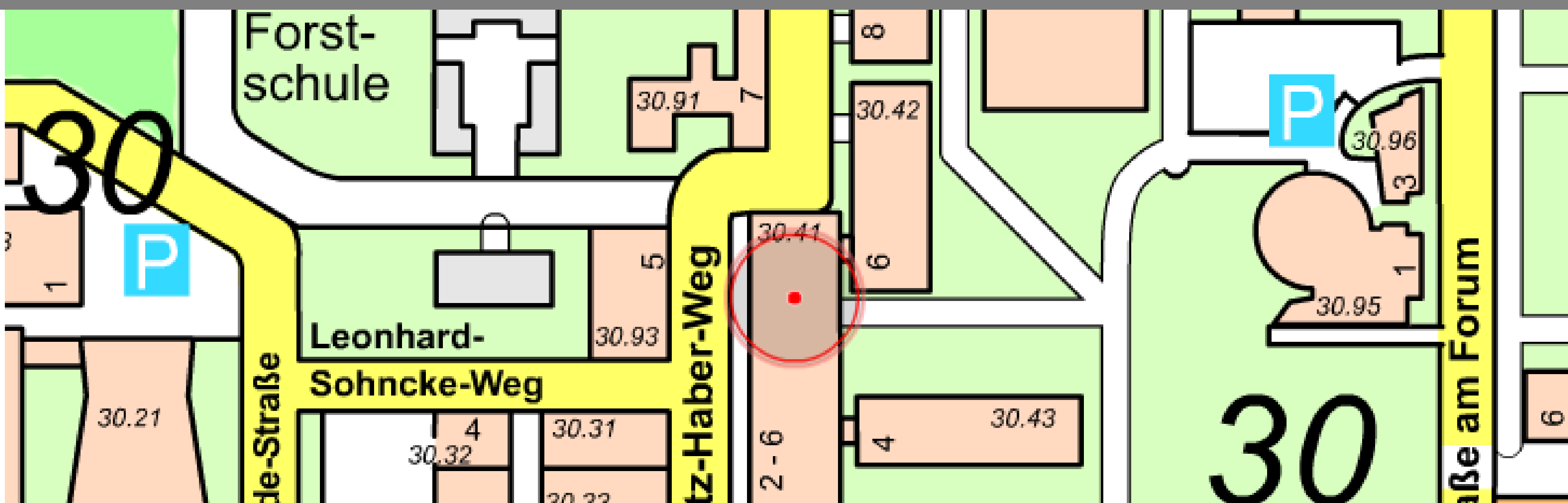
Karlsruhe Institute of Technology

3. Übung zur Vorlesung *Planare Graphen*

Übung · 20. Mai ’14
Andreas Gemsa

Institute of Theoretical Informatics · Prof. Dr. Dorothea Wagner



Nachtrag

ÜB 2 – Aufgabe 4: Färben

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
2. Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$?
3. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

ÜB 2 – Aufgabe 4: Färben

Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält

G 2-färbbar $\Rightarrow$ G enthält keine Kreise ungerade Länge

Ann. G enthält mind. einen Kreis C ungerader Länge

Da G gültig gefärbt, ist auch C gültig gefärbt.
Aber Kreise ungerade Länge können nicht mit 2 Farben gültig gefärbt werden. $\lightning$

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält

G enthält keine Kreise ungerade Länge $\Rightarrow$ G 2-färbbar

Ann. G nicht 2-färbbar

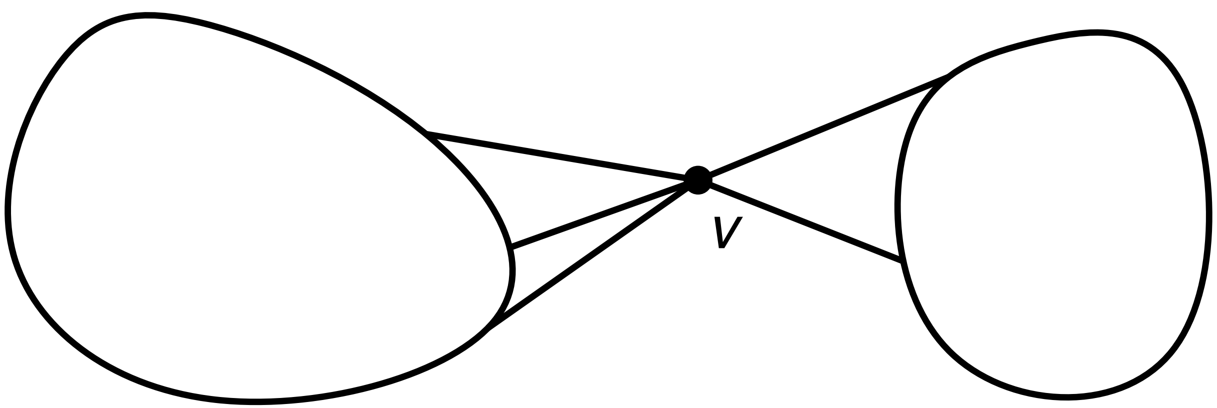
- Sei G minimales (bezgl. Anzahl Knoten) Gegenbeispiel

Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält

G enthält keine Kreise ungerade Länge $\Rightarrow$ G 2-färbbar

Ann. G nicht 2-färbbar

- Sei G minimales (bezgl. Anzahl Knoten) Gegenbeispiel



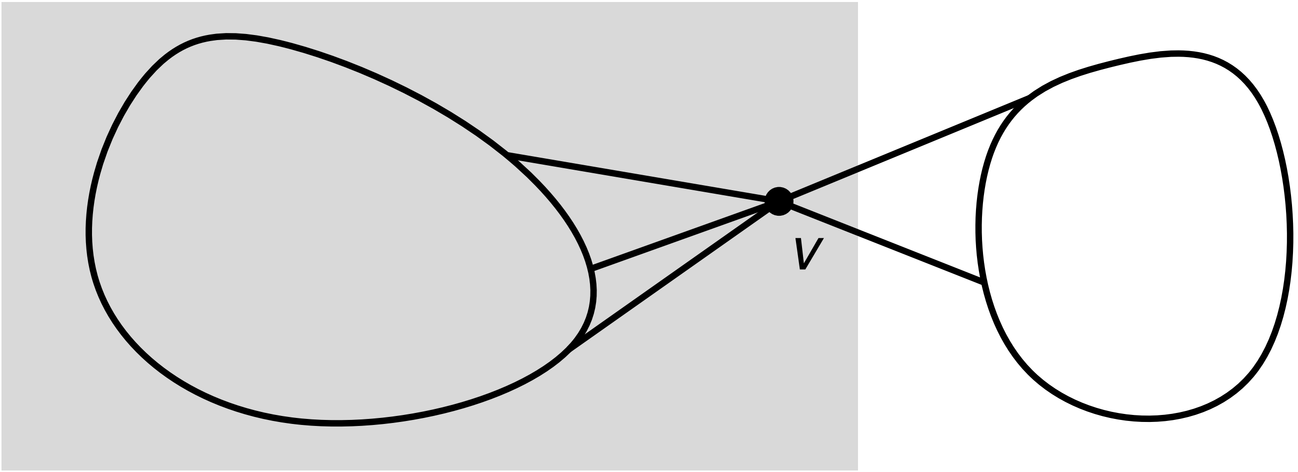
Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält

