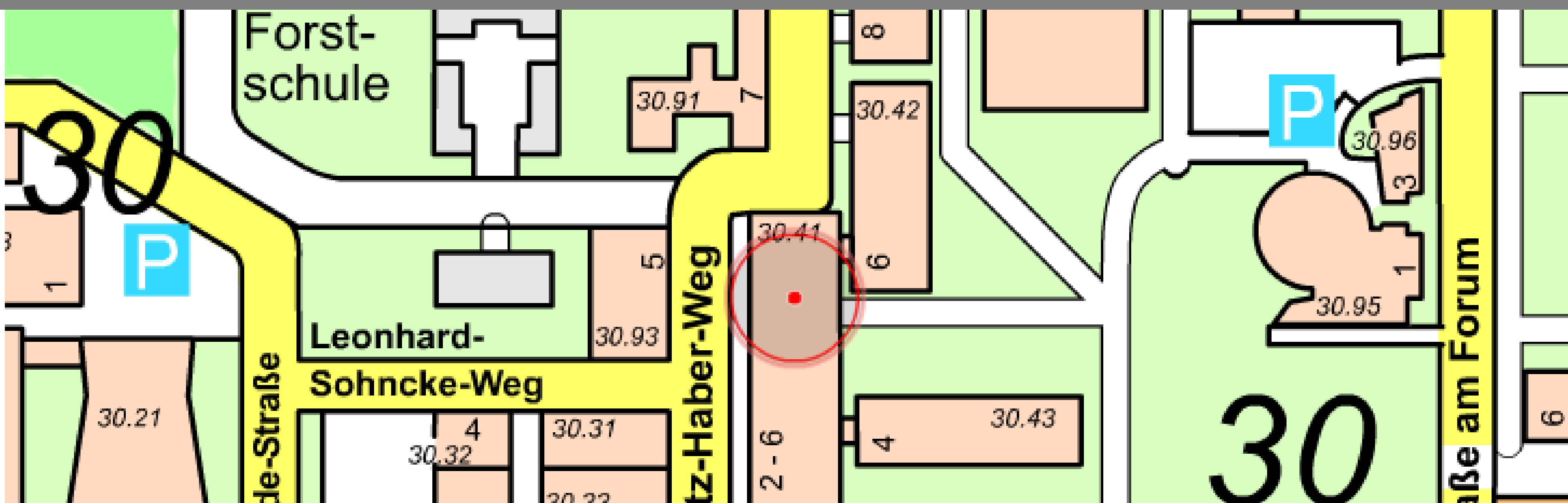
Karlsruhe Institute of Technology

Übung zur Vorlesung *Planare Graphen*

Übung · 22. April ’14
Andreas Gemsa

Institute of Theoretical Informatics · Prof. Dr. Dorothea Wagner



Aufgabe 1: Hyperkubus

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: Hyperkubus

Karlsruhe Institute of Technology

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden

(a) + (b): $|V_n| = ?, \deg(v) = ?, |E_n| = ?$

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: Hyperkubus

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden

(a) + (b): $|V_n| = ?, \deg(v) = ?, |E_n| = ?$

(c): Planare Einbettung (wenn möglich) von Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4

(d): Planare Einbettung von Q_4 auf einem Torus

Aufgabe 1: Hyperkubus

Karlsruhe Institute of Technology

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden

(a) + (b): $|V_n| = ?, \deg(v) = ?, |E_n| = ?$

(c): Planare Einbettung (wenn möglich) von Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4

(d): Planare Einbettung von Q_4 auf einem Torus

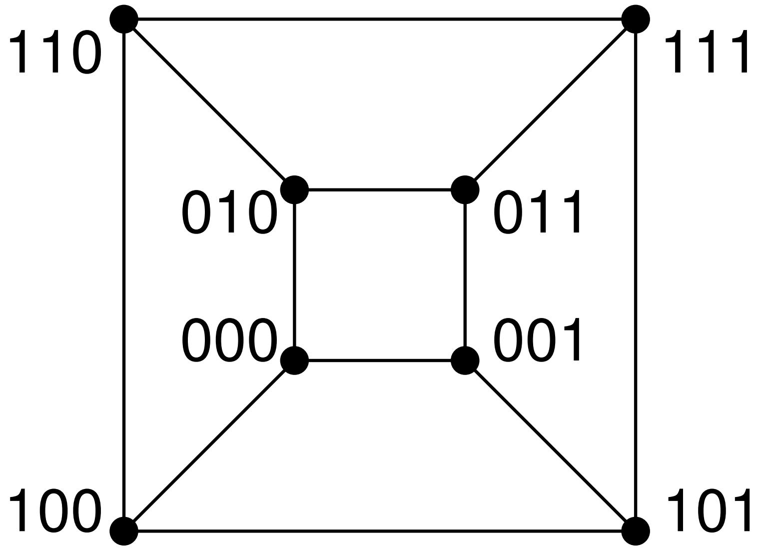
Lemma

Jeder bipartite planare Graph mit $n > 2$ Knoten hat maximal $2n - 4$ Kanten.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

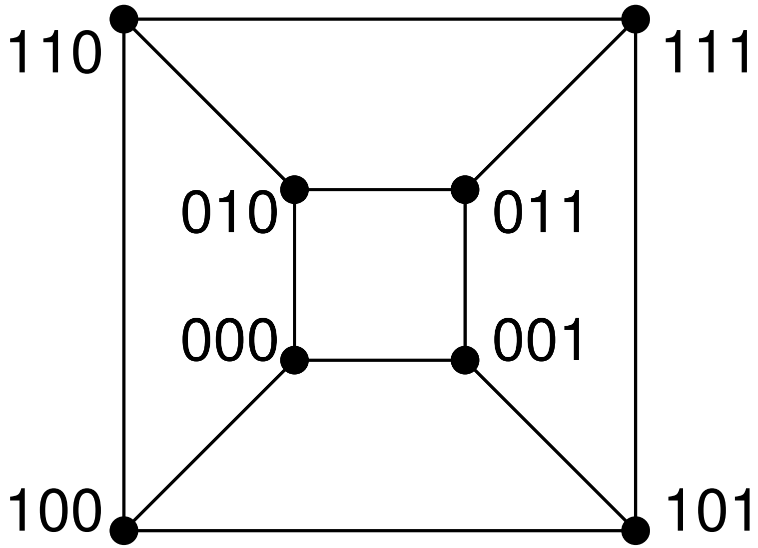
Aufgabe 1: Hyperkubus

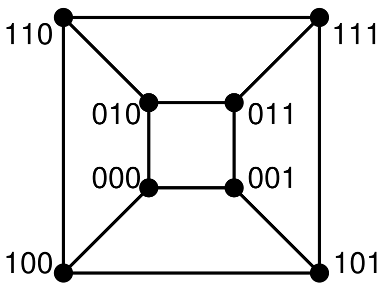
Q_3



Aufgabe 1: Hyperkubus

Q_3 Q_4?

