche(Q_v)$.

Konstruktion einer WSPD

$\text{wsPairs}(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadtree-Knoten u, v , Quadtree \mathcal{T} , $s > 0$

Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$

if $\text{rep}(u) = \emptyset$ oder $\text{rep}(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** \emptyset

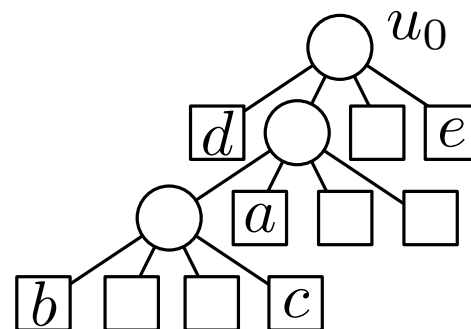
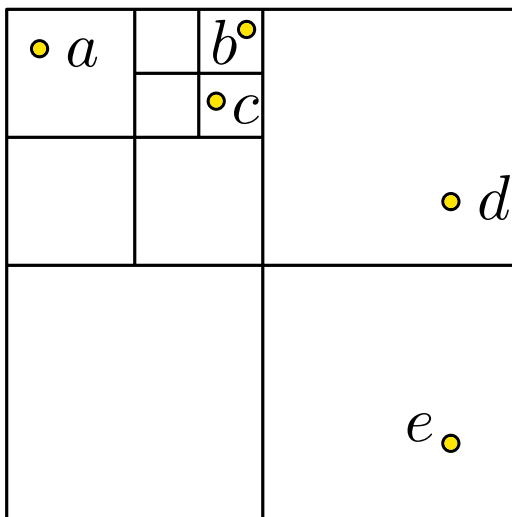
else if P_u und P_v s -well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$

else

if $\text{level}(u) > \text{level}(v)$ **then** tausche u und v

$(u_1, \dots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in \mathcal{T}

return $\bigcup_{i=1}^m \text{wsPairs}(u_i, v, \mathcal{T}, s)$



Konstruktion einer WSPD

$wsPairs(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadrate Q_u und Q_v (bzw. Radius 0 für Punkt in Blatt)

Output: WS $\{u, v\}$ vergrößere kleineren Kreis und prüfe Abstand $\geq sr$

if $rep(u) = \emptyset$ oder $rep(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** \emptyset

else if P_u und P_v s -well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$

