Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner



# Drittes Übungsblatt

**Ausgabe:** 06. Mai 2015
**Besprechung:** 19. Mai 2015

Sei ein einfacher, zusammenhängender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit $n$ Knoten gegeben. Der Graph $G$ sei kombinatorisch eingebettet, d.h. dargestellt als $\mathcal{G} = (V, \vec{E}, s, t, \Theta, ^{-})$, wobei $\mathcal{G}$ in der Form ,,erweiterter Inzidenzlisten" gespeichert sei:
Es gibt eine doppelt verkettete Liste von Zeigern auf die *Knoten*. Ein *Knoten* ist dargestellt als eine zirkulär verkettete Liste von *gerichteten Kanten*, die im Gegenuhrzeigersinn geordnet sind. Die Nachfolgekante („links“) von $e$ ist $\Theta(e)$. Eine *gerichtete Kante* $e \in \vec{E}$ besteht aus einem Zeiger auf die Kante $\bar{e}$ ($e$ in entgegengesetzter Richtung) und einem Zeiger auf den Fußknoten der Kante. Dadurch sind die Funktionen $s$(ource), $t$(arget), $^{-}$, $\Theta$ und $\Theta^*(e) := \Theta(\bar{e})$ repräsentiert. Alle Funktionen können so in konstanter Zeit berechnet werden.

## 1 Triangulierung

1. Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten $n$) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von $G$ mit kombinatorischer Einbettung $\mathcal{G}'$ findet.
   Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.
2. Führen Sie Ihren Algorithmus an folgenden Beispielgraphen aus und numerieren Sie jeweils die von Ihrem Algorithmus eingefügten Kanten in der Reihenfolge, in der Ihr Algorithmus sie einfügt.

   a) $K_{1,2}$ b) $K_{1,3}$ c) $Q_2$ d) $G_1$

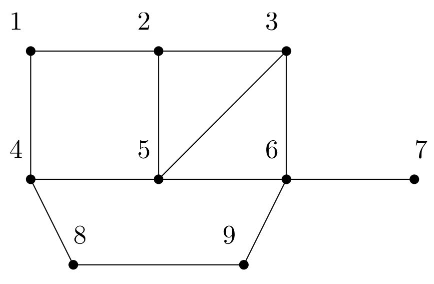


Abbildung 1: Der Graph $G_1$ zu Aufgabe 1

## 2 Planare Einbettungen und geradlinige Zeichnungen

Sei $G$ ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass $G$ eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

# 3 Verschiedene Bäume

1. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten $w$ und einen Breitensuchbaum $T$ mit Wurzel $w$ und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$. Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?

2. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten $w$ und einen Breitensuchbaum $T$ mit Wurzel $w$ so, dass der Planar-Separator-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit $S = S_m \cup S_M$ einen gültigen Separator findet.

# 4 Folgerung aus dem Planar Separator Theorem:

Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad $\Delta$ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von $G$ mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

# 5 Umfang

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen $G$ ist die Länge eines kürzesten Kreises in $G$. Enthält $G$ keinen Kreis, so ist der Umfang $\infty$.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegeben Knoten $v$ von $G$ entweder

- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem $v$ liegt, oder
- entscheidet, dass $v$ nicht auf einem kürzesten Kreis in $G$ liegt.

b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.