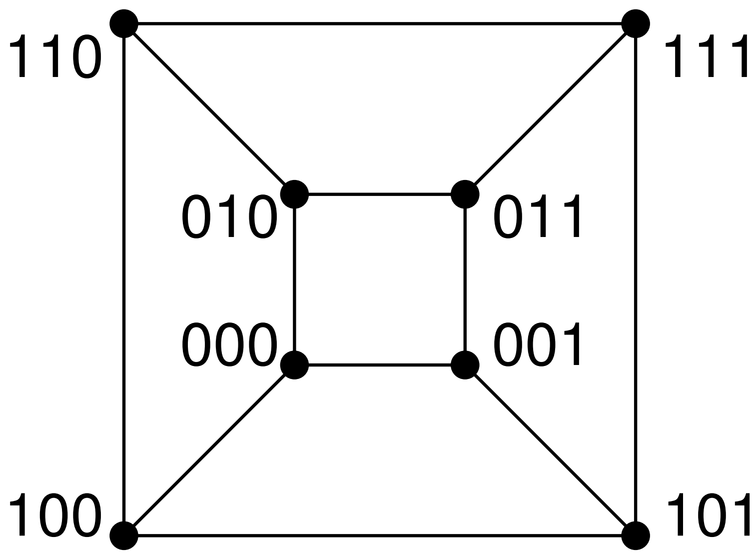


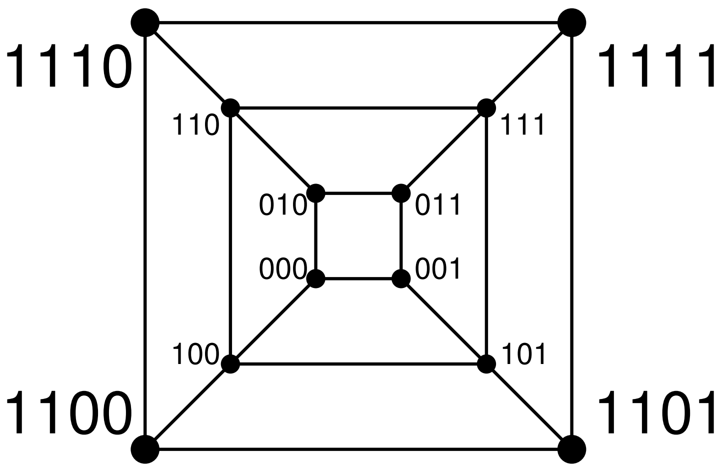


Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: Hyperkubus

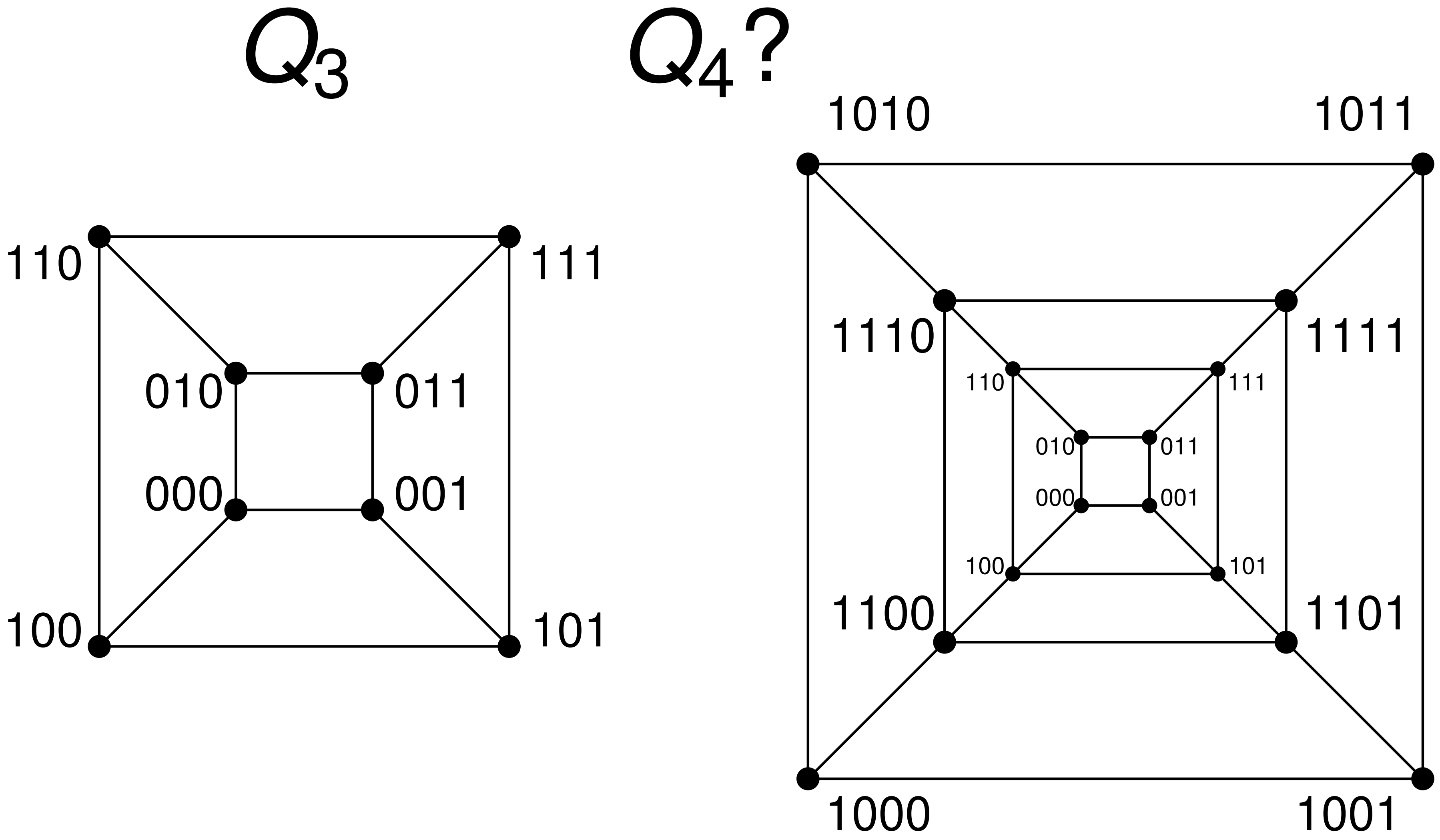
Q_3 $\quad$ Q_4?