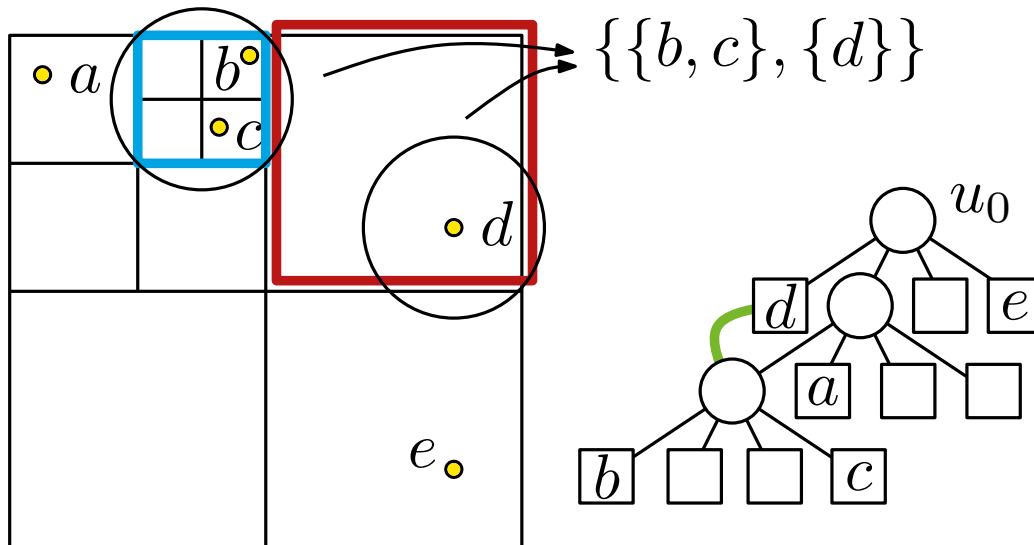
else

if $level(u) > level(v)$ **then** tausche u und v

$(u_1, \dots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in \mathcal{T}

return $\bigcup_{i=1}^m wsPairs(u_i, v, \mathcal{T}, s)$

$\{\{b, c\}, \{d\}\}$



Konstruktion einer WSPD

$\text{wsPairs}(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadtree-Knoten u, v , Quadtree \mathcal{T} , $s > 0$

Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$

if $\text{rep}(u) = \emptyset$ oder $\text{rep}(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** \emptyset

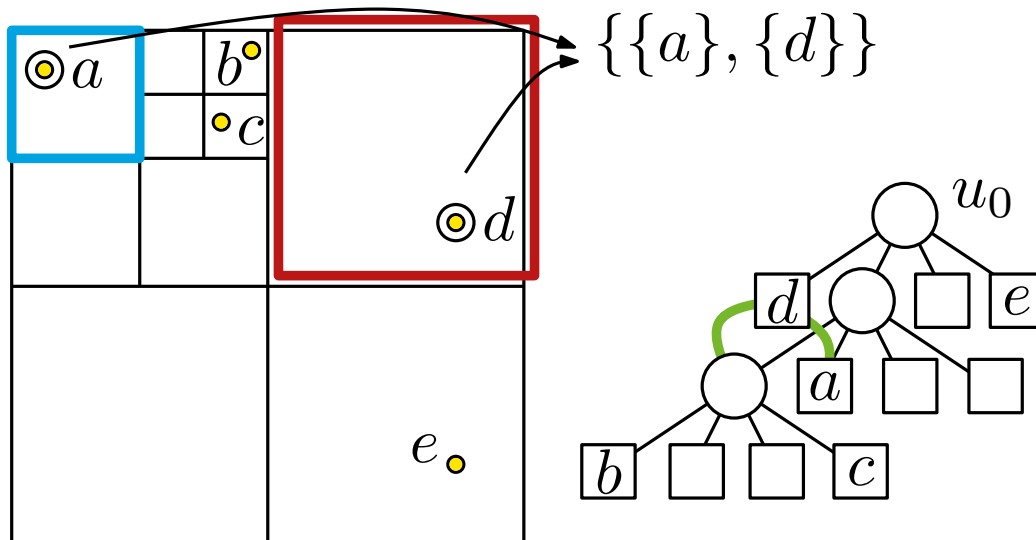
else if P_u und P_v s -well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$

else

if $\text{level}(u) > \text{level}(v)$ **then** tausche u und v

$(u_1, \dots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in \mathcal{T}

return $\bigcup_{i=1}^m \text{wsPairs}(u_i, v, \mathcal{T}, s)$



$\{\{b, c\}, \{d\}\}$
 $\{\{a\}, \{d\}\}$

Konstruktion einer WSPD

$\text{wsPairs}(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadtree-Knoten u, v , Quadtree \mathcal{T} , $s > 0$

Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$

if $\text{rep}(u) = \emptyset$ oder $\text{rep}(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** \emptyset

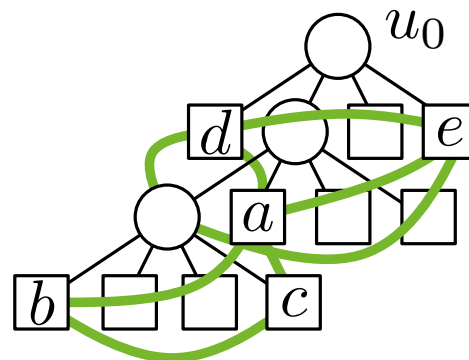
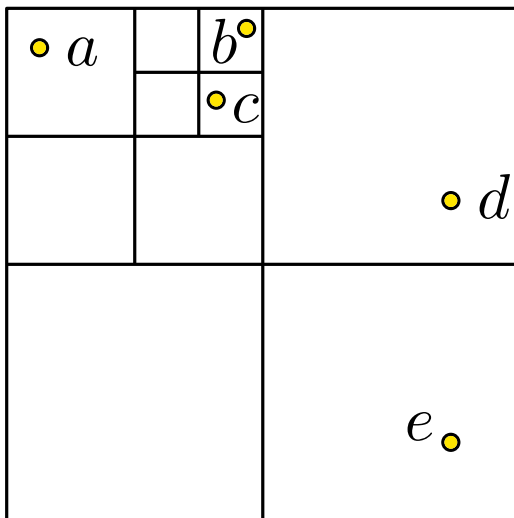
else if P_u und P_v s -well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$

