Viertes Übungsblatt

Ausgabe: 27. Mai 2014
Abgabe: Keine, Besprechung in einer der Übungen

1 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\lfloor n/2 \rfloor$ Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an wie ein kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

2 Triangulierung von planaren Graphen

Sei ein einfacher, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten gegeben. Der Graph G sei kombinatorisch eingebettet, d.h. dargestellt als $\mathcal{G} = (V, E, s, t, \mathcal{N}, \mathcal{X})$, wobei $\mathcal{G}$ in der Form "erweiterter Inzidenzlisten" gespeichert sei:

Es gibt eine doppelt verkettete Liste von Zeigern auf die *Knoten*. Ein Knoten ist dargestellt als eine zirkulär verkettete Liste von *gerichteten Kanten*, die im Uhrzeigersinn geordnet sind. Die Nachfolgekante ("rechts") von einer Kante e ist $\mathcal{N}(e)$.

Geben Sie einen linearen (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung $\mathcal{G}'$ findet. (Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten. Eine Möglichkeit ist, zuerst einen Graph G'' zu konstruieren, der Mehrfachkanten enthalten darf, und in einem zweiten Schritt Mehrfachkanten geeignet durch andere Kanten zu ersetzen.)

Führen Sie Ihren Algorithmus an folgenden Beispielgraphen aus (es hilft, wenn Sie jeweils die von Ihrem Algorithmus eingefügten Kanten in der Reihenfolge nummerieren, in der Ihr Algorithmus sie einfügt).

a) $K_{1,2}$ b) $K_{1,3}$ c) Q_2 (Quadrat) d) G_1

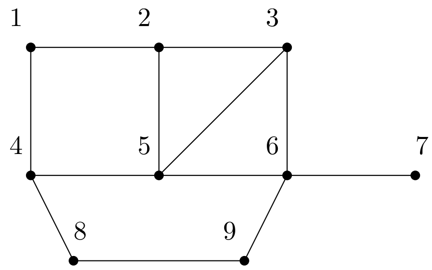

Abbildung 1: Graph G_1

3 Perfektes Matching

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Pfad mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten)
3. Q_n (Hyperkubus)
4. K_n
5. $K_{n,m}$

4 Matching Anwendung

Um die Position im dreidimensionalen Raum von n Objekten $O_1, \ldots, O_n$ zu bestimmen, werden zwei Sensoren S_1 und S_2 verwendet, die jeweils die Objekte anpeilen können und somit für jedes Objekt eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ bestimmen, auf der der Sensor S und das Objekt O_k liegen. Angenommen, keine dieser Geraden fallen zusammen, so schneiden sich jeweils die Geraden S_1O_k und S_2O_k. Das Problem ist nun einerseits, dass $S1$ die Geraden $L_{1,i}$ und S_2 die Geraden $L_{2,j}$ liefert, aber wir wissen zu keiner dieser Geraden, welches Objekt angepeilt wurde. Andererseits messen die Sensoren nicht exakt, sondern es treten Messfehler auf, so dass sich zugehörige Geraden nicht unbedingt schneiden. Jedoch gilt für die Geraden $L_{1,i}$ und $L_{2,j}$, für die dasselbe Objekt angepeilt wurde, dass der Abstand $d(L_{1,i}, L_{2,j})$ dieser Geraden sehr klein ist.

Bestimmen Sie eine der Geraden, also n Paare (i_k, j_k) $(k = 1, \ldots, n)$, so dass die Summe der Abstände

$$\sum_{k=1}^{n} d(L_{1,i_k}, L_{2,j_k})$$

minimiert wird. Formulieren sie dazu das Problem als Matching Problem.