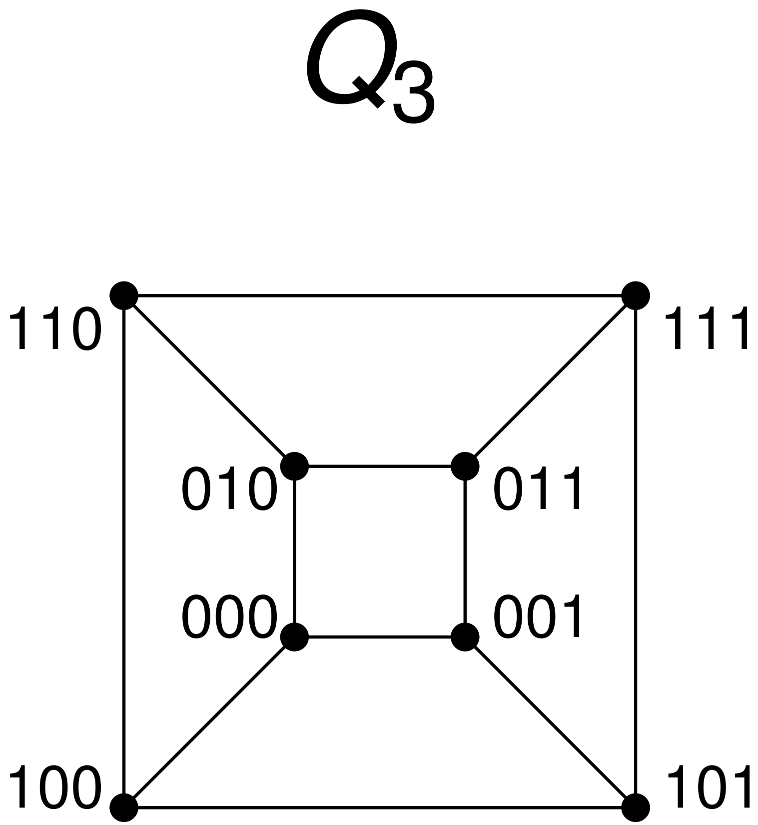
Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

