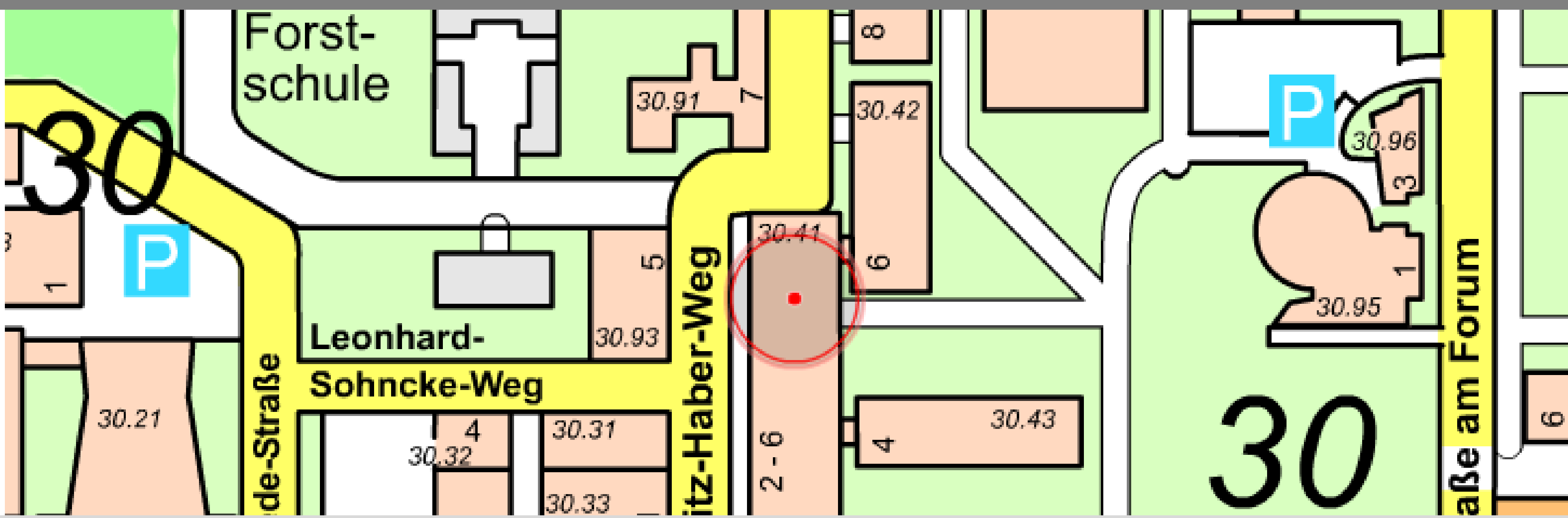
Karlsruhe Institute of Technology

2. Übung zur Vorlesung *Planare Graphen*

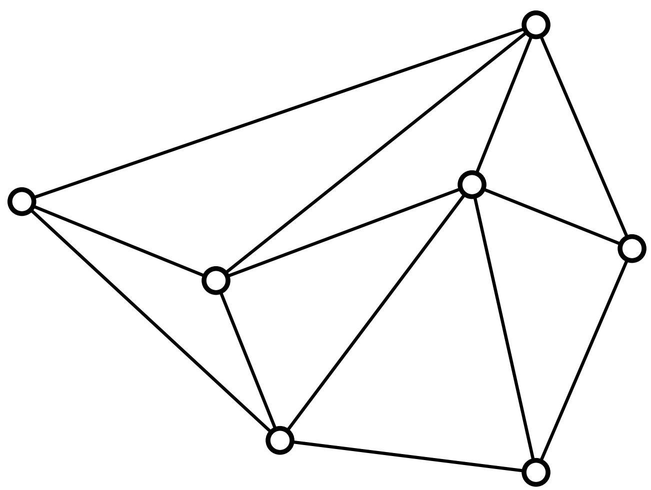
Übung · 6. Mai ’14
Andreas Gemsa

Institute of Theoretical Informatics · Prof. Dr. Dorothea Wagner



Aufgabe 1: planare Graphen und Triangulierungen

Graph G mit einer planarer Einbettung.
G heißt **maximal planar**, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
G heisst **trianguliert**, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.