else

if $\text{level}(u) > \text{level}(v)$ **then** tausche u und v

$(u_1, \dots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in \mathcal{T}

return $\bigcup_{i=1}^m \text{wsPairs}(u_i, v, \mathcal{T}, s)$



- $\{\{b, c\}, \{d\}\}$
- $\{\{a\}, \{d\}\}$
- $\{\{b, c\}, \{e\}\}$
- $\{\{d\}, \{e\}\}$
- $\{\{a\}, \{b\}\}$
- $\{\{a\}, \{c\}\}$
- $\{\{b\}, \{c\}\}$
- $\{\{a\}, \{e\}\}$

Konstruktion einer WSPD

$\text{wsPairs}(u, v, \mathcal{T}, s)$

Input: Quadtree-Knoten u, v , Quadtree \mathcal{T} , $s > 0$

Output: WSPD für $P_u \otimes P_v$

if $\text{rep}(u) = \emptyset$ oder $\text{rep}(v) = \emptyset$ oder Blätter $u = v$ **then return** \emptyset

else if P_u und P_v s -well separated **then return** $\{\{u, v\}\}$

else

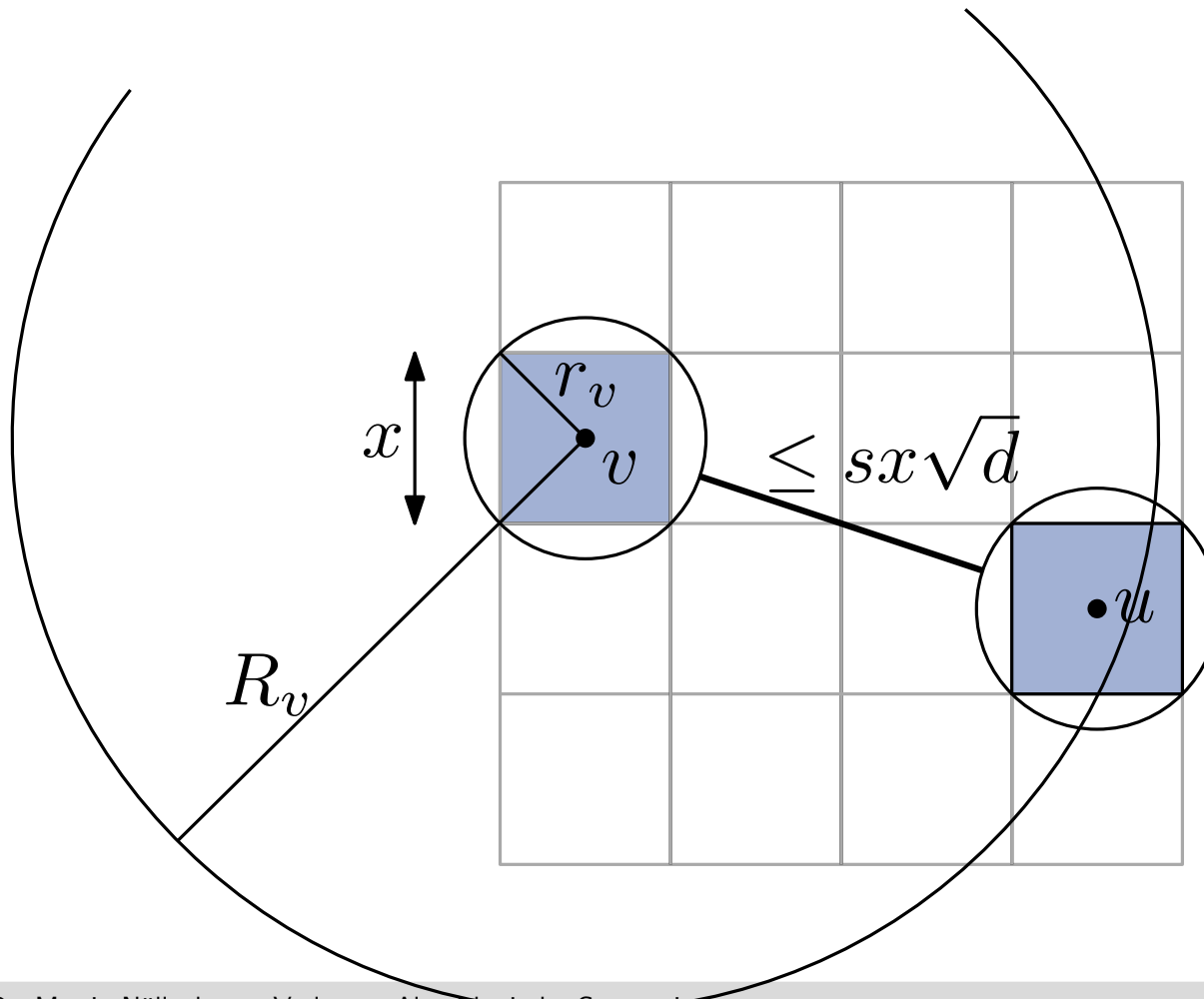
if $\text{level}(u) > \text{level}(v)$ **then** tausche u und v
 $(u_1, \dots, u_m) \leftarrow$ Kinder von u in \mathcal{T}
return $\bigcup_{i=1}^m \text{wsPairs}(u_i, v, \mathcal{T}, s)$