G enthält keine Kreise ungerade Länge $\Rightarrow$ G 2-färbbar

Ann. G nicht 2-färbbar

- Sei G minimales (bezgl. Anzahl Knoten) Gegenbeispiel

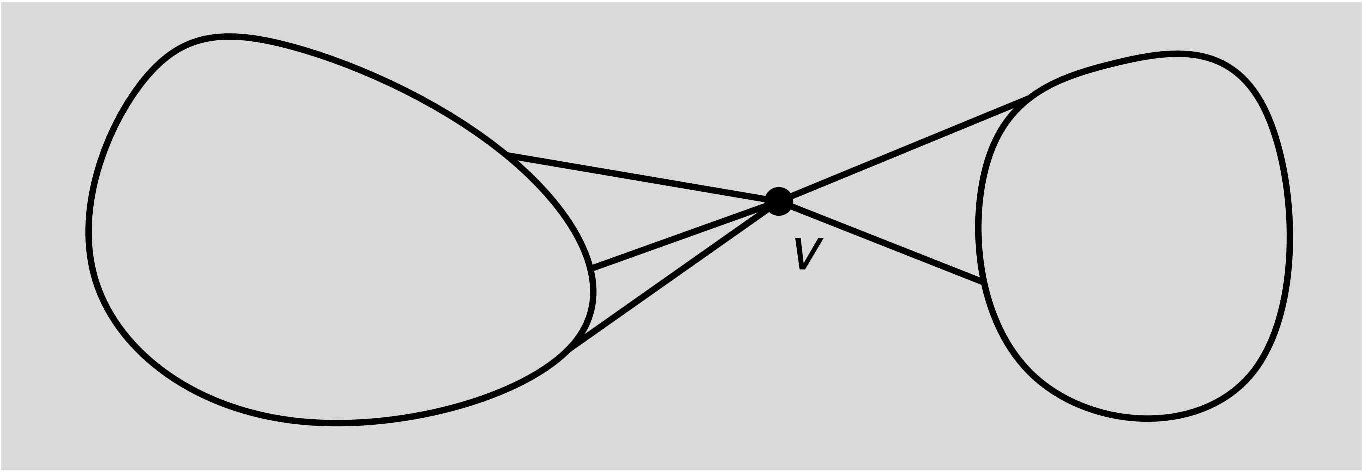


Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält

G enthält keine Kreise ungerade Länge $\Rightarrow$ G 2-färbbar

Ann. G nicht 2-färbbar

- Sei G minimales (bezgl. Anzahl Knoten) Gegenbeispiel



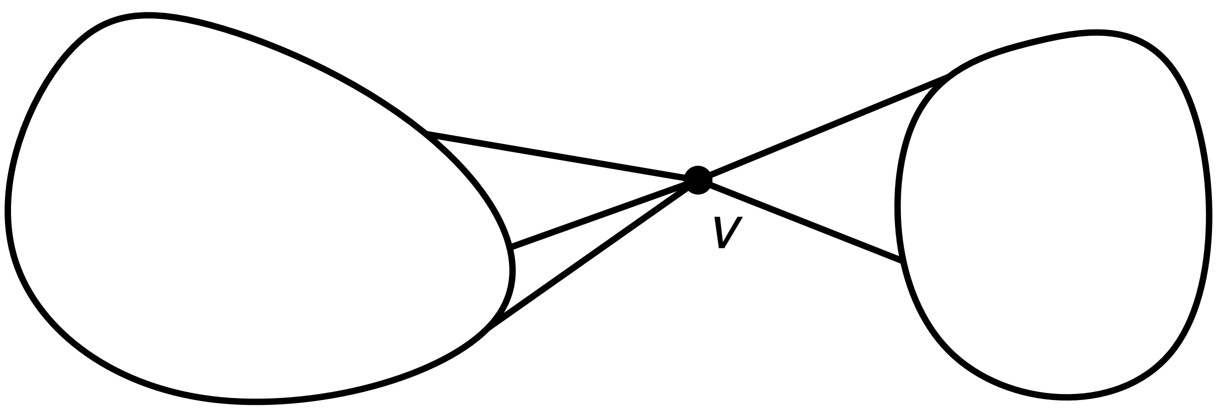
Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält

G enthält keine Kreise ungerade Länge $\Rightarrow$ G 2-färbbar

Ann. G nicht 2-färbbar

- Sei G minimales (bezgl. Anzahl Knoten) Gegenbeispiel
- G ist 2-fach zusammenhängend

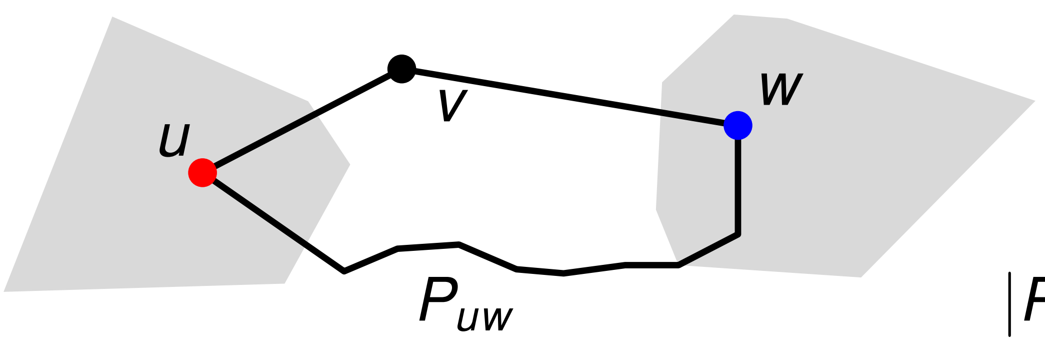


Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält

G enthält keine Kreise ungerade Länge $\Rightarrow$ G 2-färbbar

Ann. G nicht 2-färbbar

- Sei G minimales (bezgl. Anzahl Knoten) Gegenbeispiel
- G ist 2-fach zusammenhängend
- Wähle beliebigen Knoten v in G und färbe $G - v$
- Da G nicht 2 färbbar sind mind. 2 Nachbarn u, w von v mit verschiedenen Farben gefärbt.



$|P_{uw}|$ ungerade

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

zusammenhägender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten

zu zeigen:

Es ex. Schnitt $S \subseteq E$ mit

- $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$
- $G - S = (V, E \setminus S)$ zwei disjunkte $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$
- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$

Planar Separator Theorem

Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ paritioniert werden, dass

1. $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3}n$,
2. S Separator, der V_1 und V_2 trennt,
3. $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

Eine Graphklasse $\mathcal{K}$ hat einen $f(n)$-Separator, wenn folgendes stimmt:

Für jeden $G = (V, E)$ in $\mathcal{K}$ gibt es Konstanten $\alpha < 1$, $c > 0$, so dass eine Partition V_1, V_2, S der von V mit folgenden Eigenschaften existiert:

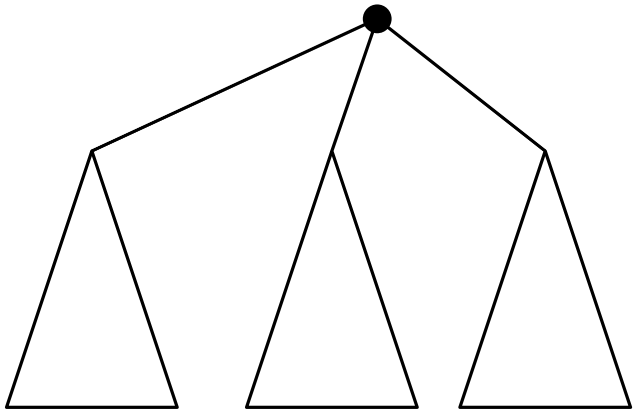
> Es gibt kein Knotenpaar u, v mit $u \in V_1$ und $v \in V_2$ für die gilt $\{u, v\} \in E$, und es gelte außerdem $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot n$, und $|S| \leq c \cdot f(n)$.

a) Zeigen Sie, dass die Graphklasse der Bäume einen 1-Separator hat.

b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.