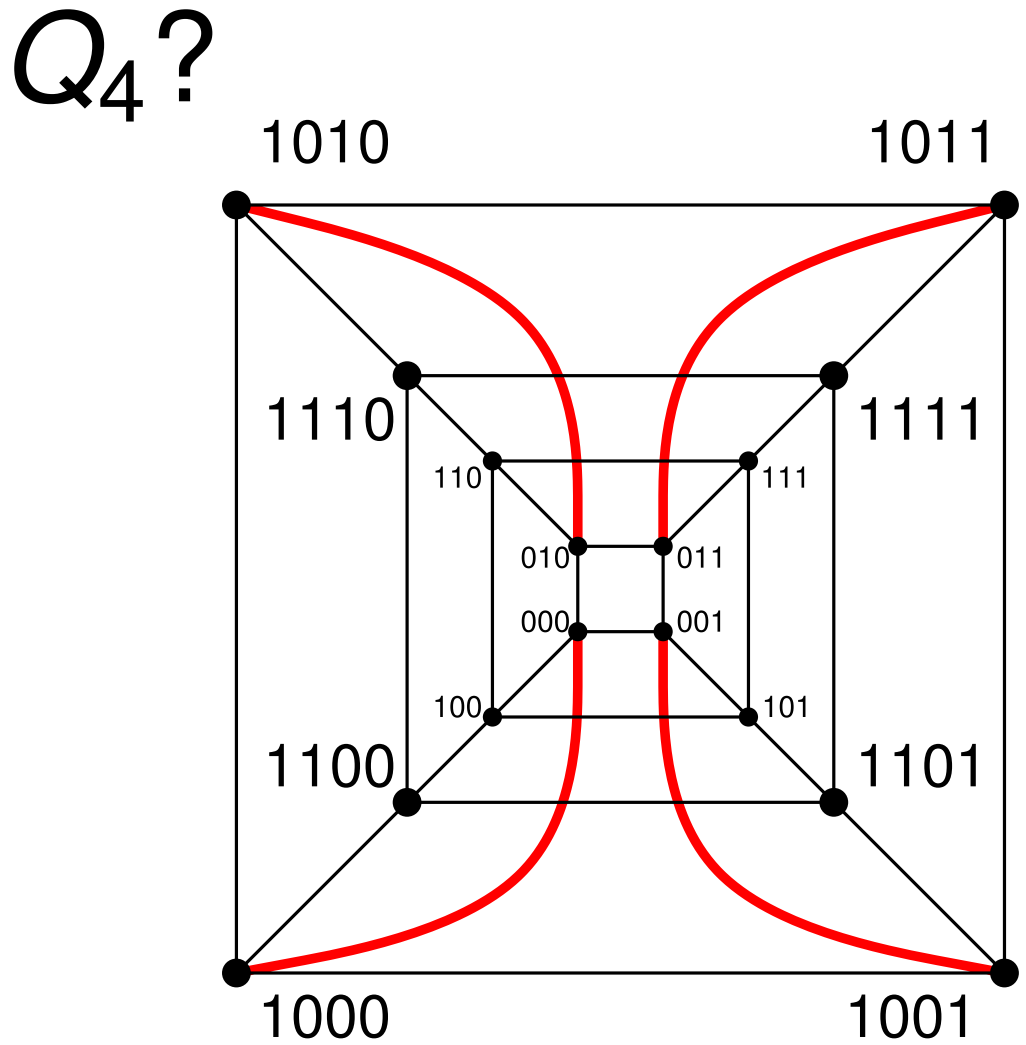
Aufgabe 1: Hyperkubus



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: Hyperkubus

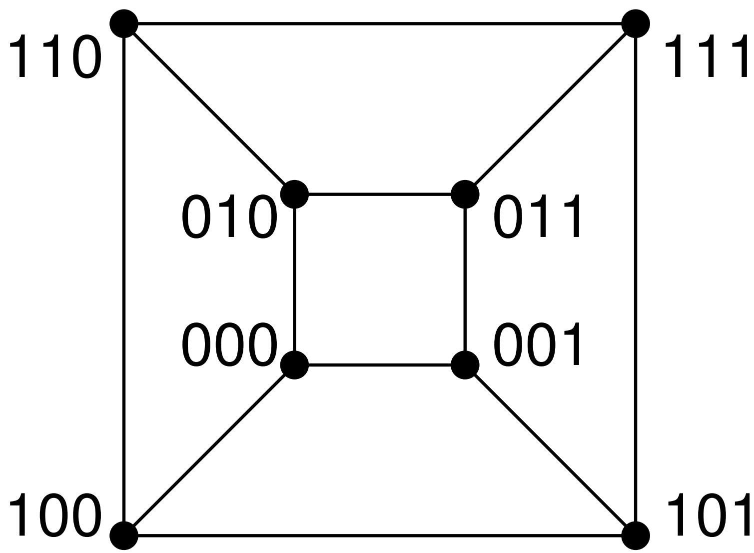




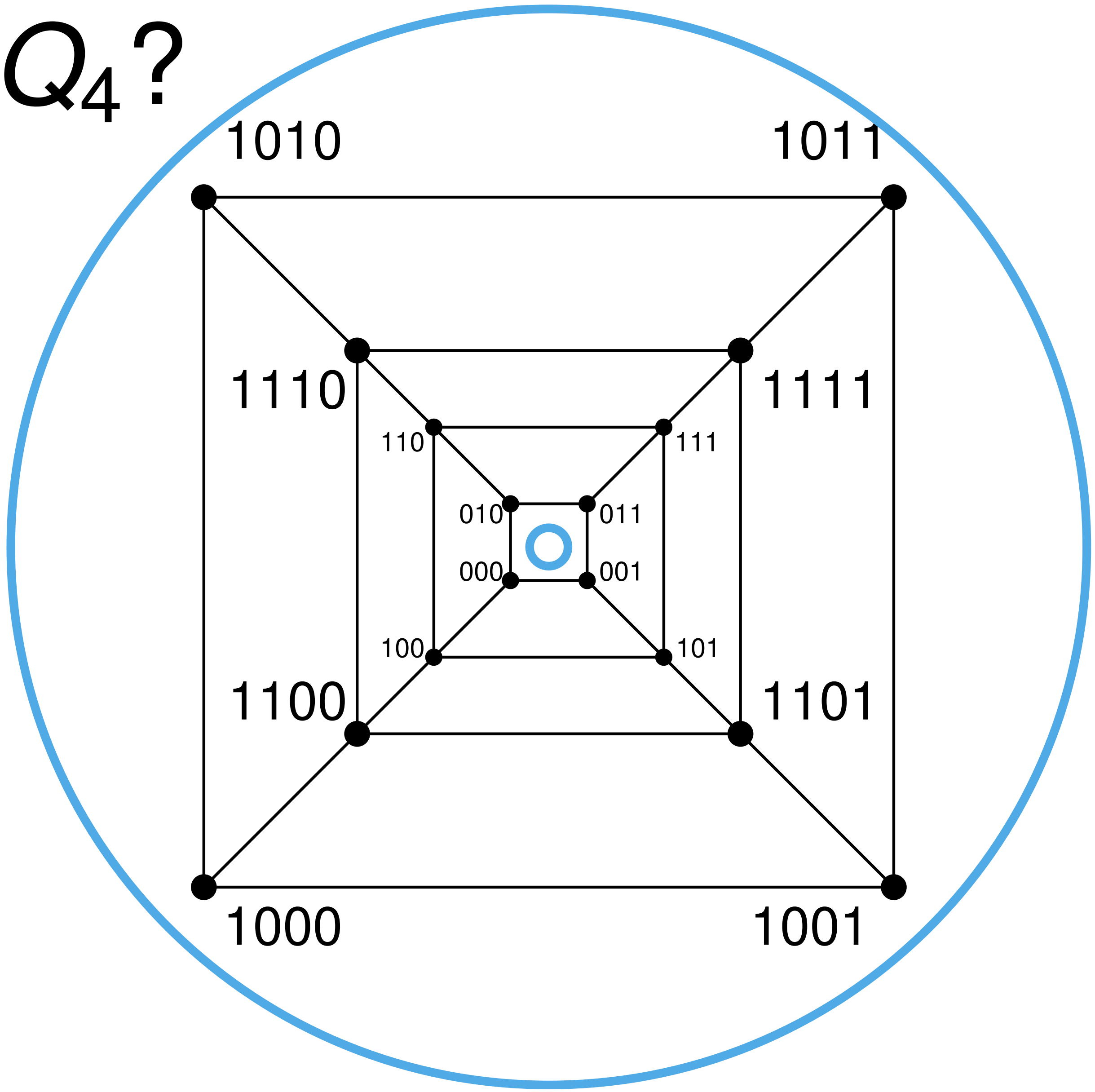
Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: Hyperkubus

Q_3



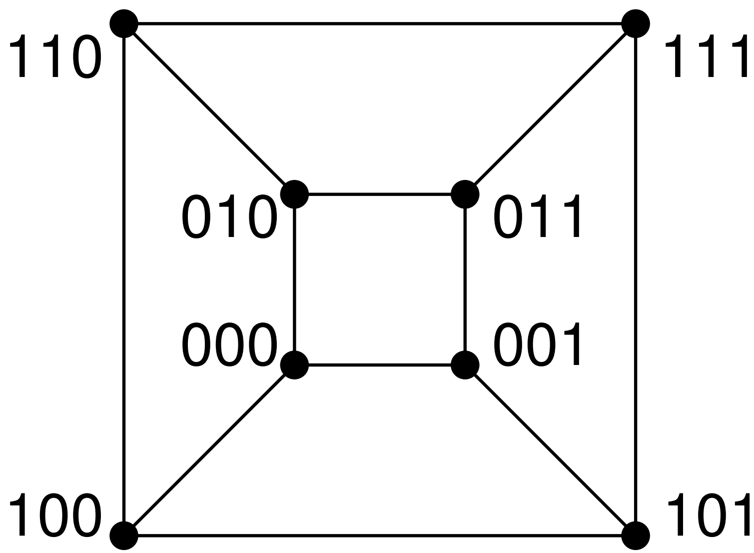
Q_4?