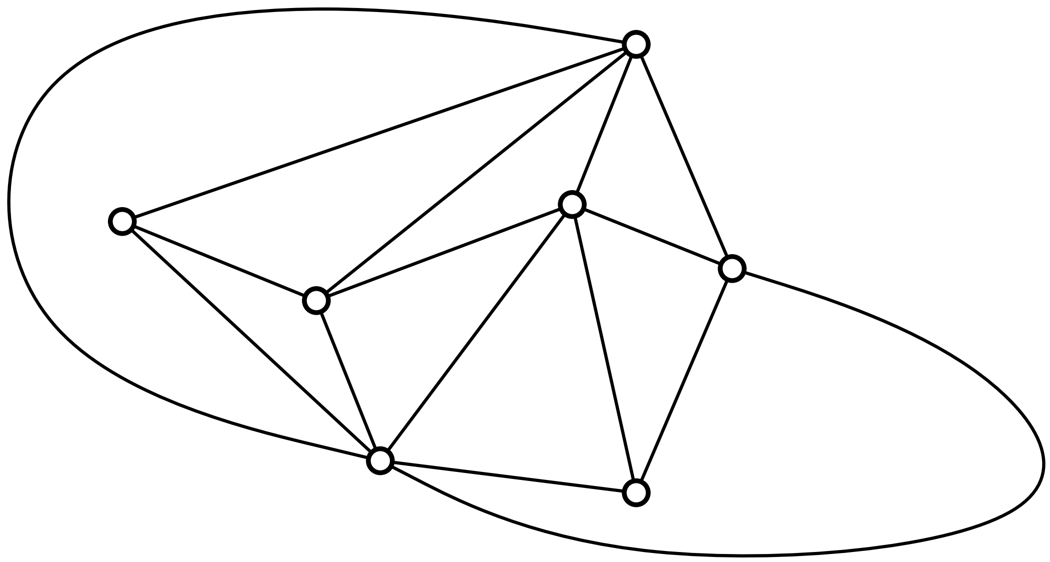
Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: planare Graphen und Triangulierungen

Graph G mit einer planarer Einbettung.

G heißt **maximal planar**, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.

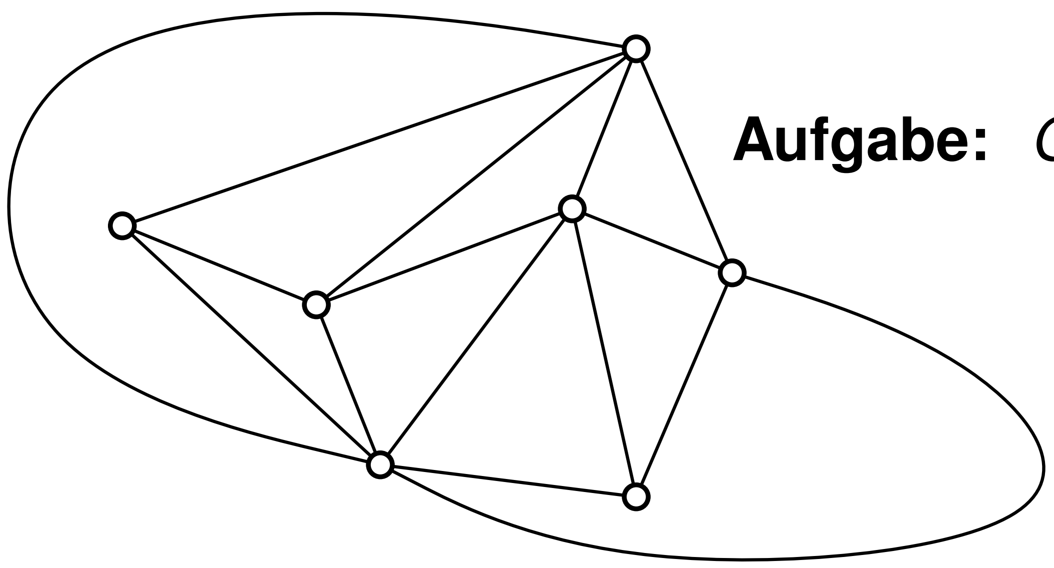
G heisst **trianguliert**, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1: planare Graphen und Triangulierungen

Graph G mit einer planarer Einbettung.
G heißt **maximal planar**, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
G heisst **trianguliert**, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.



Aufgabe: G trianguliert $\Leftrightarrow$ G maximal planar

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2: Der Petersengraph

Definition: Der Graph T_n hat als Knotenmenge die zweielementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist. Der *Komplementgraph* P von T_5 heißt **Petersengraph**.