Aufgabe 2

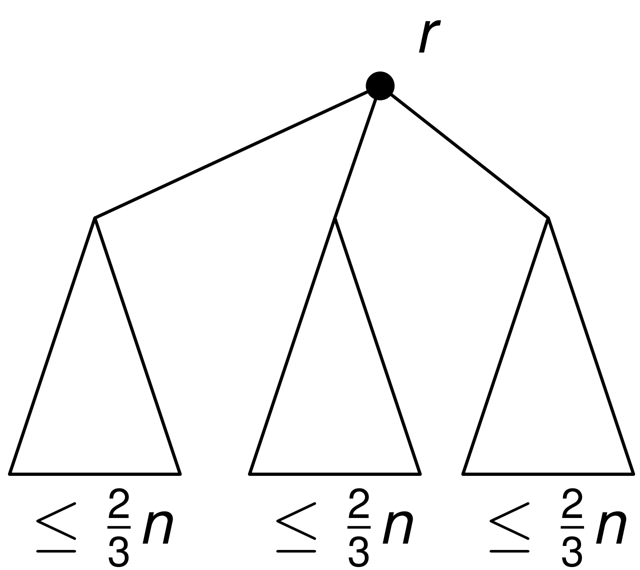
a) Zeigen Sie, dass die Graphklasse der Bäume einen 1-Separator hat.



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

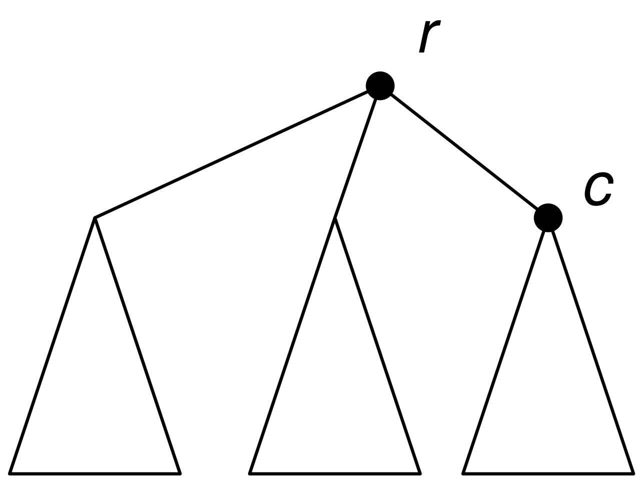
Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Graphklasse der Bäume einen 1-Separator hat.



Aufgabe 2

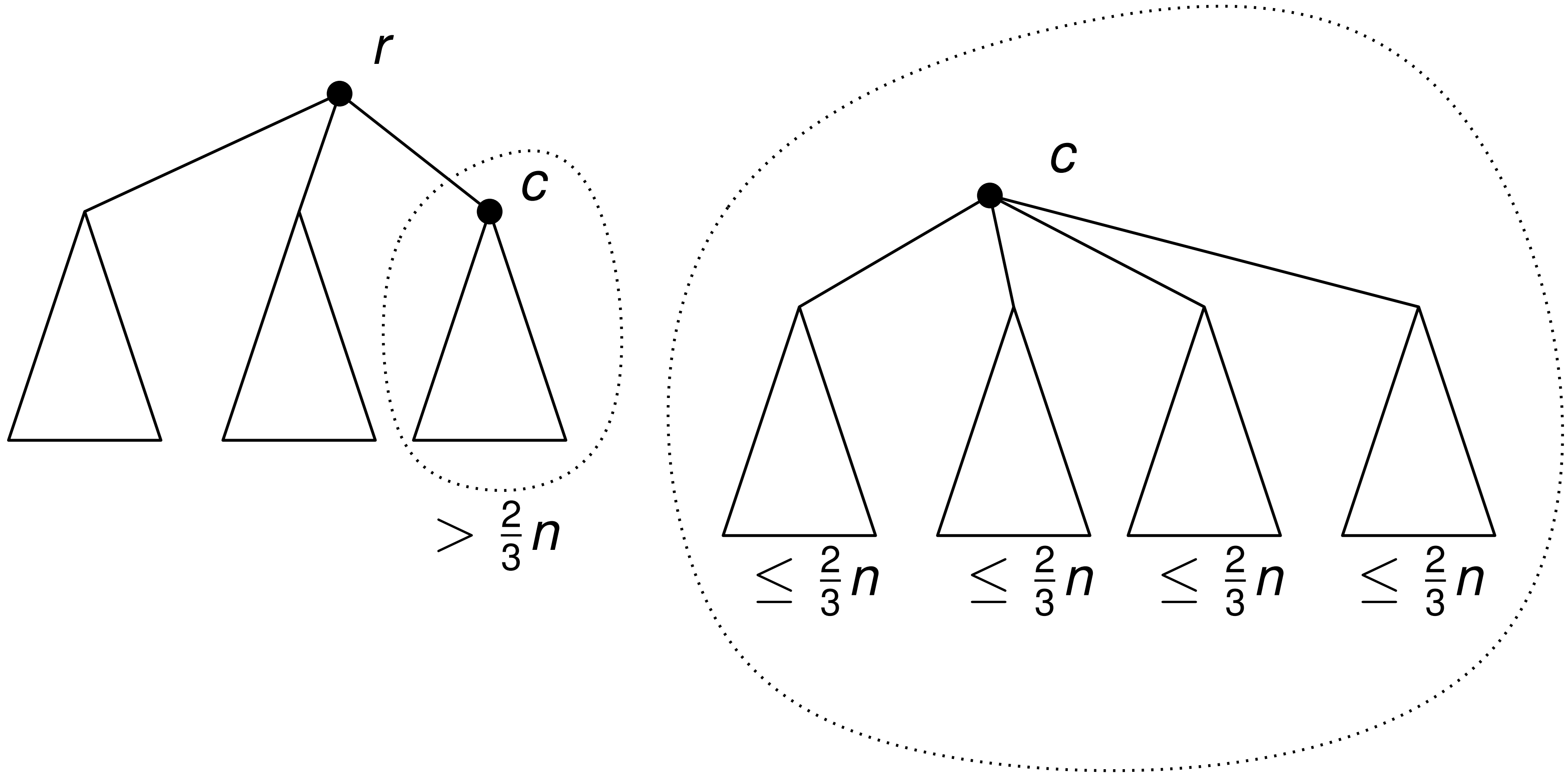
a) Zeigen Sie, dass die Graphklasse der Bäume einen 1-Separator hat.