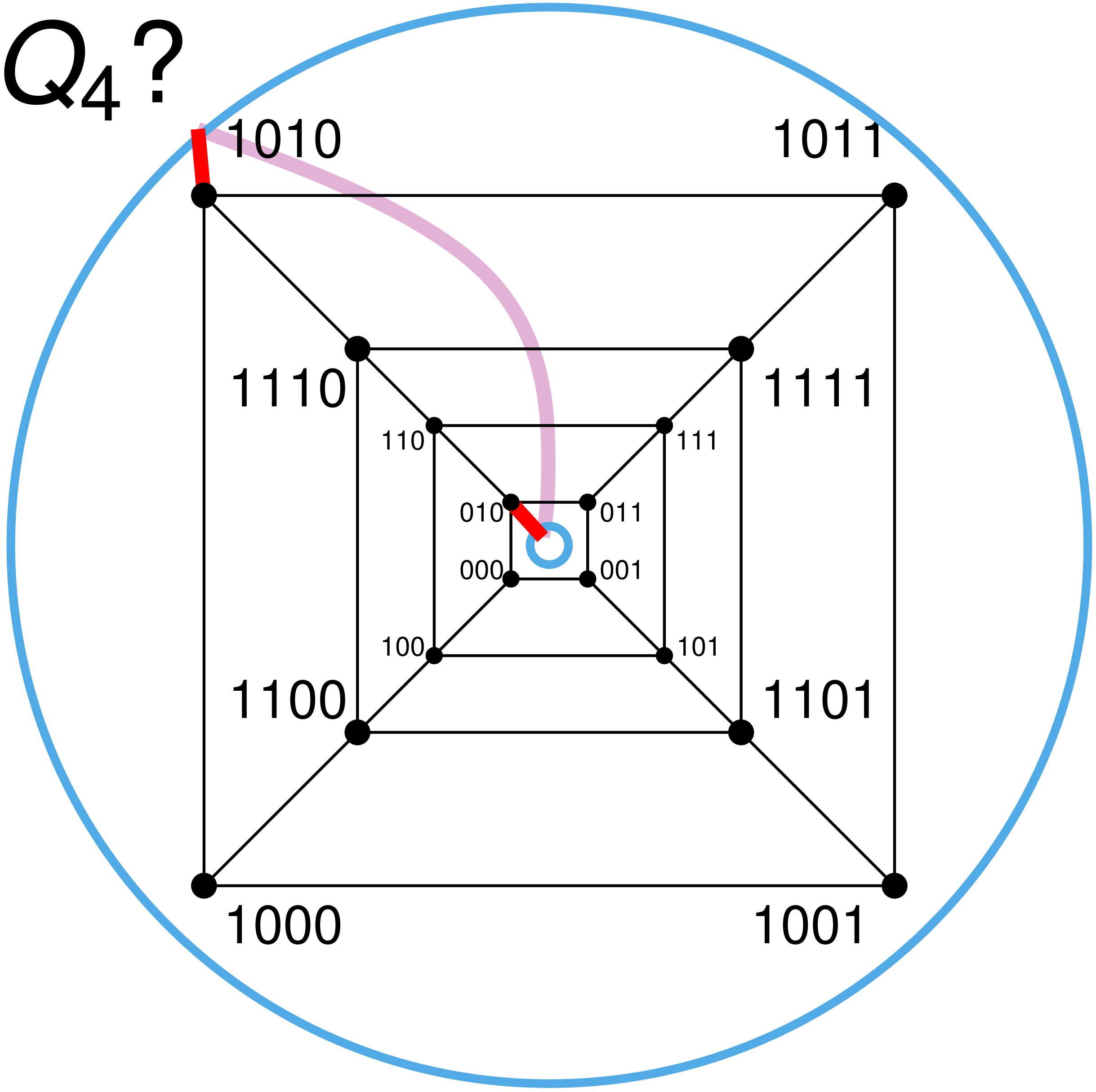
Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: Hyperkubus

Q_3



Q_4?



Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

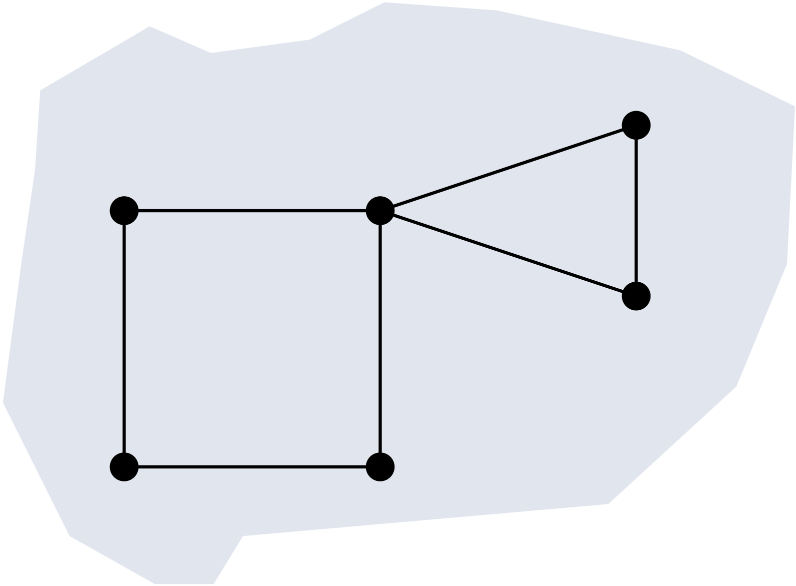
Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