(a) Zeichnen sie P

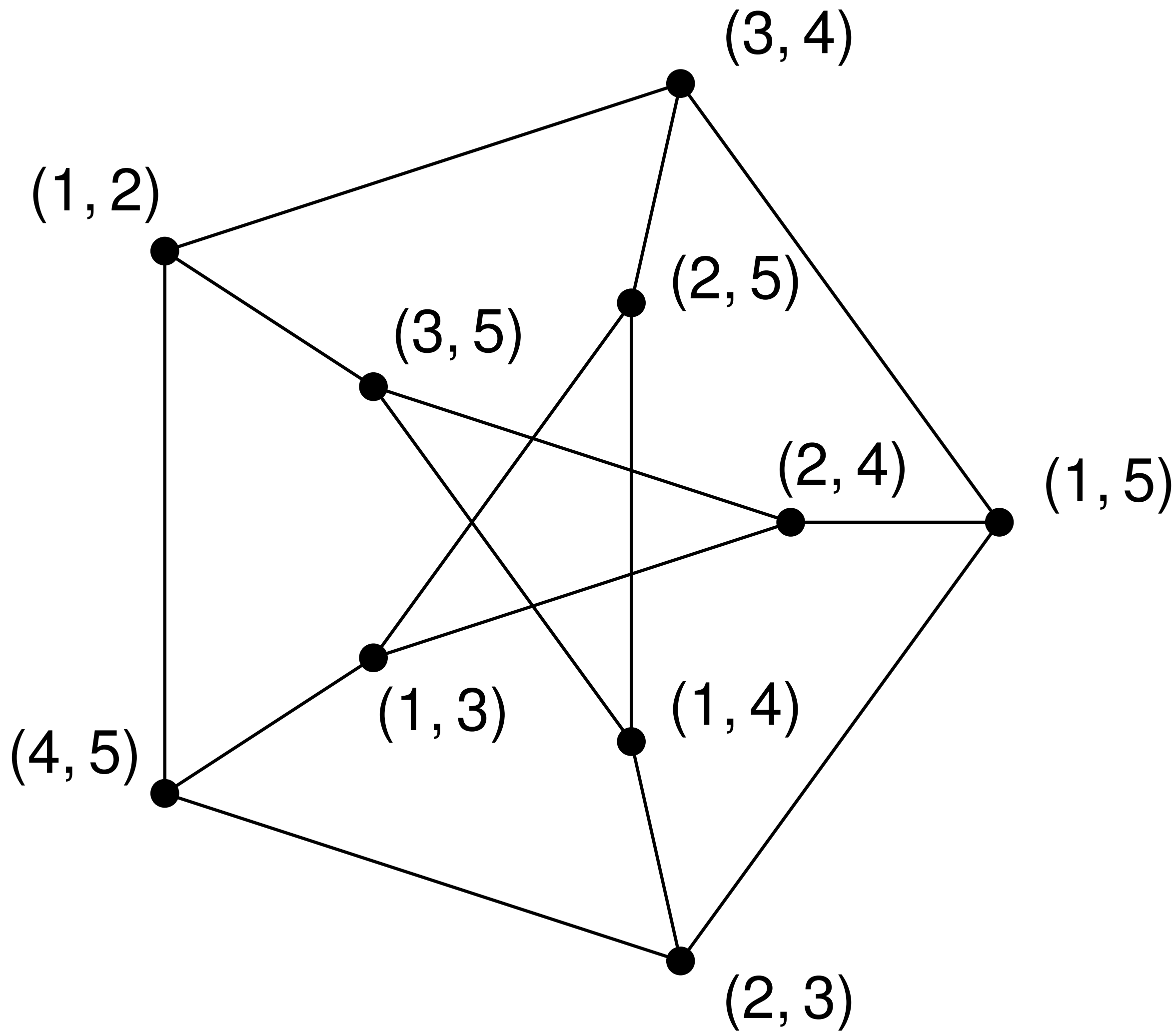
(b) Zeigen Sie, dass der Petersengraph nicht planar ist.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Petersonsgraph



Petersongraph

Def.: Der *girth* eines Graphs G ist die Länge des kürzesten Kreises in G.