- initialer Aufruf $\text{wsPairs}(u_0, u_0, \mathcal{T}, s)$ Wie?
- Duplikate $\text{wsPairs}(u_i, u_j, \mathcal{T}, s)$ und $\text{wsPairs}(u_j, u_i, \mathcal{T}, s)$ vermeiden
- Blattpaare sind immer s -well separated, Algorithmus terminiert also
- Ausgabe sind Paare von Quadtree-Knoten Speicherplatz?

Frage: Wie viele Paare erzeugt der Algorithmus?

Satz 3: Gegeben eine Punktmenge P im \mathbb{R}^d und $s \geq 1$ so lässt sich eine s -WSPD mit $O(s^d n)$ Paaren in Zeit $O(n \log n + s^d n)$ konstruieren.

Beweisskizze:



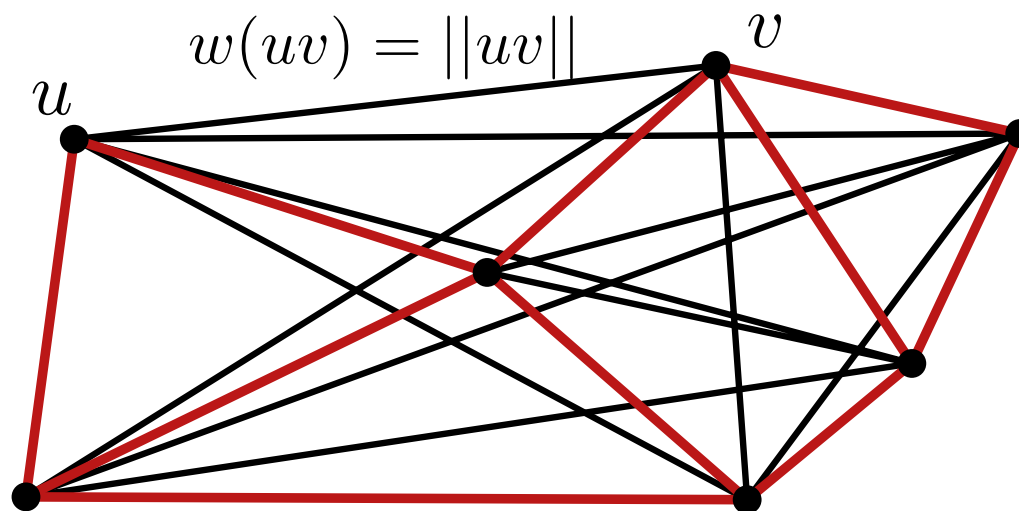
Wdh. Lemma 2:

Geg. Kugel K mit Radius r im \mathbb{R}^d und Menge X paarw. disjunkter Quadtree-Zellen mit Seitenlänge $\geq x$, die K schneiden. Dann gilt

$$|X| \leq (1 + \lceil 2r/x \rceil)^d.$$

Für eine Menge P von n Punkten in \mathbb{R}^d ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P) \Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.



Für eine Menge P von n Punkten in \mathbb{R}^d ist der **Euklidische Graph** $\mathcal{EG}(P) = (P, \binom{P}{2})$ der vollständige gewichtete Graph, dessen Kantengewichte dem Euklidischen Abstand der Kantenendpunkte entsprechen.

Da $\mathcal{EG}(P) \Theta(n^2)$ Kanten hat, wird oft ein dünner Graph mit $O(n)$ Kanten gesucht, dessen kürzeste Wege die Kantengewichte in $\mathcal{EG}(P)$ approximieren.

Def.: Ein gewichteter Graph G mit Knotenmenge P heißt **t -Spanner** für P und einen Dehnungsfaktor $t \geq 1$, falls für alle Paare $x, y \in P$ gilt

$$\|xy\| \leq \delta_G(x, y) \leq t \cdot \|xy\|,$$

wobei $\delta_G(x, y) =$ Länge kürzester x - y -Weg in G .

Def.: Für n Punkte P in \mathbb{R}^d und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
 $E = \{\{x, y\} \mid \exists \{u, v\} \in W \text{ mit } \text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}$.

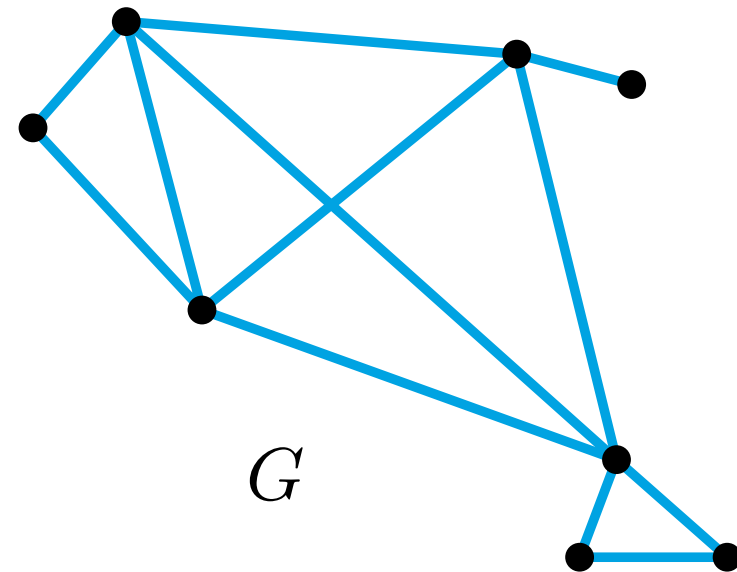
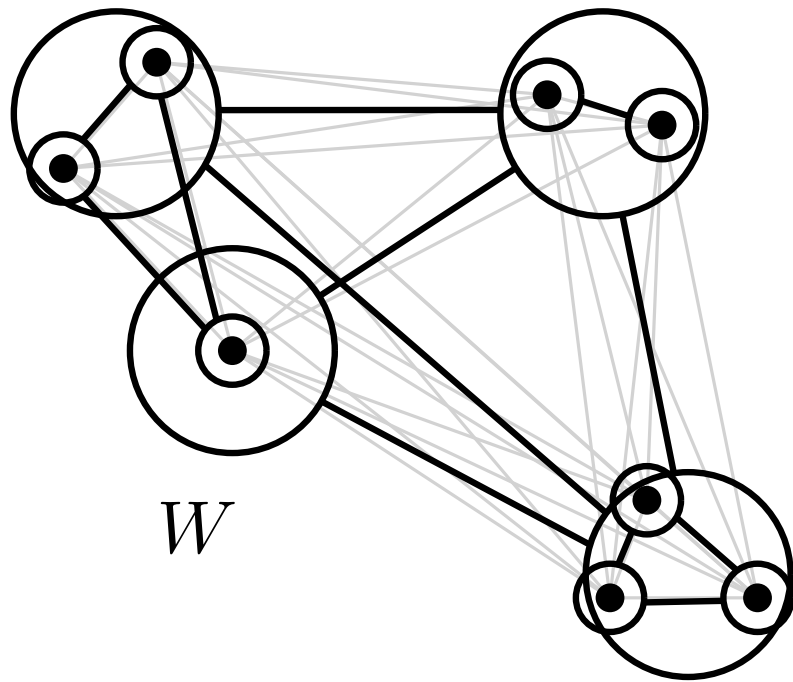
Wdh.: Jedes Paar $\{u, v\} \in W$ entspricht zwei Quadtreeknoten u und v . Aus jedem Quadtreeknoten wird wie folgt ein Repräsentant gewählt. Für Blatt u definiere den Repräsentanten

$$\text{rep}(u) = \begin{cases} p & \text{falls } P_u = \{p\} \text{ (} u \text{ ist Blatt)} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen inneren Knoten v setze $\text{rep}(v) = \text{rep}(u)$ für ein nichtleeres Kind u von v .

WSPD und t -Spanner

Def.: Für n Punkte P in \mathbb{R}^d und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
 $E = \{\{x, y\} \mid \exists \{u, v\} \in W \text{ mit } \text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}$.

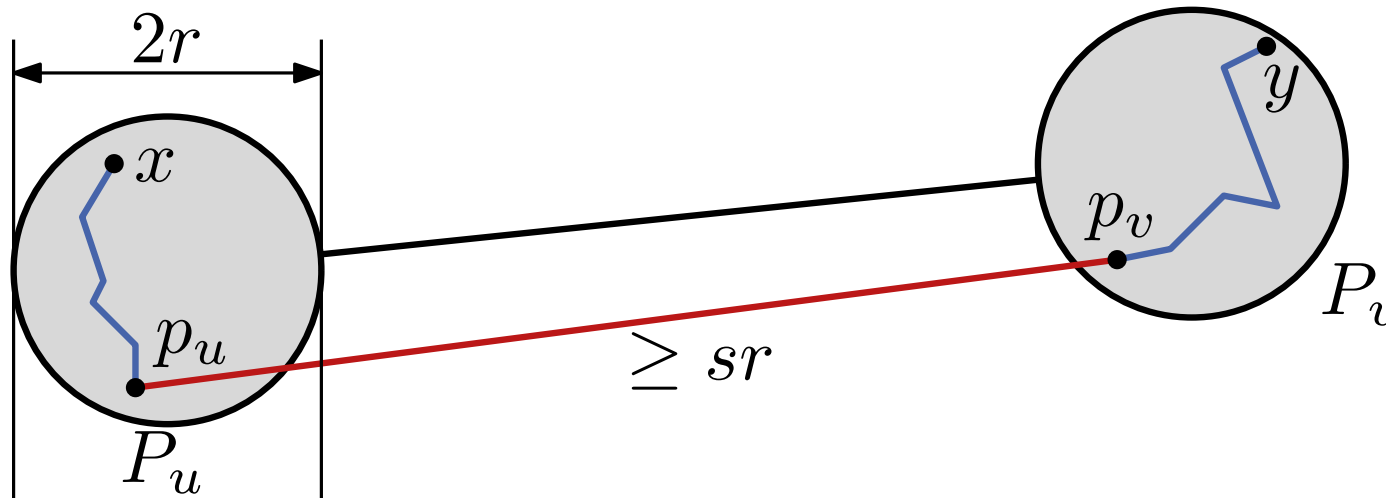


WSPD und t -Spanner

Def.: Für n Punkte P in \mathbb{R}^d und eine WSPD W von P definiere den Graphen $G = (P, E)$ mit
$$E = \{\{x, y\} \mid \exists \{u, v\} \in W \text{ mit } \text{rep}(u) = x, \text{rep}(v) = y\}.$$