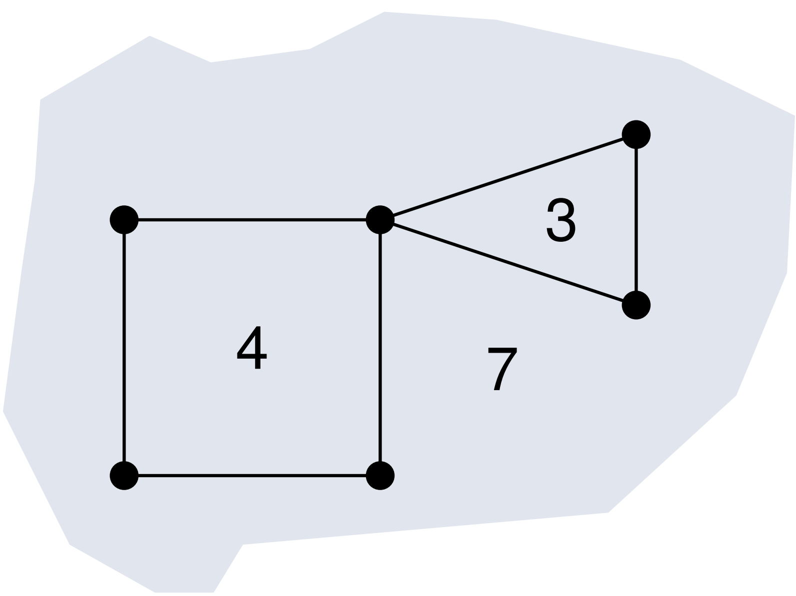
Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?



Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?

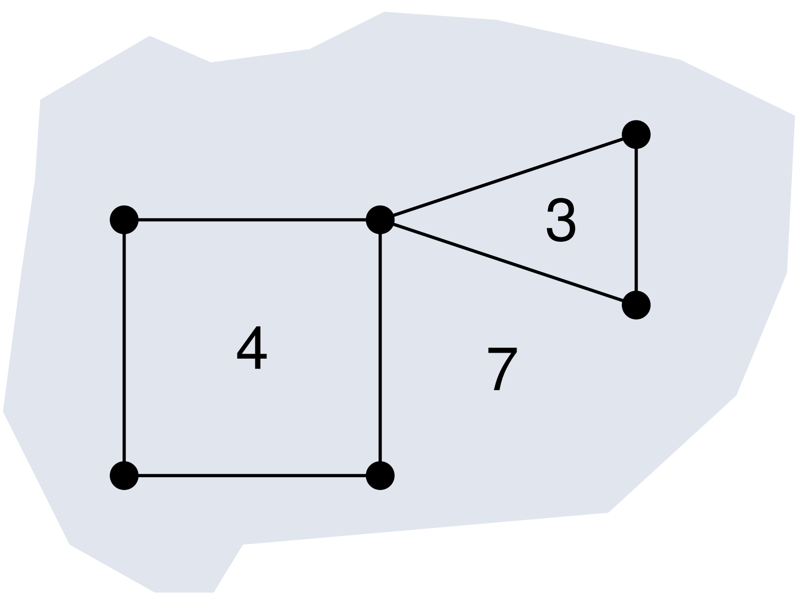


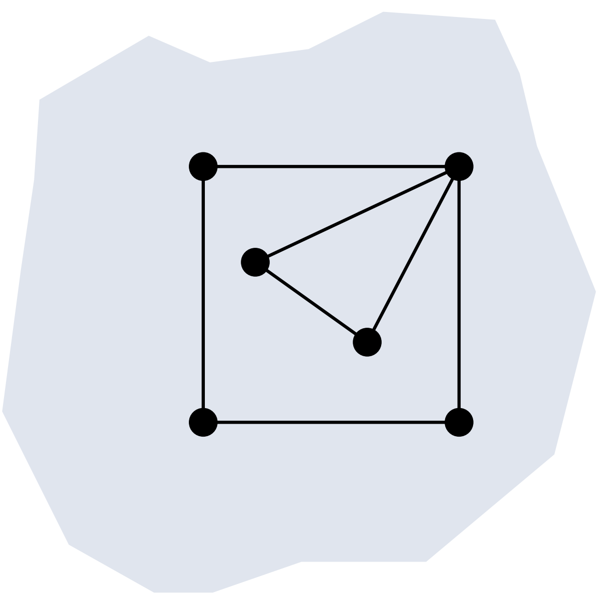
Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \dots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?

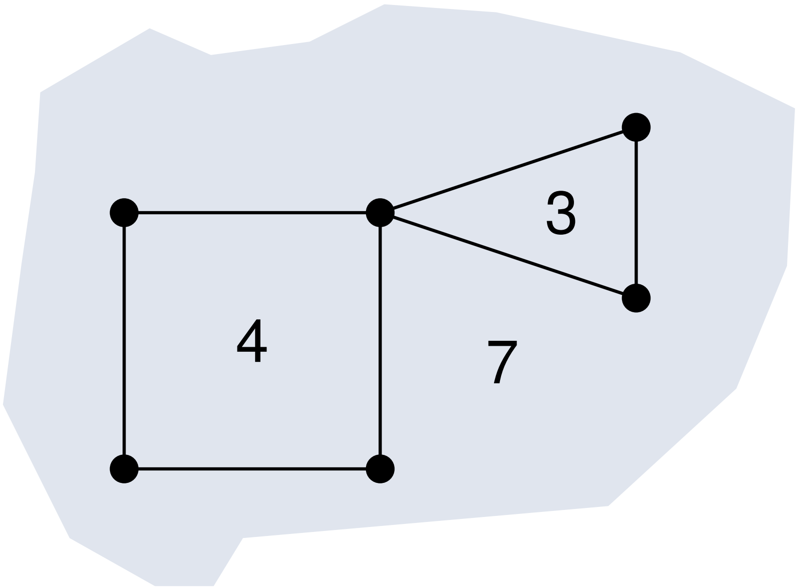


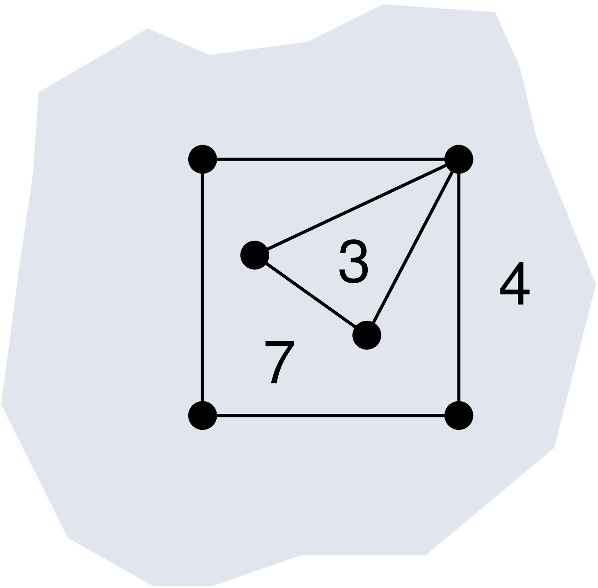


Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?

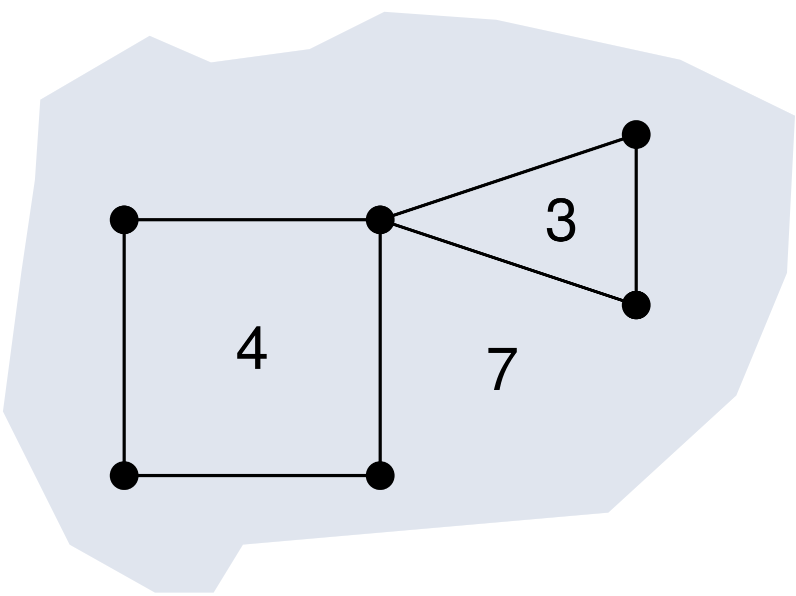


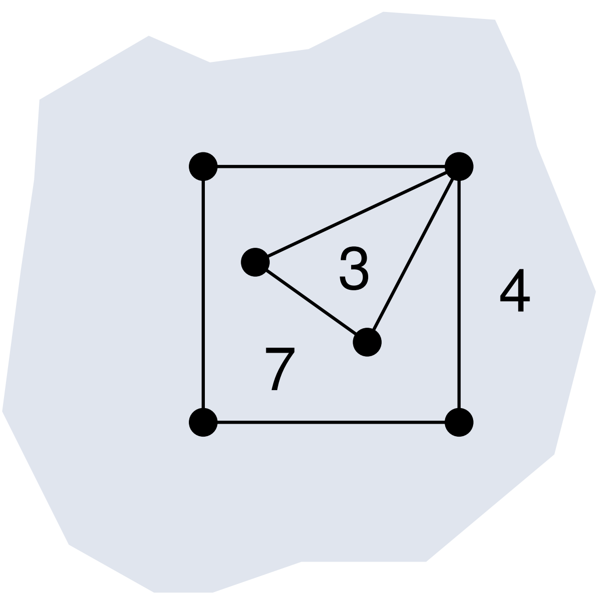


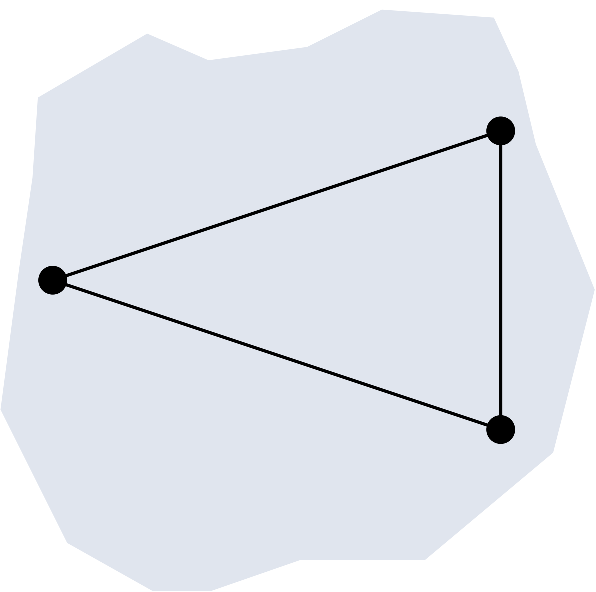
Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?



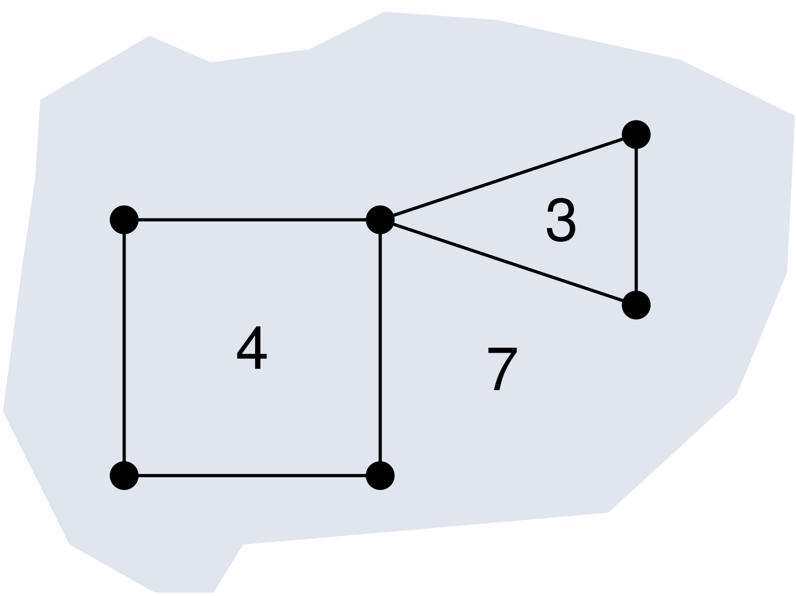


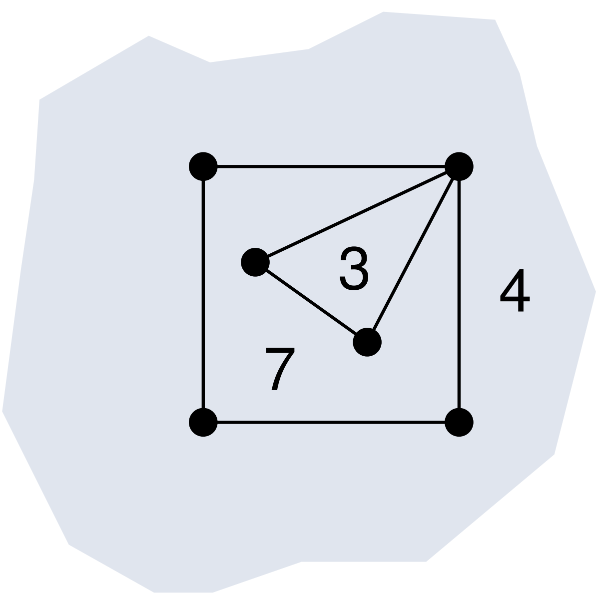


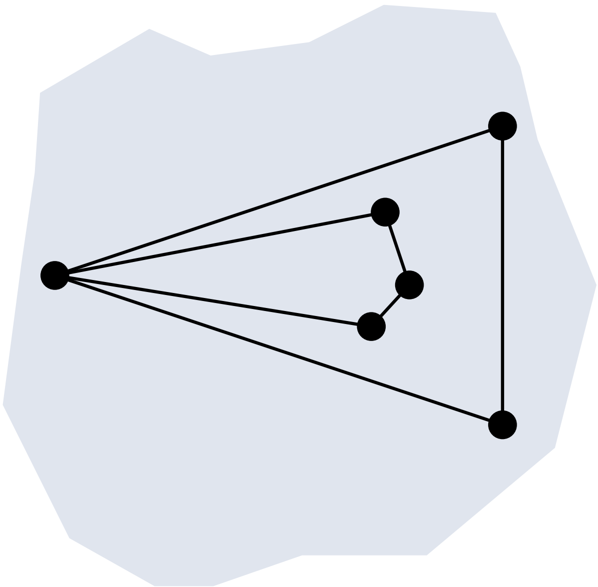
Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?



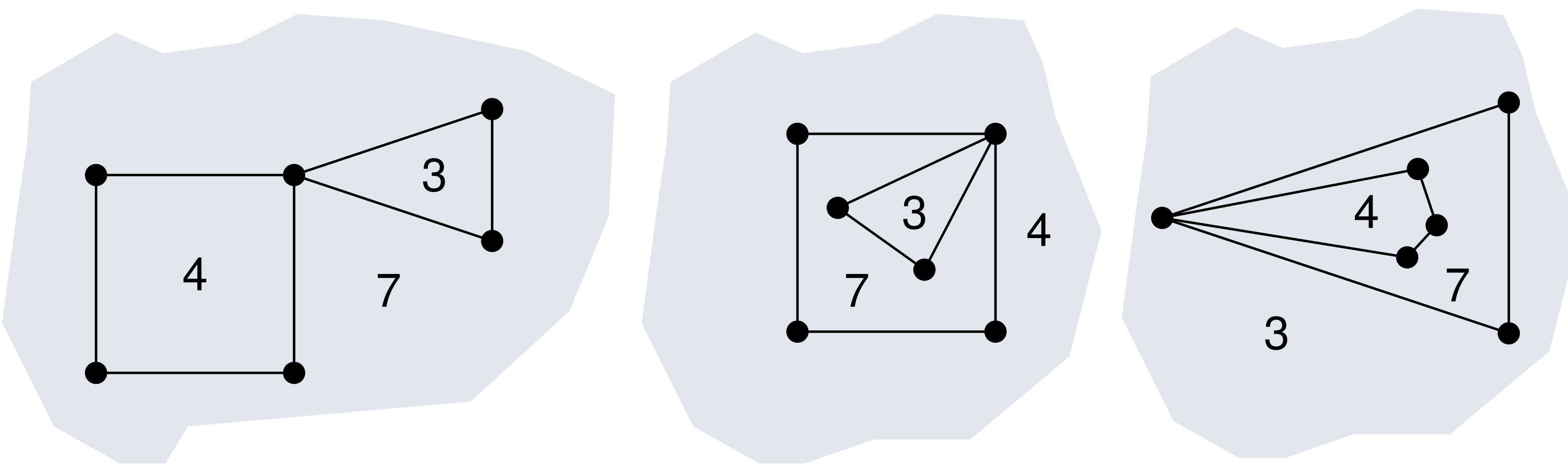




Aufgabe 2: Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Q: Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so dass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind ?



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 3: Die Schiefe

Karlsruhe Institute of Technology

Die *Skewness* eines Graphen G ist die minimale Anzahl Kanten, die aus G gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist. D.h. die Skewness eines Graphen ist 0 genau dann, wenn der Graph planar ist.

(a) Zeigen Sie, dass für einen einfachen Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt:

$$\mathit{skewness}(G) \geq m - 3n + 6.$$

(b) Berechnen Sie die *Skewness* von K_3, K_5, $K_{3,3}$ und K_6.

Aufgabe 4: Bäume

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G mit n Knoten:

1. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei.
2. G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.
3. G ist kreisfrei und hat $n - 1$ Kanten.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Ende

Morgen 14:00 - 15:30

Mittlerer Hörsaal - Gebäude 10.91 - Maschinenbau