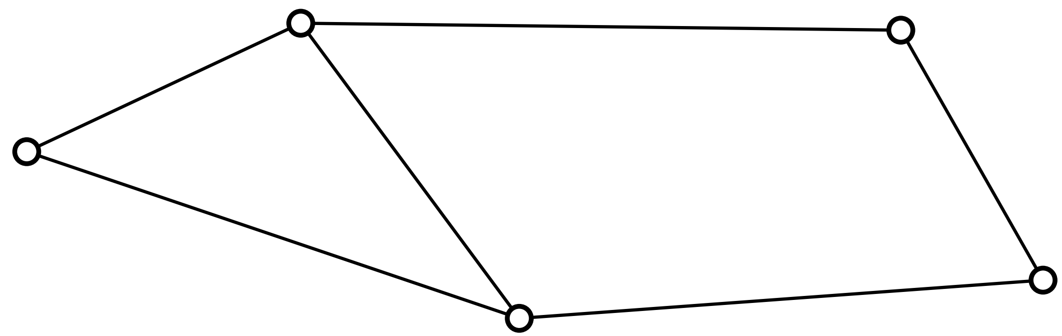
Lemma

Jeder planare Graph mit girth $k \geq 3$ hat maximal $m \leq k(v-2)/k-2)$ Kanten.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 3: Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen G^* ist.



(a) Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n - 2$.

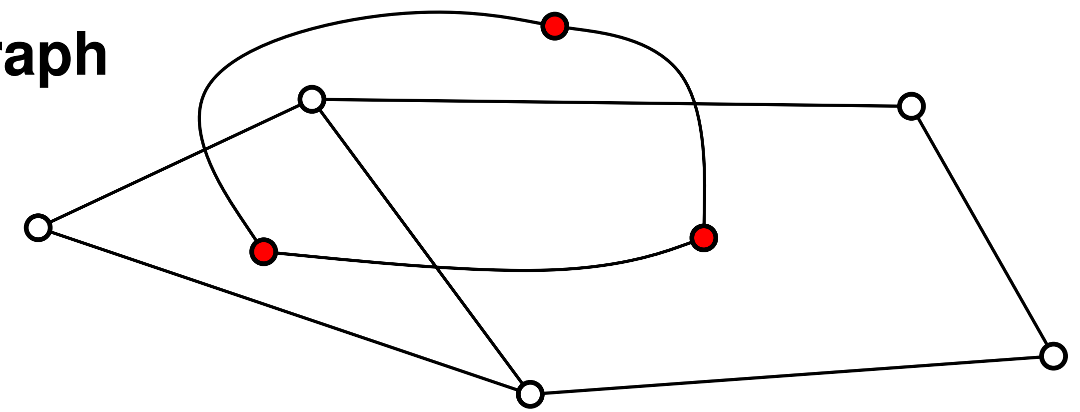
(b) Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 3: Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen G^* ist.

Dualgraph

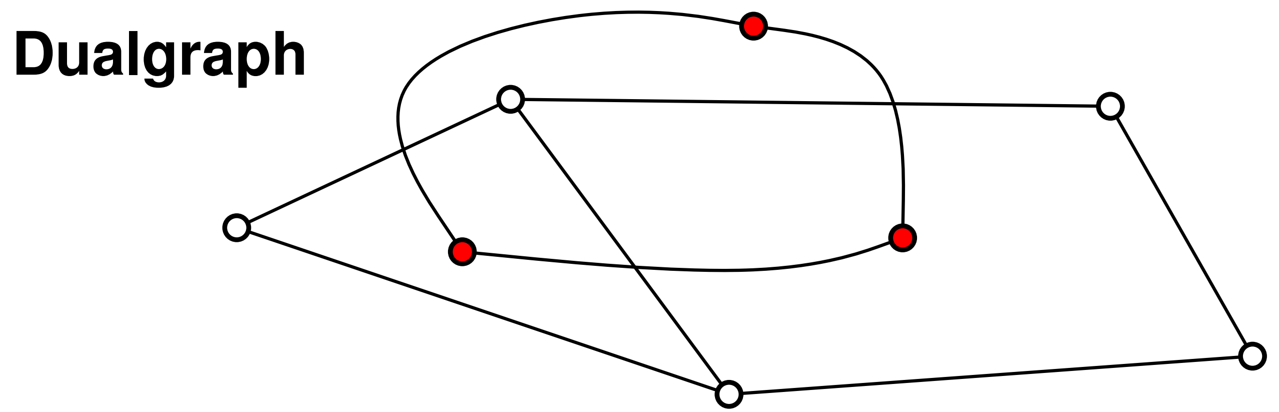


(a) Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n - 2$.