$> \frac{2}{3}n$

Aufgabe 2

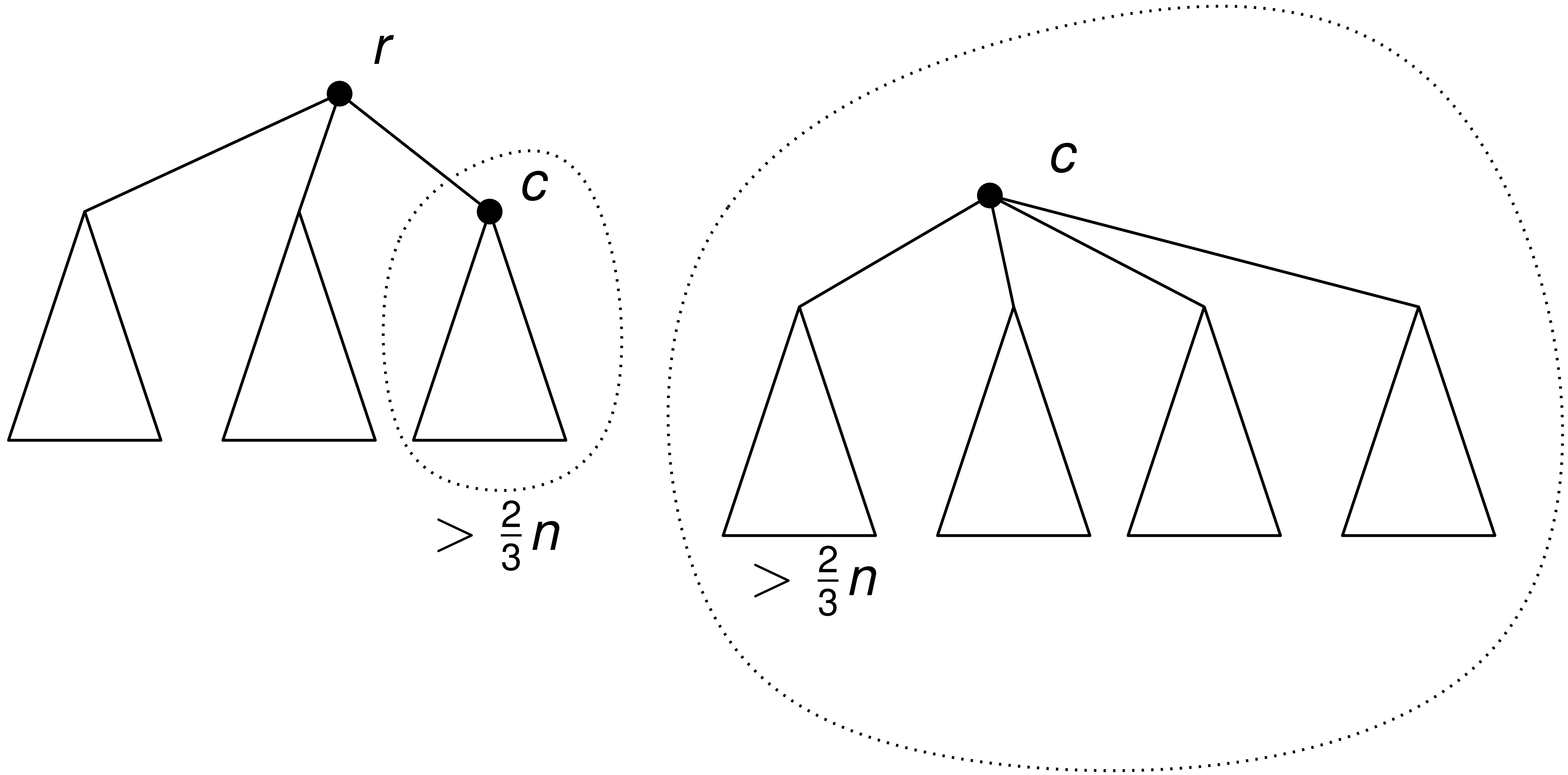
a) Zeigen Sie, dass die Graphklasse der Bäume einen 1-Separator hat.



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Graphklasse der Bäume einen 1-Separator hat.



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

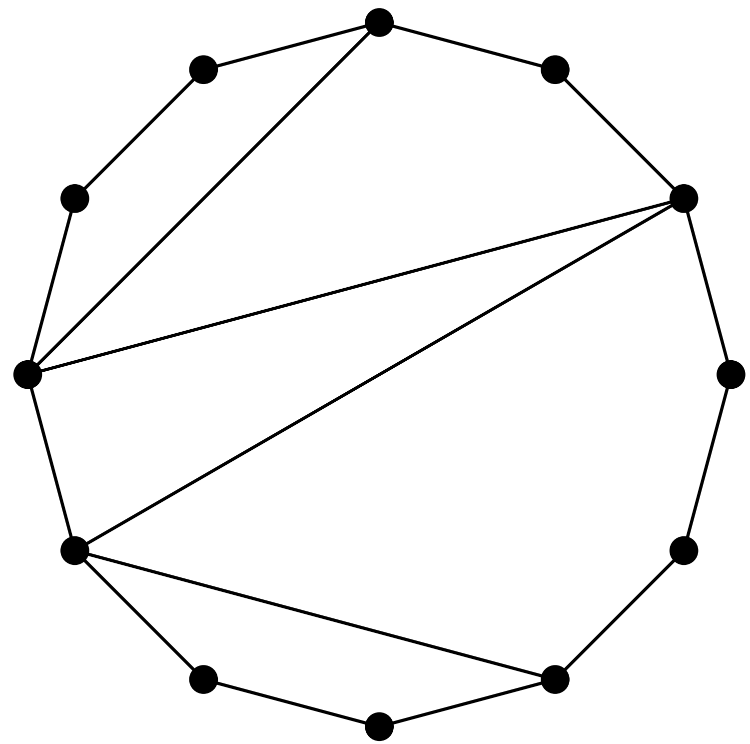
Aufgabe 2

b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

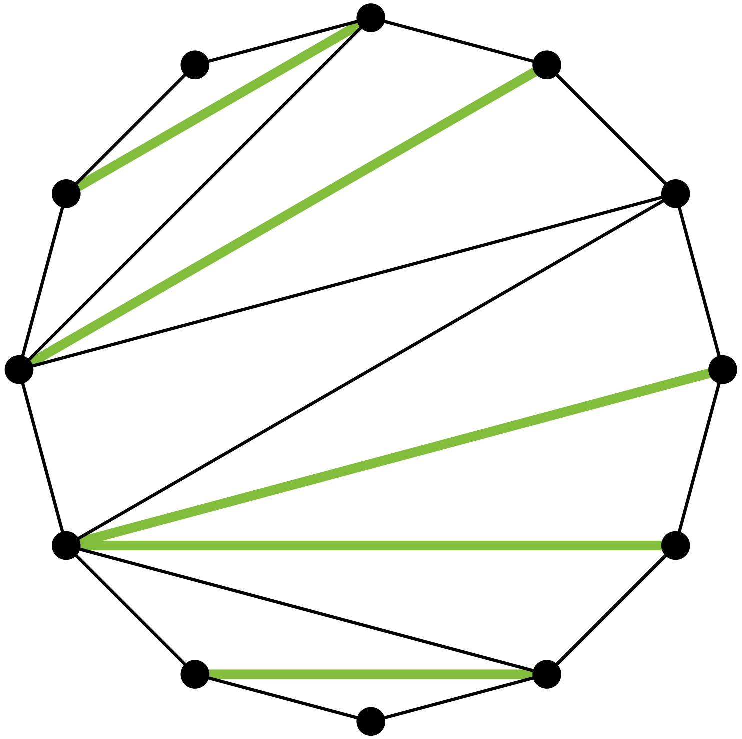
b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

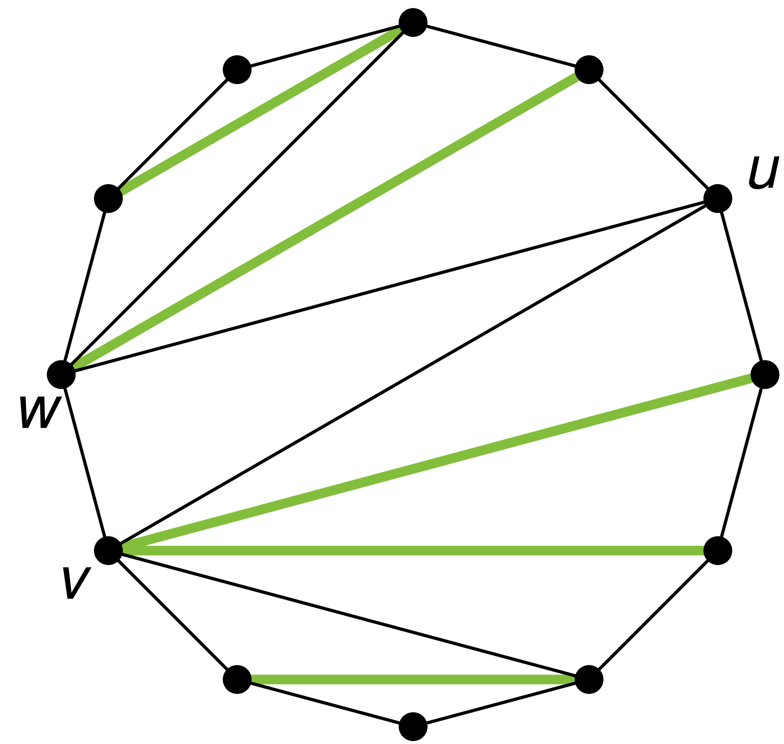
b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.



Aufgabe 2

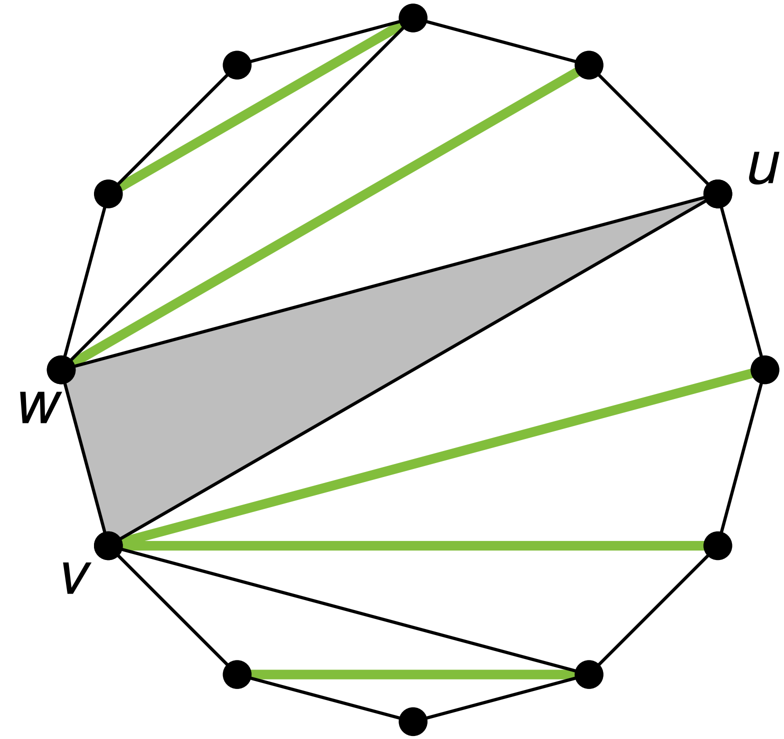
Karlsruhe Institute of Technology

b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.



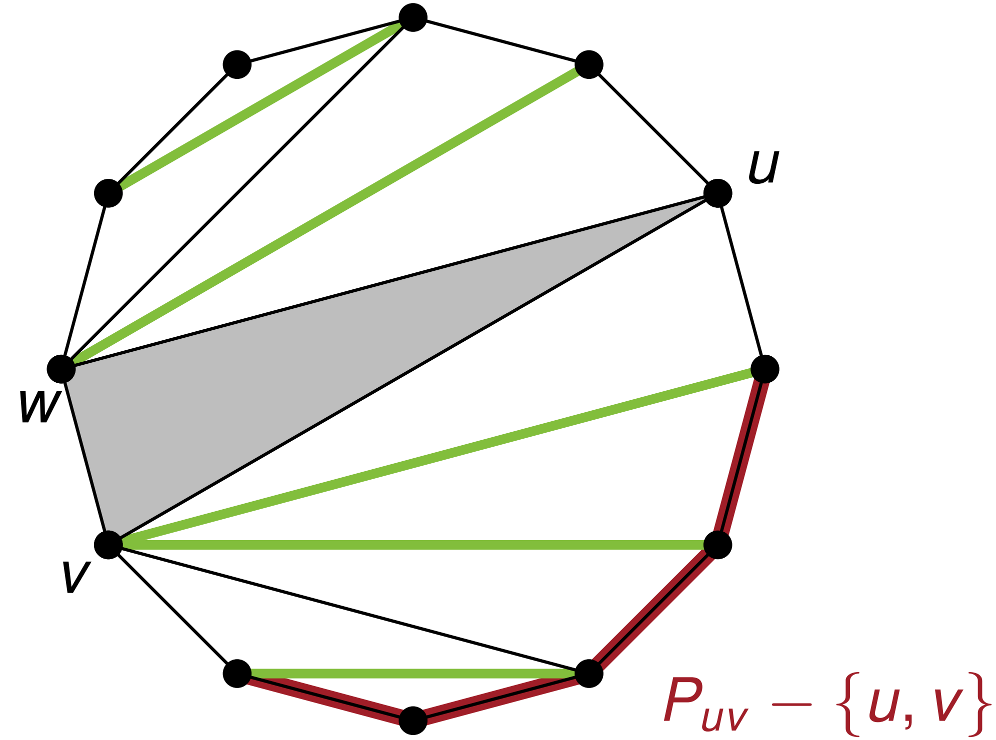
Aufgabe 2

b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.



Aufgabe 2

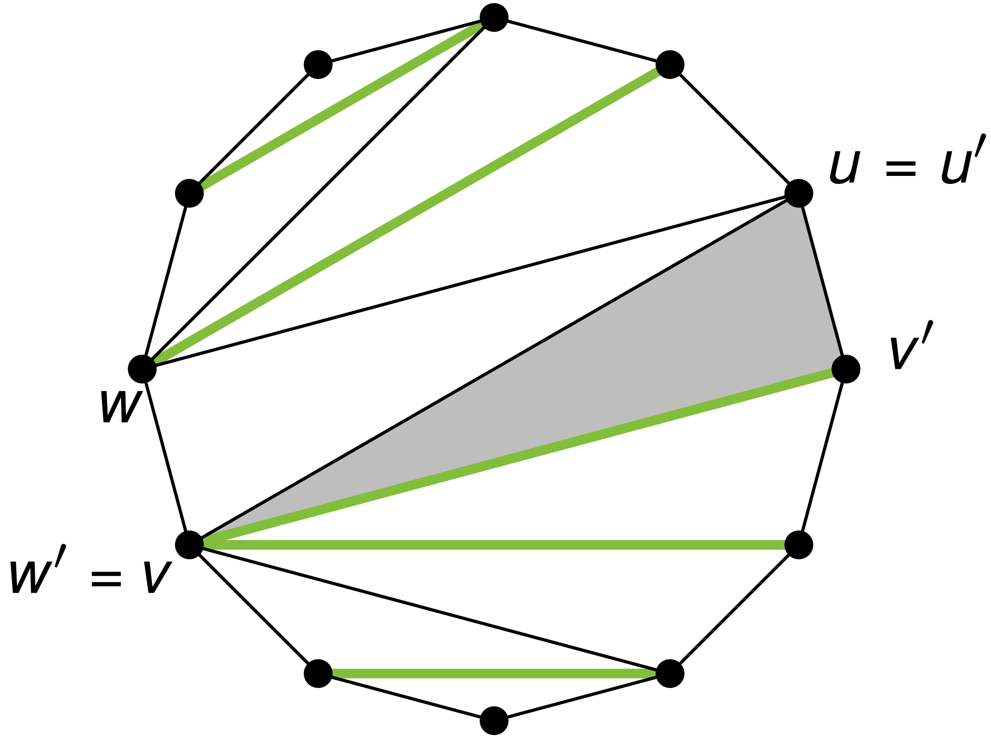
b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.



Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

b) Zeigen Sie, dass die Klasse der 2-fach zusammenhängenden Graphen einen 1-Separator hat.



Aufgabe 3

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^*. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^*, (E \setminus E')^*)$ von G^* unzusammenhängend ist.

$$(V, E') \text{ enthält Kreis} \Leftrightarrow (V^*, (E \setminus E')^*) \text{ unzusammenhängend}$$

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 3

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^*. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^*, (E \setminus E')^*)$ von G^* unzusammenhängend ist.

$$(V, E') \text{ enthält Kreis} \Leftrightarrow (V^*, (E \setminus E')^*) \text{ unzusammenhängend}$$
$$(V, E') \text{ unzusammenhängend} \Leftrightarrow (V^*, (E \setminus E')^*) \text{ enhält Kreis}$$

2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^* und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^*, (E \setminus E')^*)$ ein aufspannender Baum von G^* ist

$$(V, E') \text{ aufspannender Baum von } G \Leftrightarrow$$
$$(V^*, (E \setminus E')^*) \text{ aufspannender Baum von } G^\star$$

Adjazenztest in planaren Graphen

Gesucht: Datenstruktur mit linearer Größe mit der man in $O(1)$ Zeit beantworten kann ob zwei Knoten durch Kanten verbunden.

Hinweis: Jeder planare Graph lässt sich in einen gerichteten Graph umwandeln bei dem jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.

Vorfreude auf die WM

Ein Fußball[a] mit Wabenstruktur hat eine Oberfläche die ausschließlich aus Fünf- und Sechsecken besteht. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Fünfecke auf jedem Fußball mit Wabenstruktur 12 ist.

---

[a] http://de.wikipedia.org/wiki/Fußball_(Sportgerät)

Institute of Theoretical Informatics
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Ende

Morgen 14:00 - 15:30