Lemma 3: Ist W eine s -WSPD für ein geeignetes $s = s(t) \geq 4$,
so ist G ein t -Spanner für P mit $O(s^d n)$ Kanten.

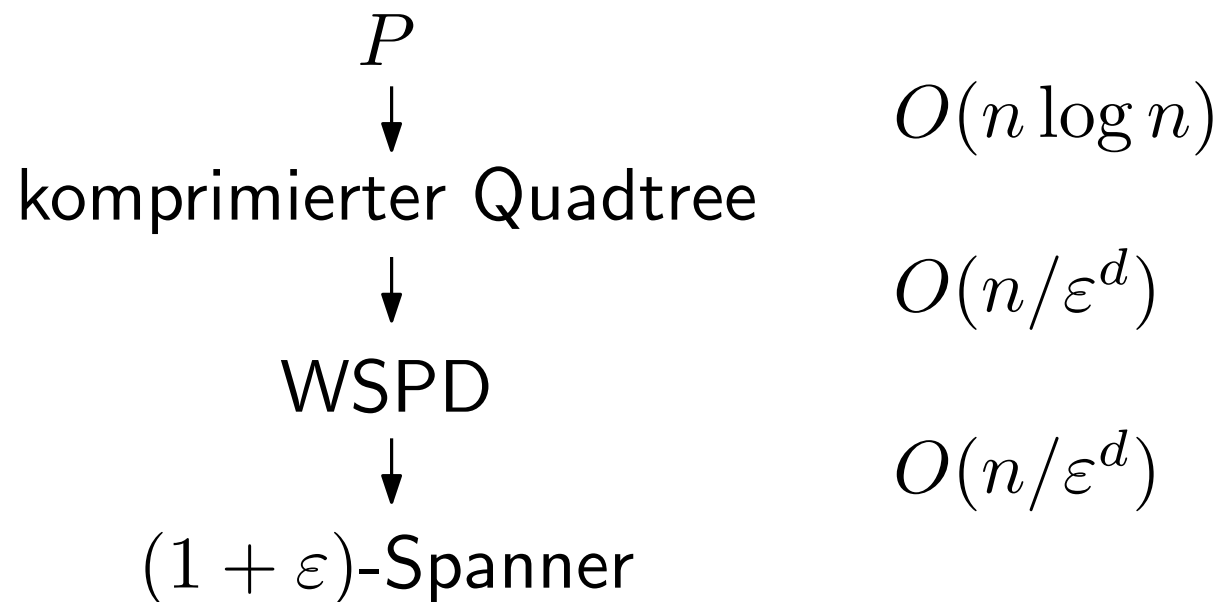
Beweis: (Tafel)



Satz 4: Für eine Menge P von n Punkten in \mathbb{R}^d und ein $\varepsilon \in (0, 1]$ kann ein $(1 + \varepsilon)$ -Spanner für P mit $O(n/\varepsilon^d)$ Kanten in $O(n \log n + n/\varepsilon^d)$ Zeit berechnet werden.

Beweis: Für $t = (1 + \varepsilon)$ gilt mit $s = 4 \cdot \frac{t+1}{t-1}$

$$O(s^d n) = O\left(\left(4 \cdot \frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^d n\right) \subseteq O\left(\left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^d n\right) = O\left(\frac{n}{\varepsilon^d}\right)$$



□