(b) Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.

Aufgabe 3: Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen G^* ist.



(a) Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n - 2$.

(b) Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq$ **4** einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 4: Färben

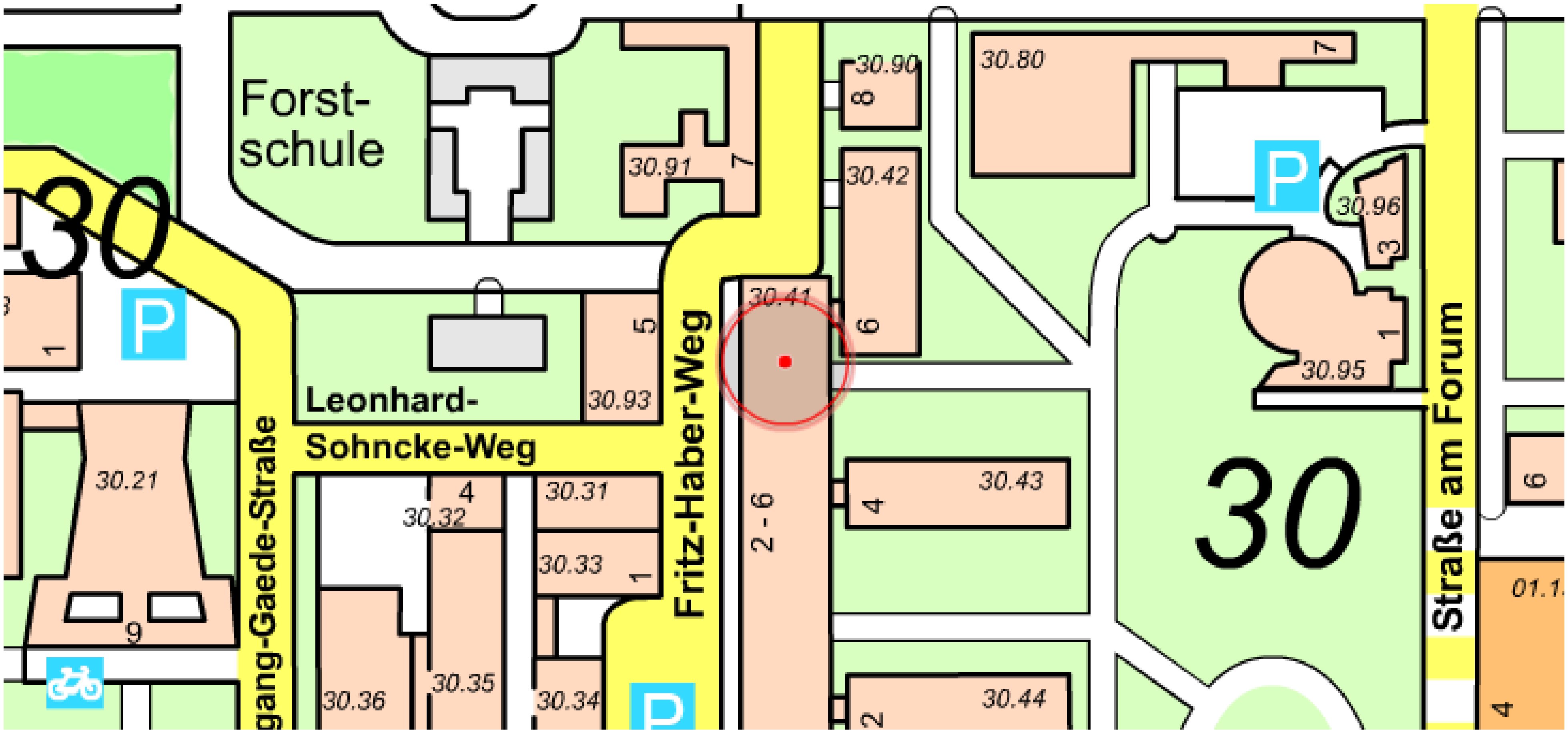
Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
2. Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$?
3. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

Ende

Nächste Woche 14:00 - 15:30

Tamara – Planar Separator Thm (engl.)



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner