

# Algorithmen für Planare Graphen

## Übung am 05.07.2016

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



# 5. Übungsblatt

# Aufgabe 2

Geben Sie einen Algorithmus an, der folgendes Problem in Linearzeit löst:

Gegeben ein planarer Graph  $G$  mit fester Einbettung und ausgezeichneten Knoten  $s$  und  $t$ , die an der äußeren Facette liegen, bestimme eine maximale Anzahl von paarweise kantendisjunkten  $s$ - $t$ -Wegen in  $G$ .

# 6. Übungsblatt

# Aufgabe 1

Sei  $G$  ein ungerichteter, zusammenhängender, planar eingebetteter Graph,  $G^*$  der zugehörige Dualgraph und  $e = (u, v)$  eine orientierte Kante.

## Right-First-Kanten-DFS

Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

**Falls**  *$y$  inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

## Left-First-Kanten-BFS

Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  
 $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  
 $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine  
Warteschlange

**Solange** *Warteschlange nicht leer wiederhole*

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

**Falls**  *$y$  inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere alle solche Kanten  
 $y \rightarrow w$  und hänge diese im  
Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die  
Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der  
Warteschlange

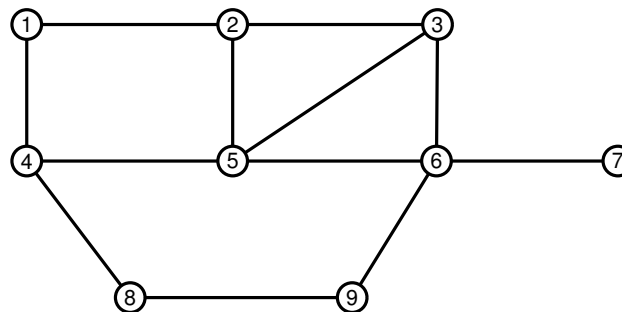
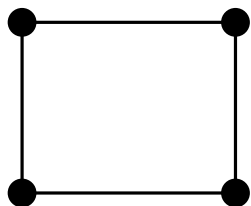
Kantensuchen legen Reihenfolge  $R = (e_1, \dots, e_m)$  der Kanten fest.

Die zu  $e$  „rechte“ Facette sei  $f_1$ , und die Dualkante  $e^* = (f_1, f_2)$  zu  $e$  sei orientiert ausgehend von  $f_1$ .

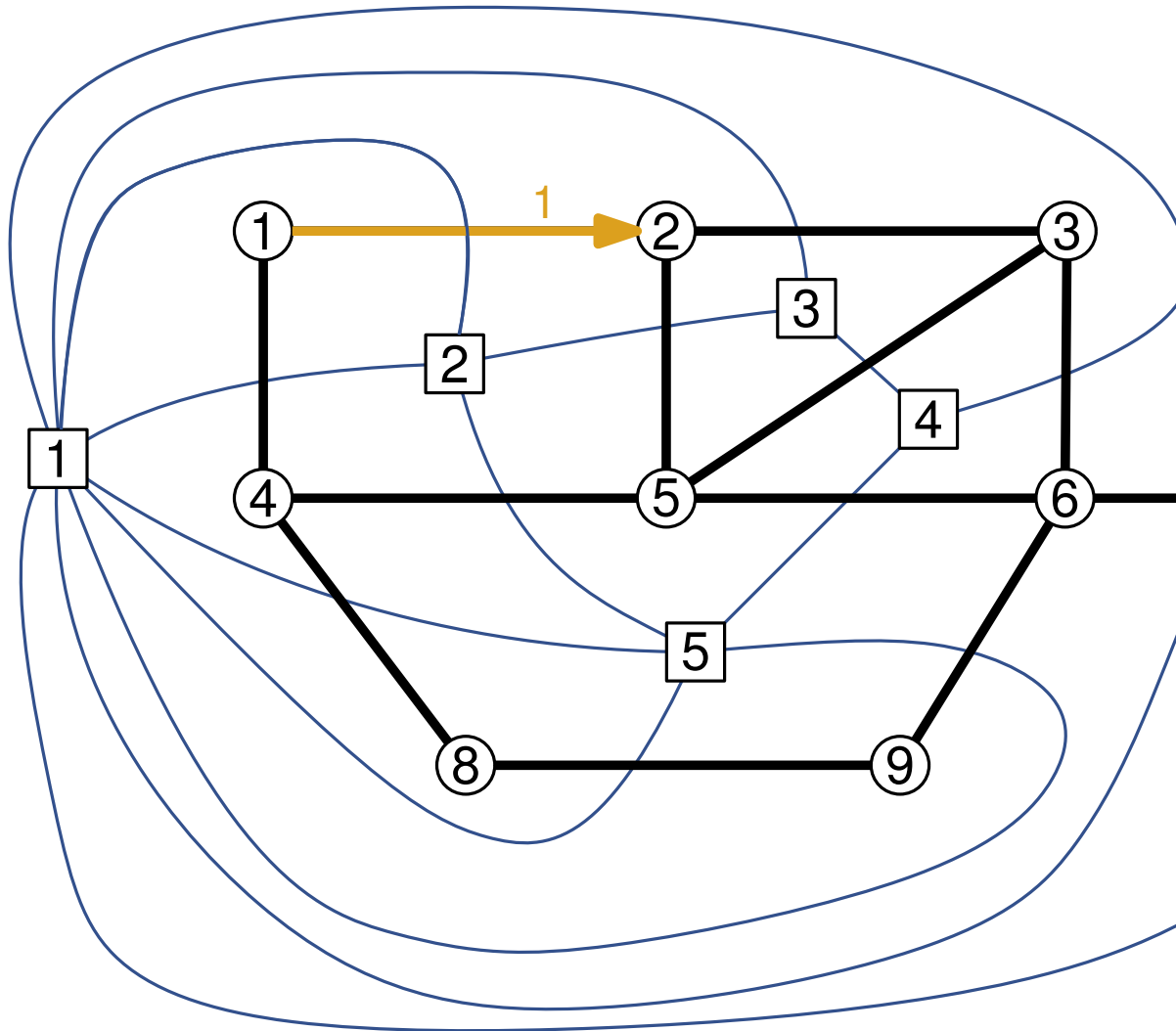
### Betrachte:

- Right-First-Tiefensuche in  $G$  ausgehend von Kante  $e$ :  $R = (e = e_1, \dots, e_m)$
  - Left-First-Breitensuche in  $G^*$ , beginnend bei Kante  $e^*$ :  $R^* = (e^* = e_1^*, \dots, e_m^*)$ .
- Die Reihenfolgen  $R$  und  $R^*$  heißen dual, falls  $e_i$  Dualkante zu  $e_i^*$  für alle  $1 \leq i \leq m$ .

Bestimme Reihenfolge  $R$  und  $R^*$  für:



# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

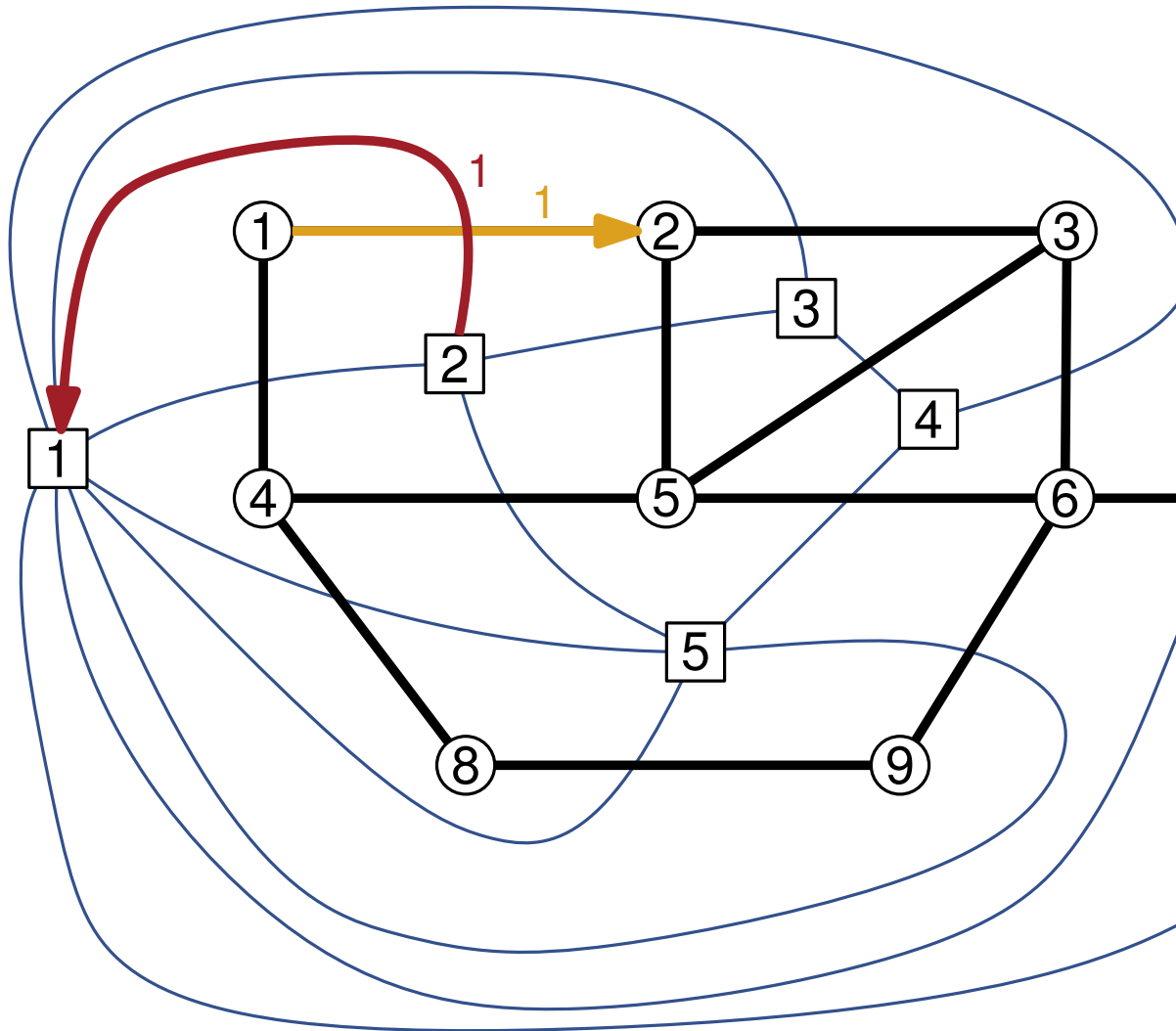
Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange



# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

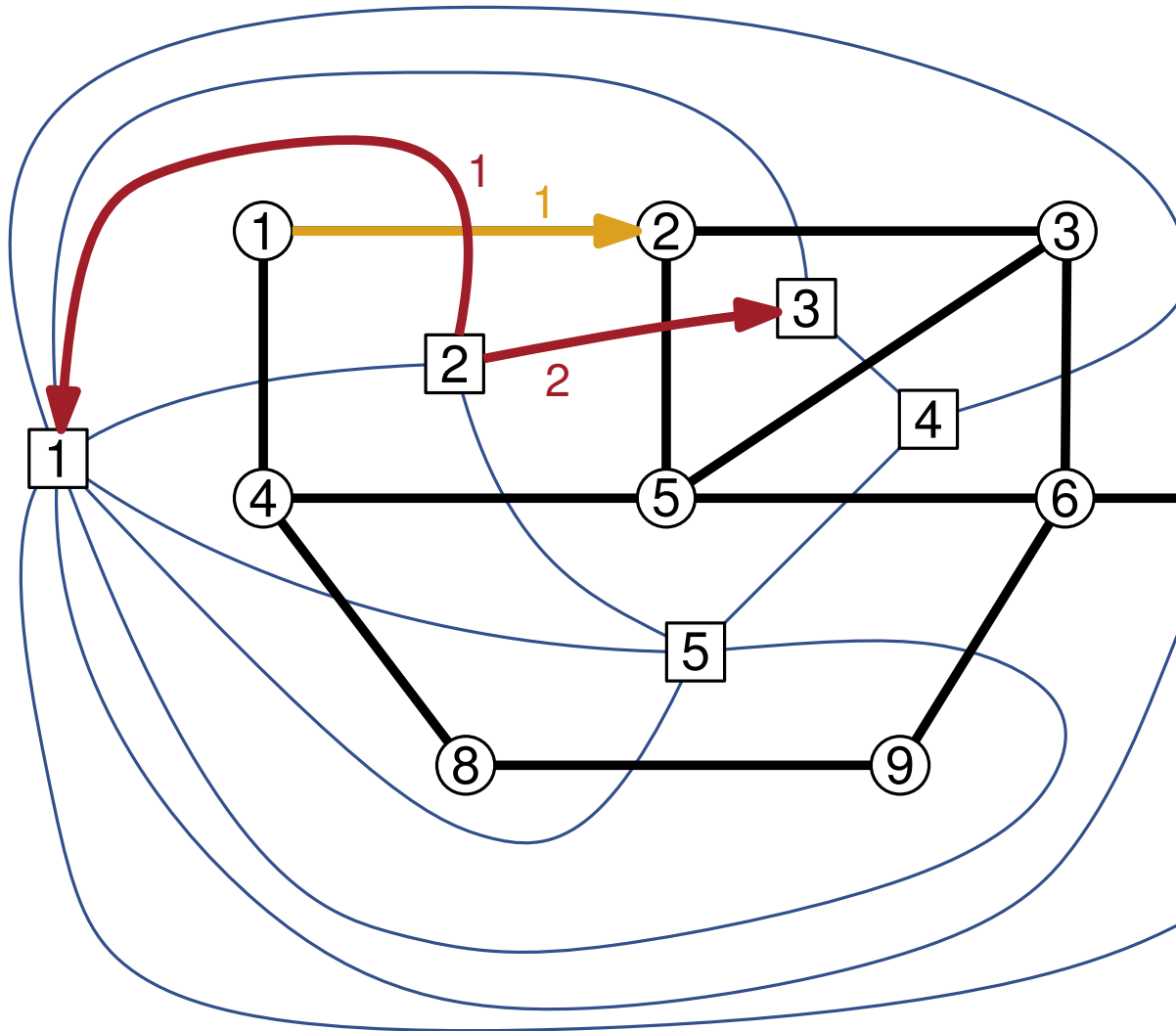
Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange



# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

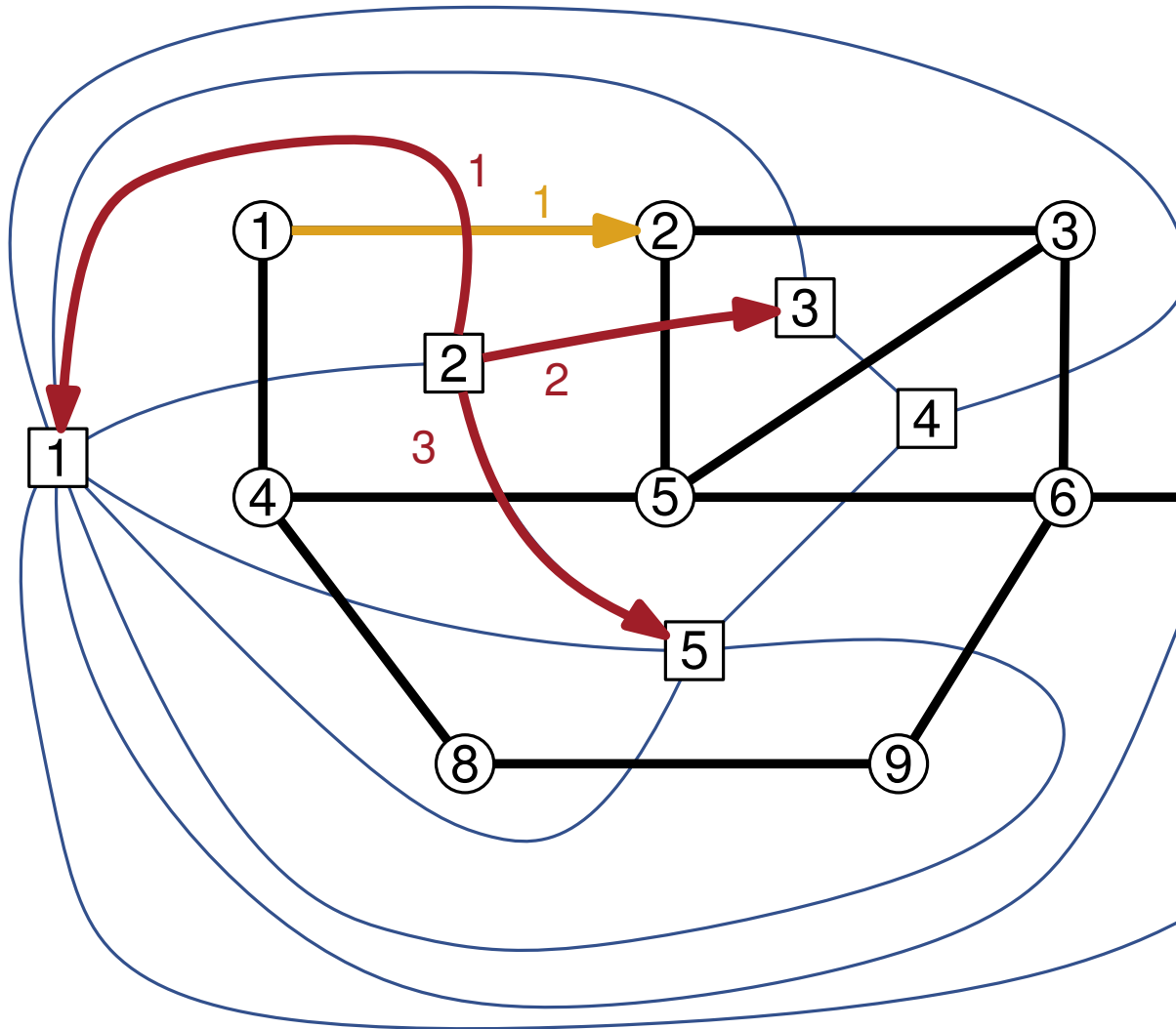
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

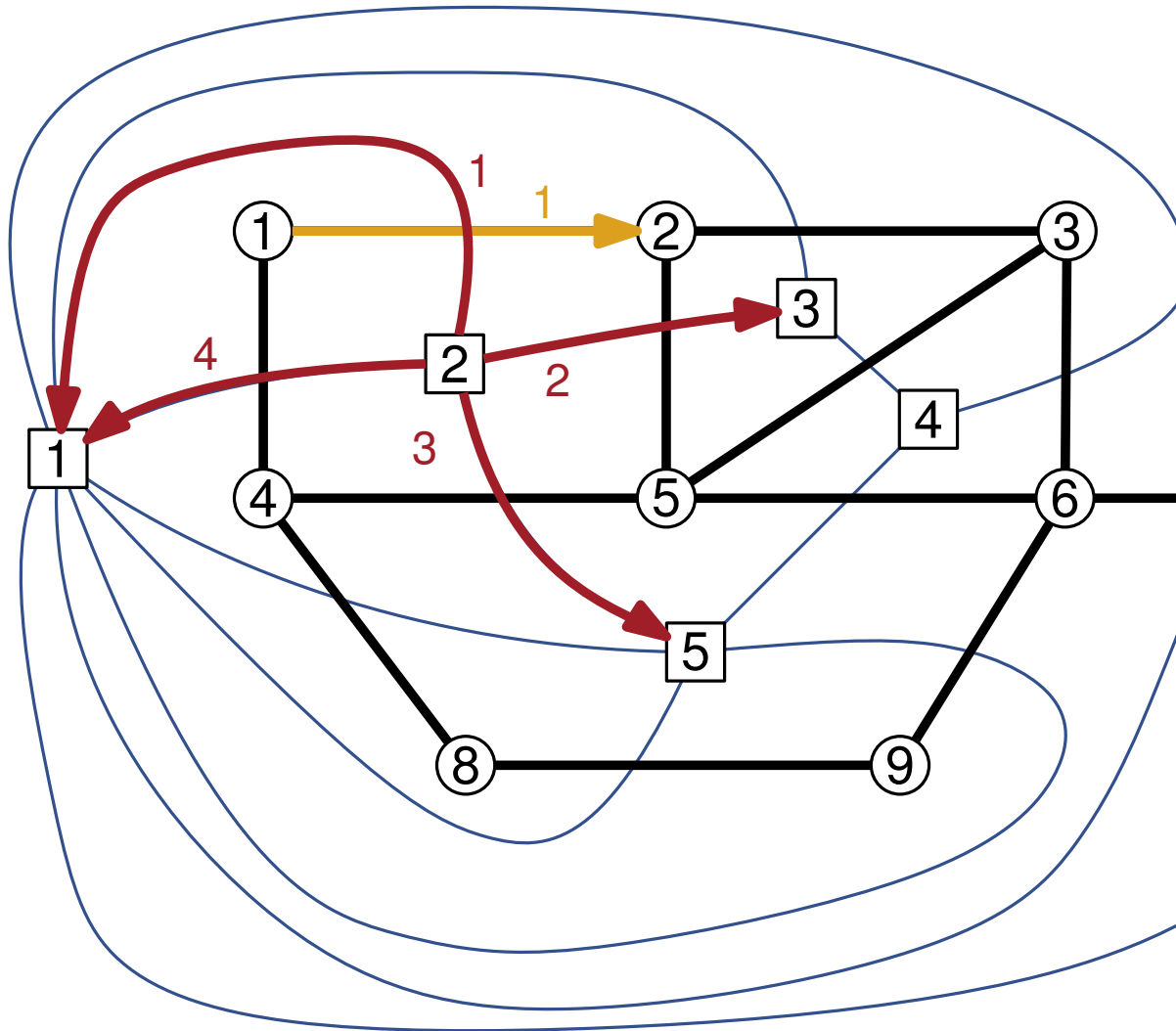
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer  
**wiederhole**

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

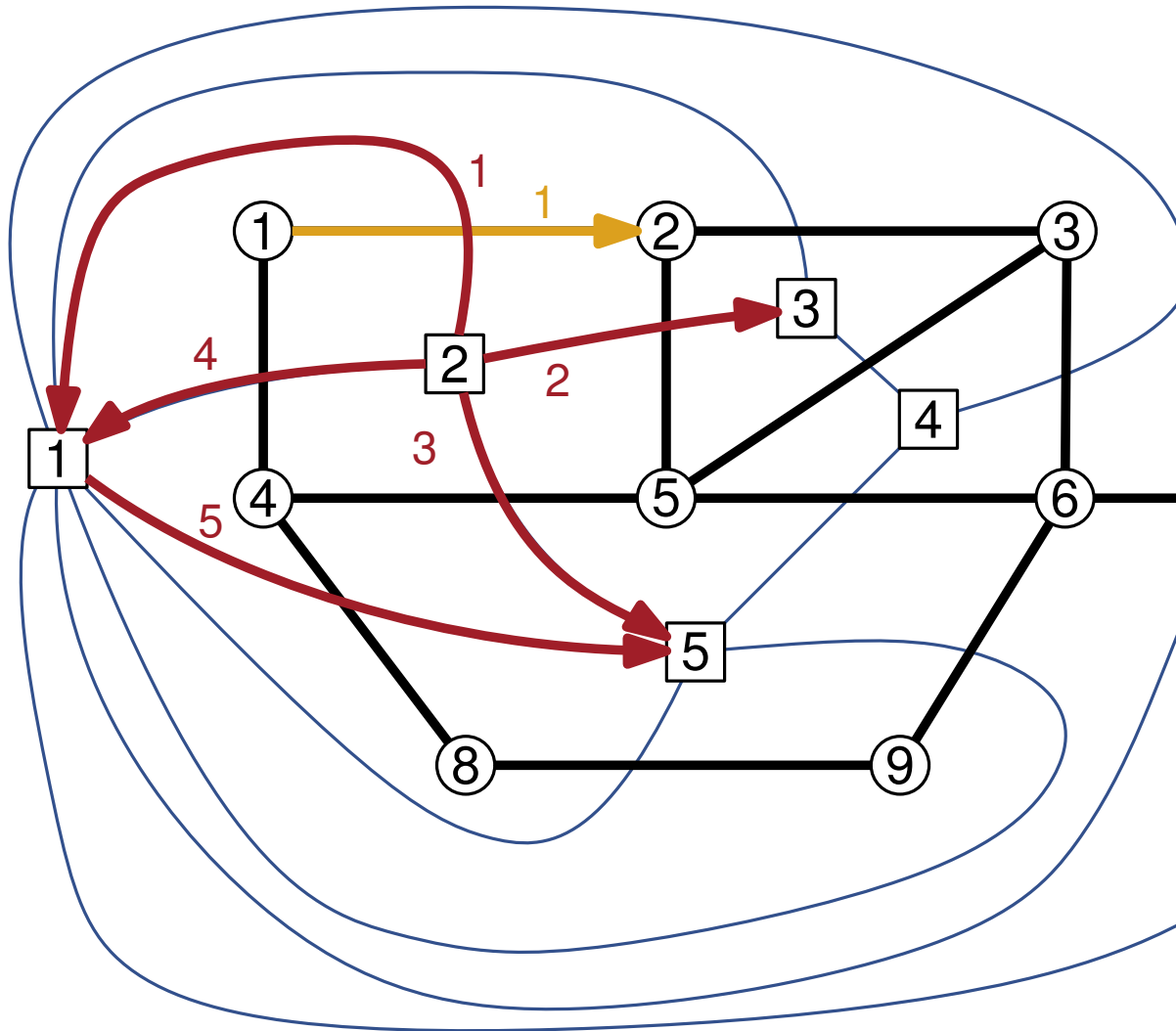
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

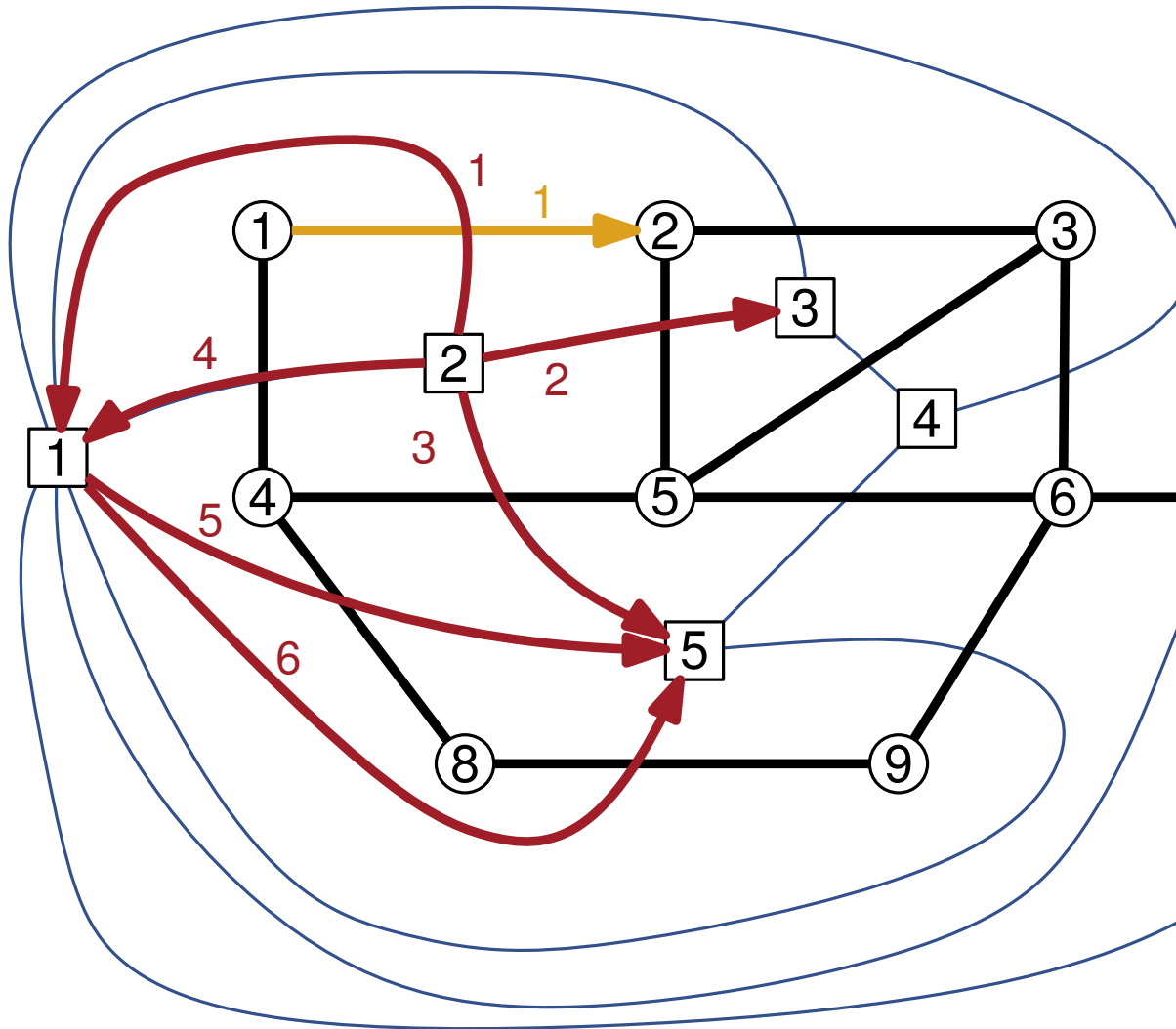
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

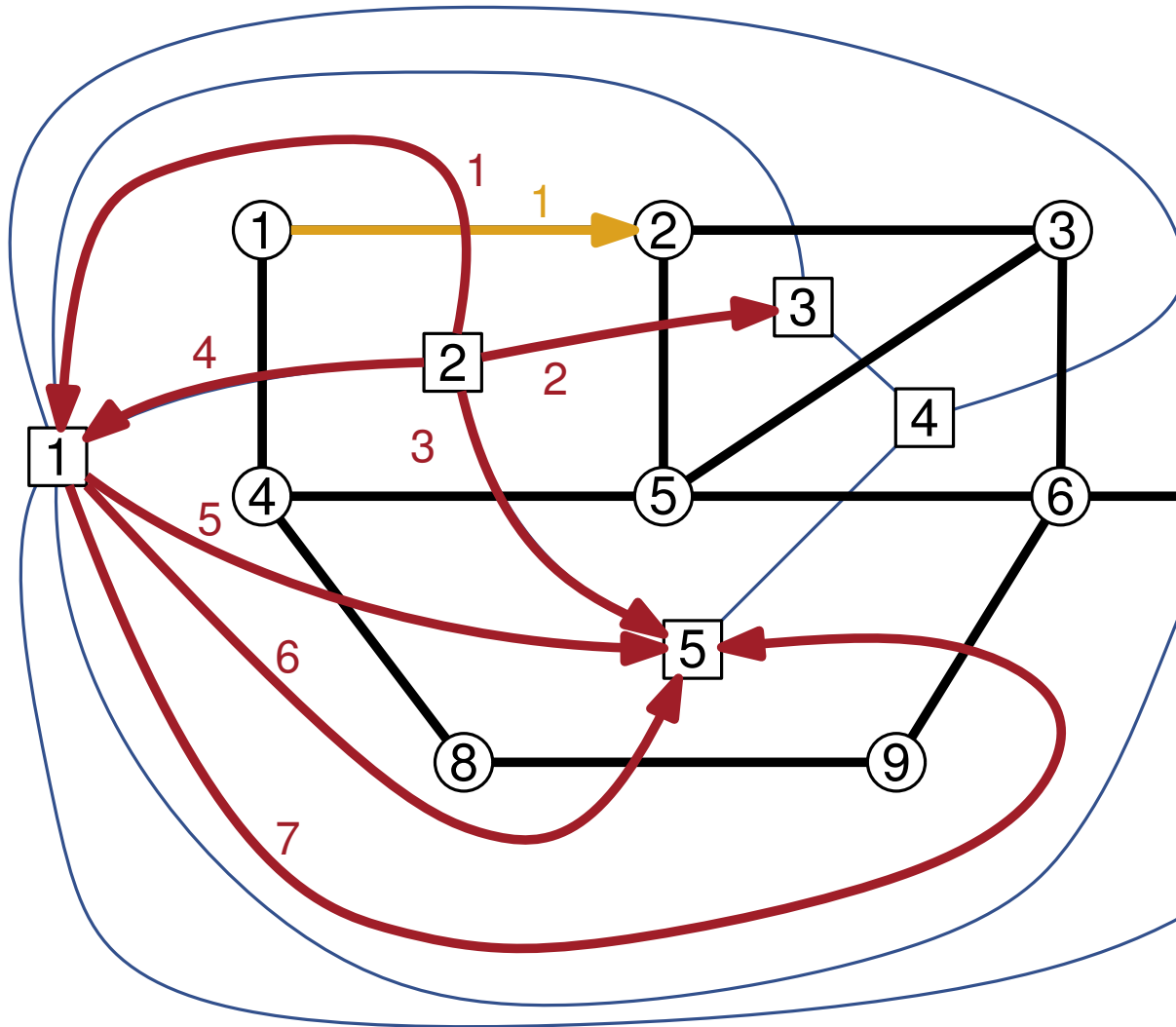
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

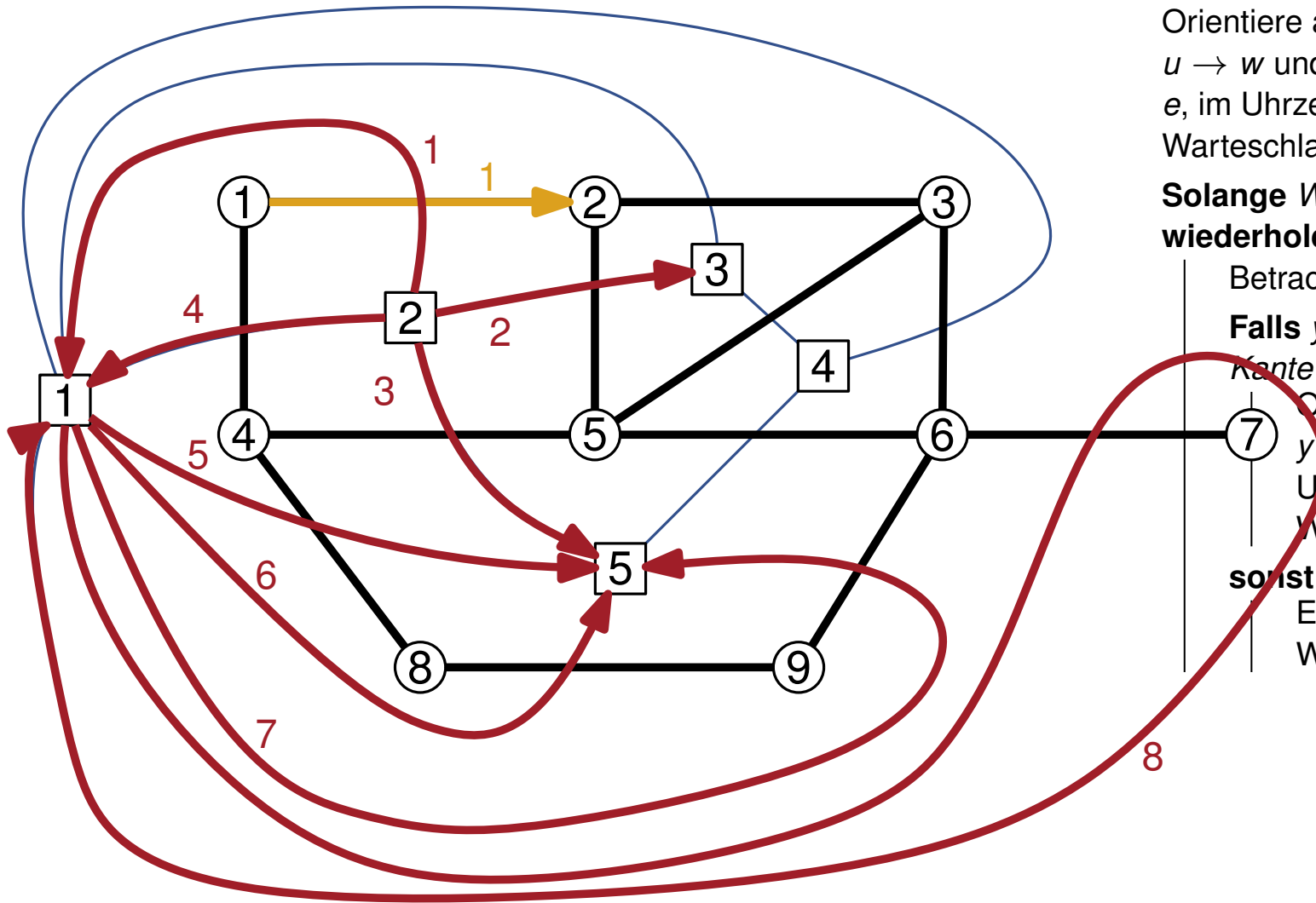
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

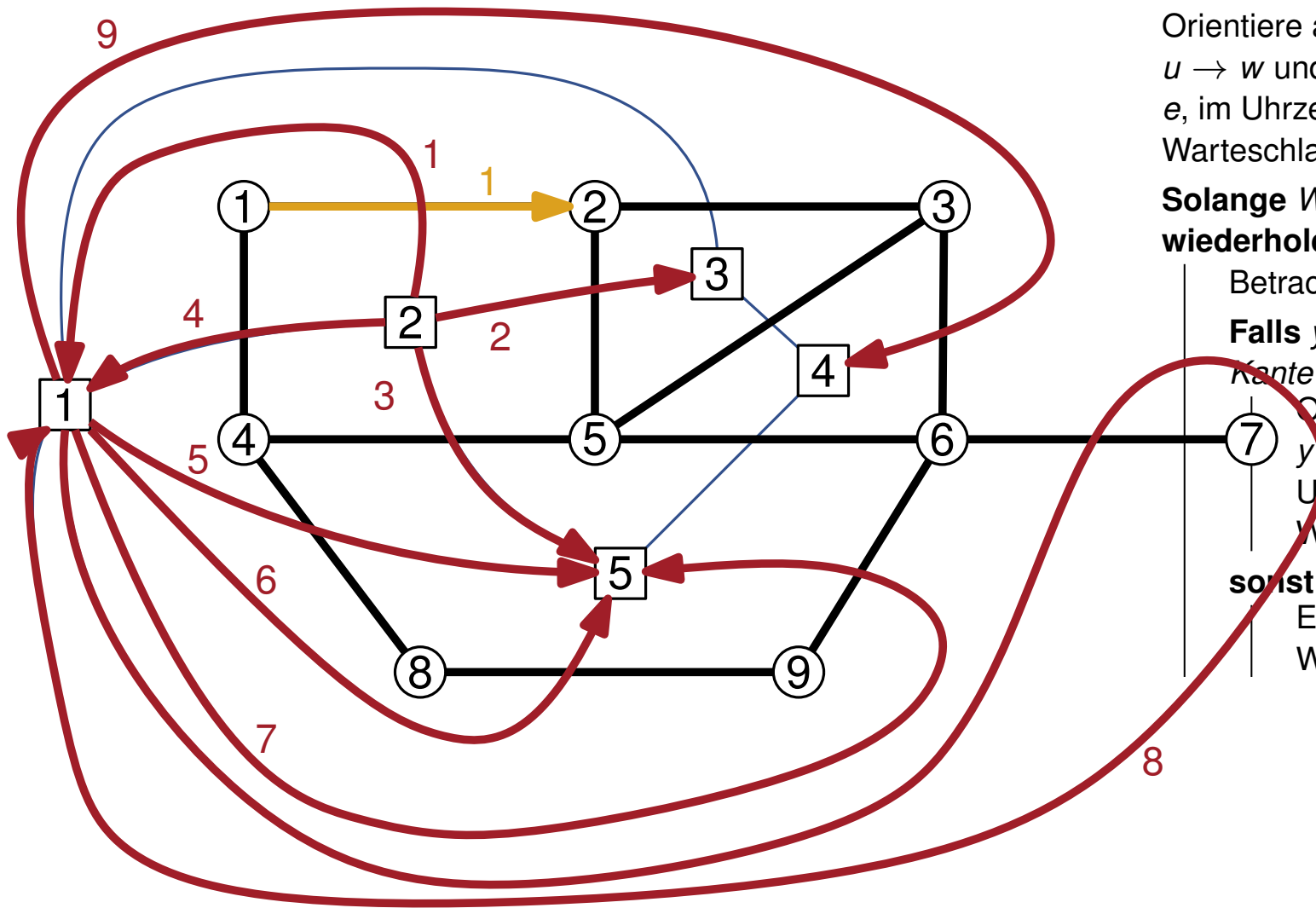
Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange



# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

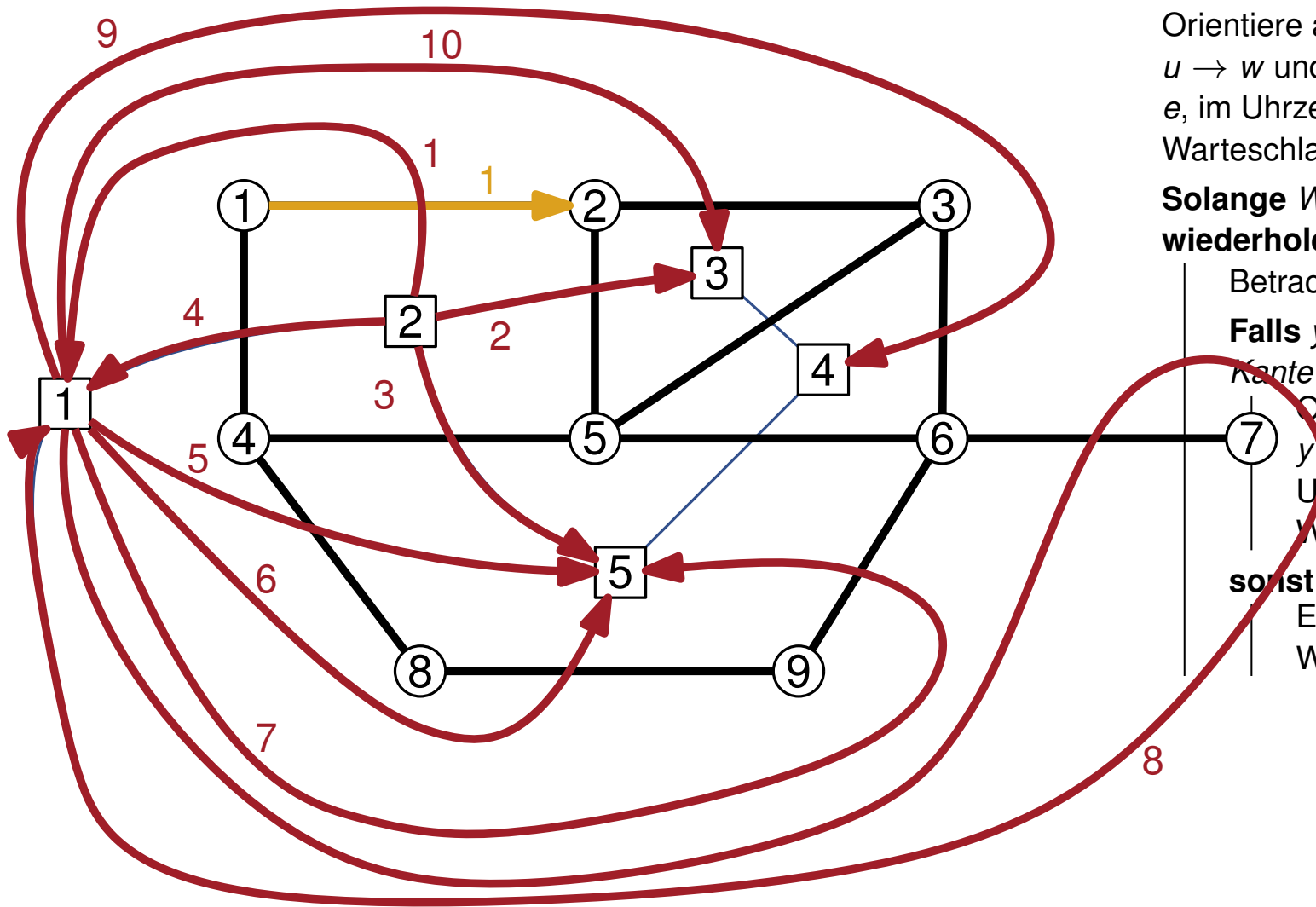
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

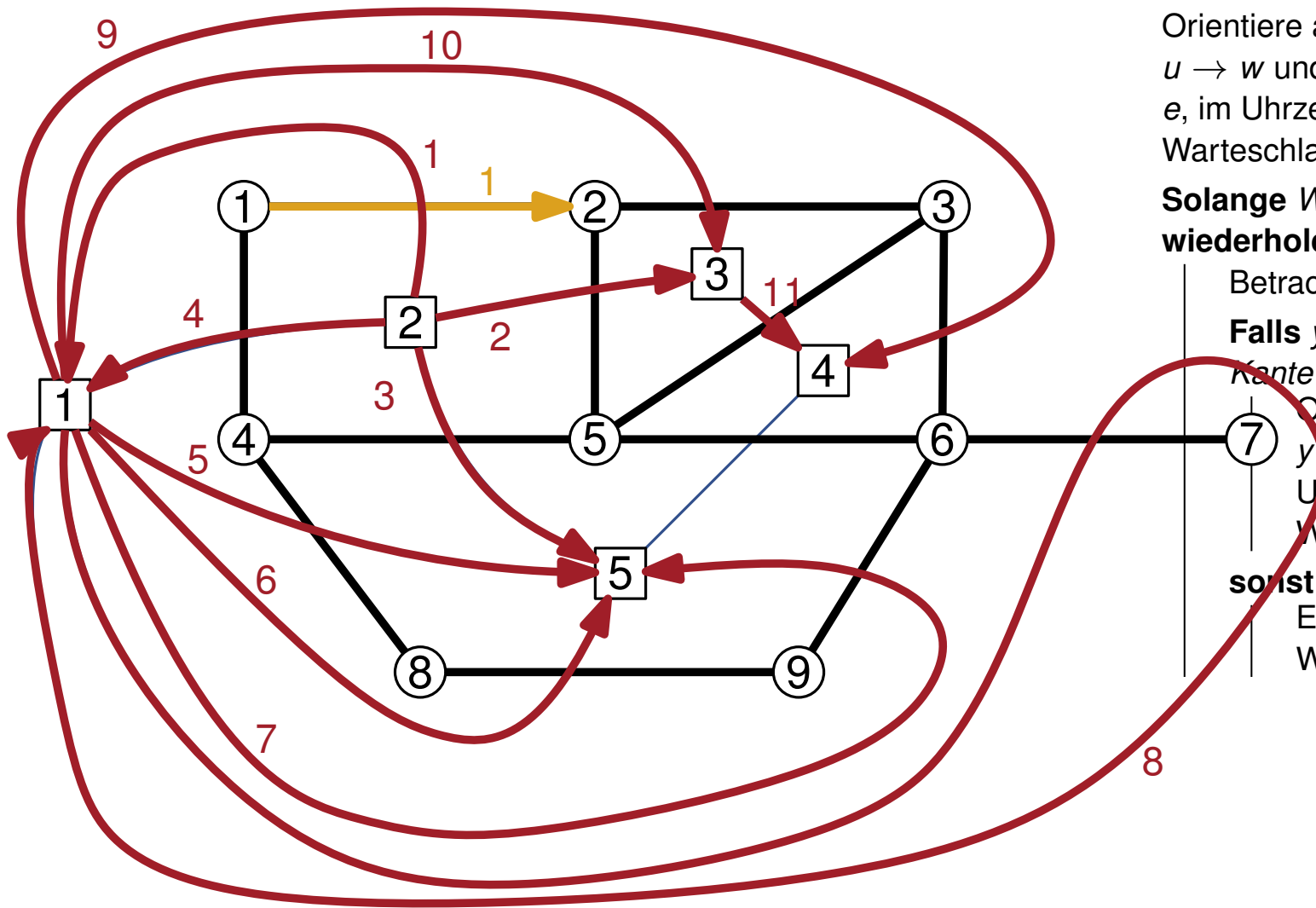
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

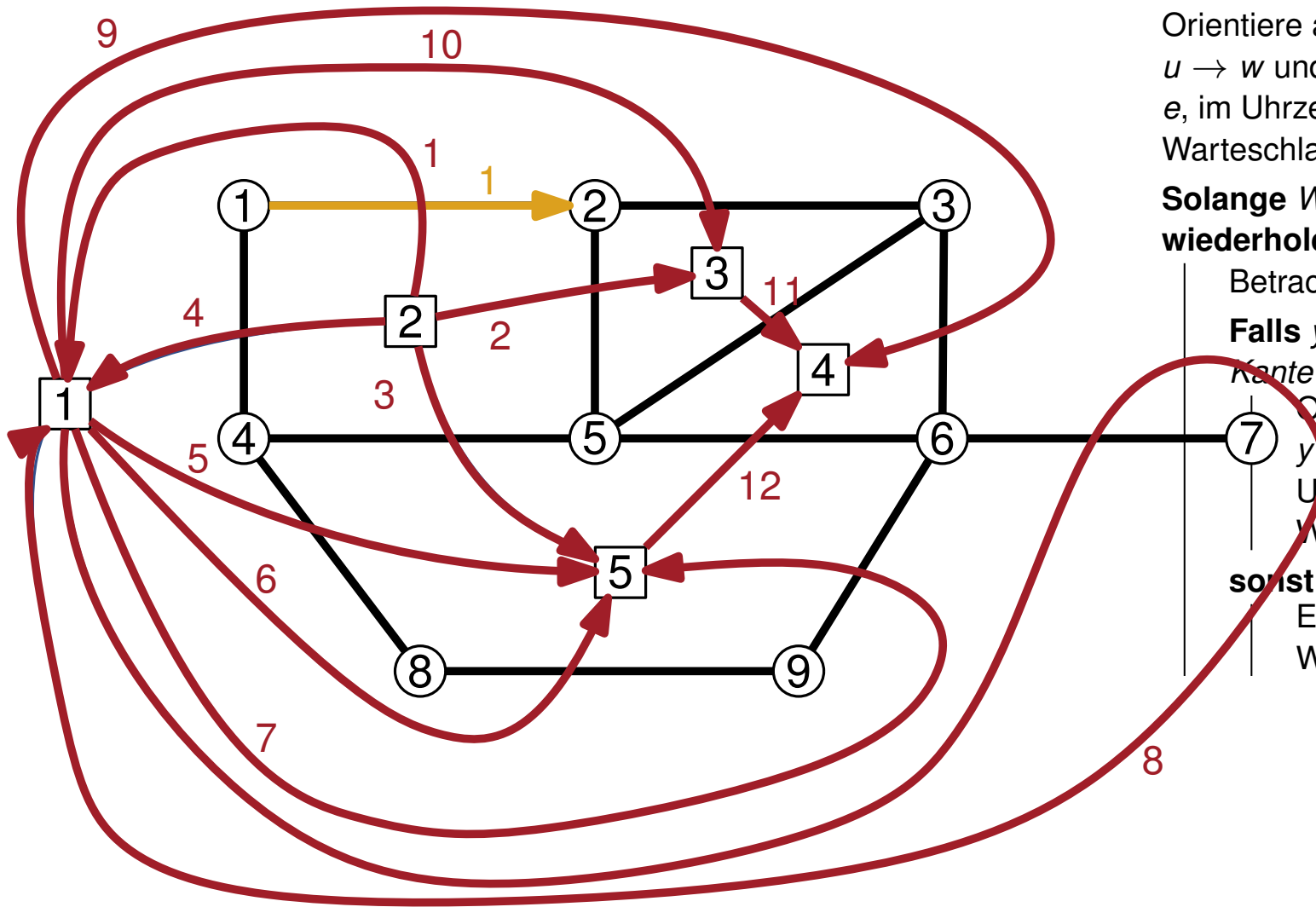
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Orientiere alle zu  $u$  inzidenten Kanten  $u \rightarrow w$  und hänge diese, beginnend bei  $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl.  $u$  an eine Warteschlange

**Solange** Warteschlange nicht leer wiederhole

Betrachte erste Kante  $(x, y)$

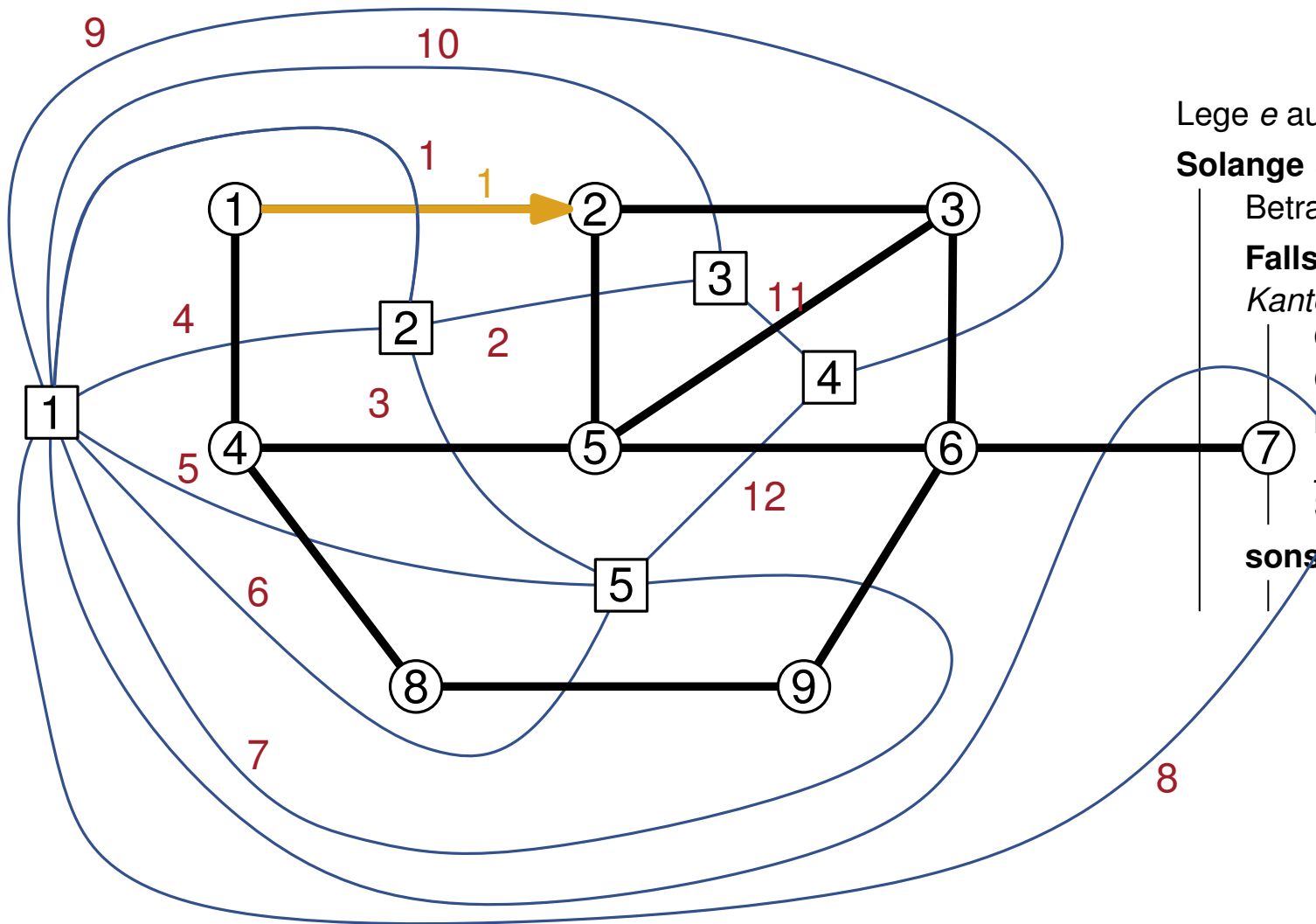
**Falls**  $y$  inzident zu nichtorientierter Kante

Orientiere alle solche Kanten  $y \rightarrow w$  und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl.  $y$  an die Warteschlange

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  aus der Warteschlange

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

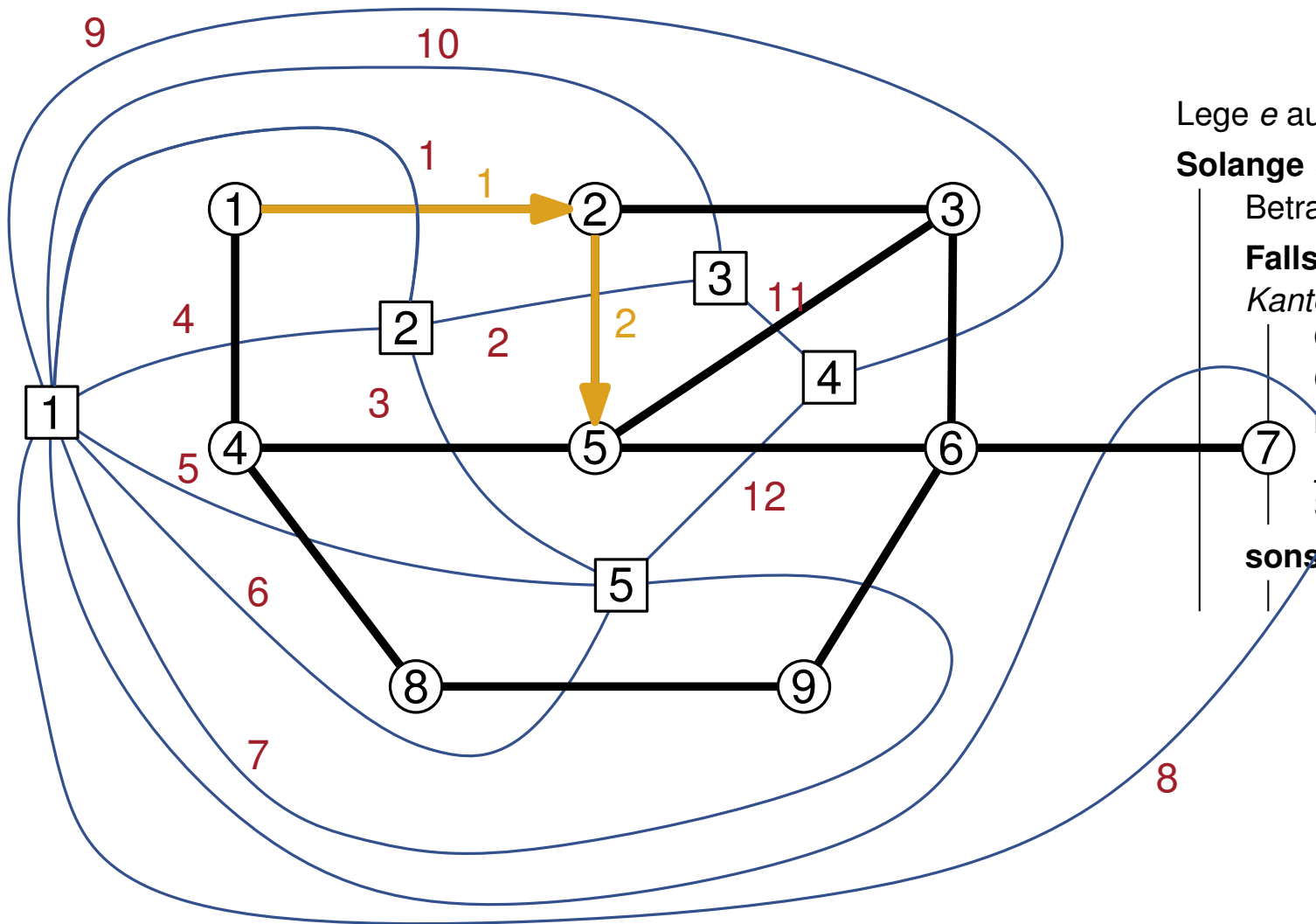
**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

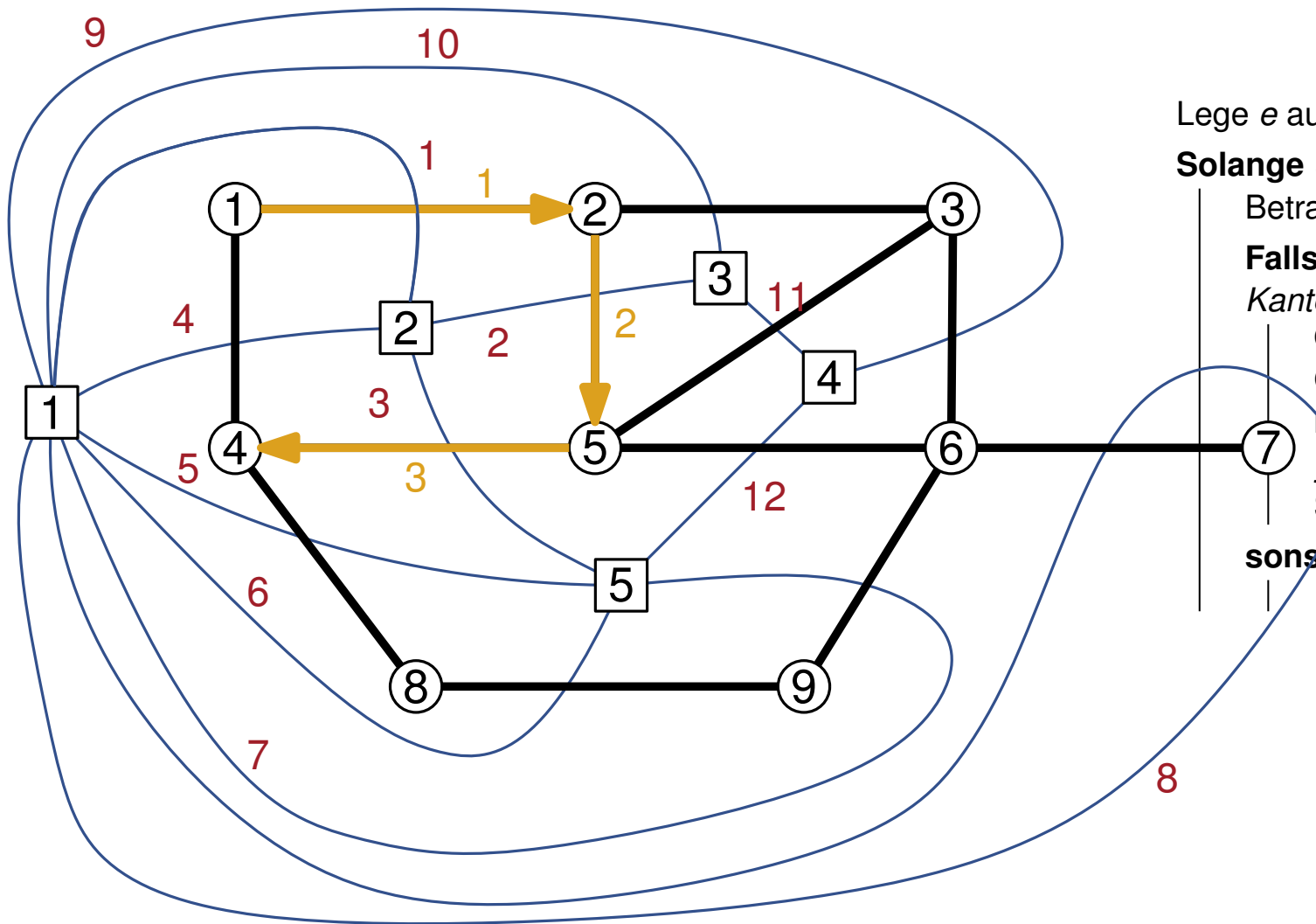
**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

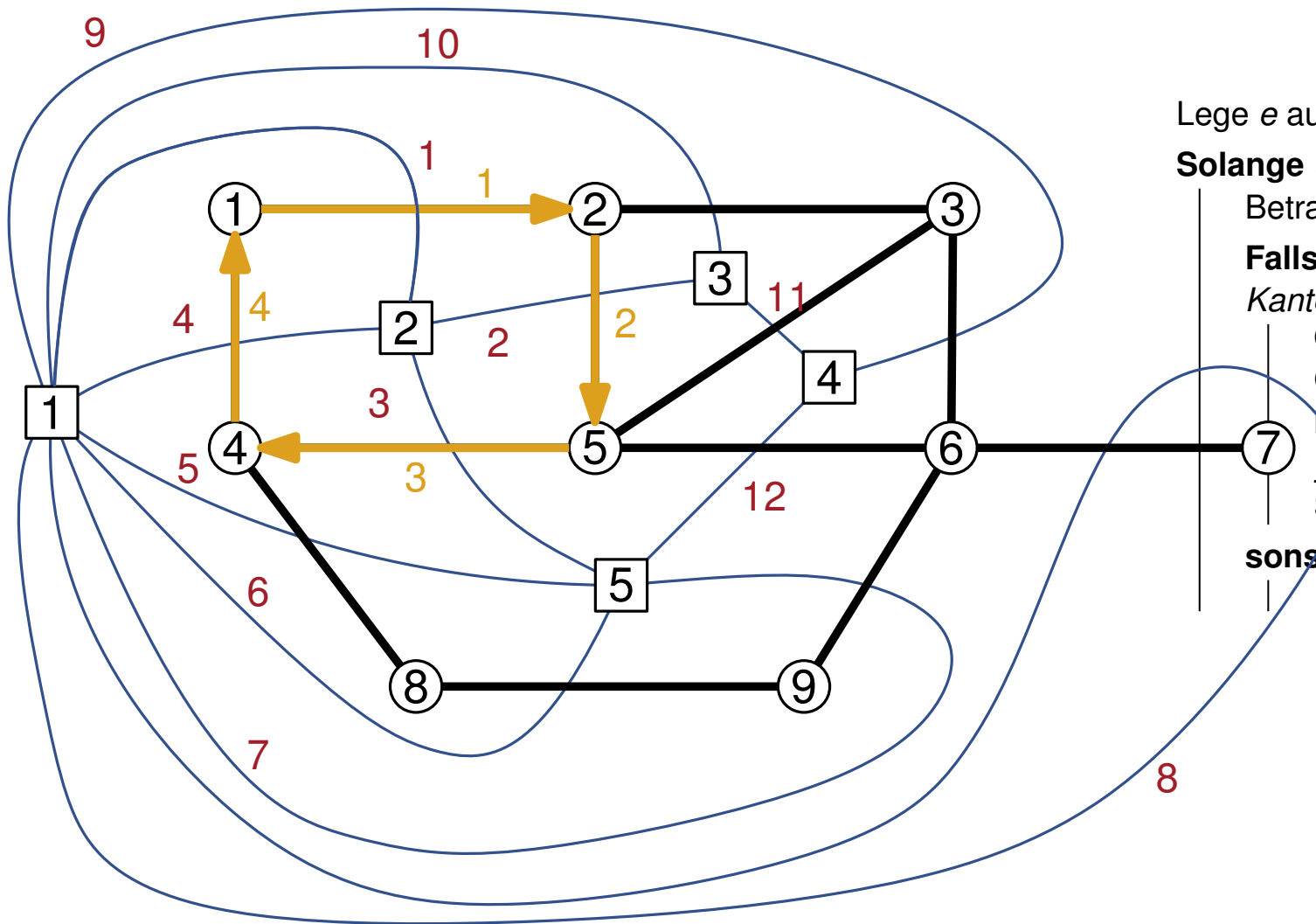
Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel



# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

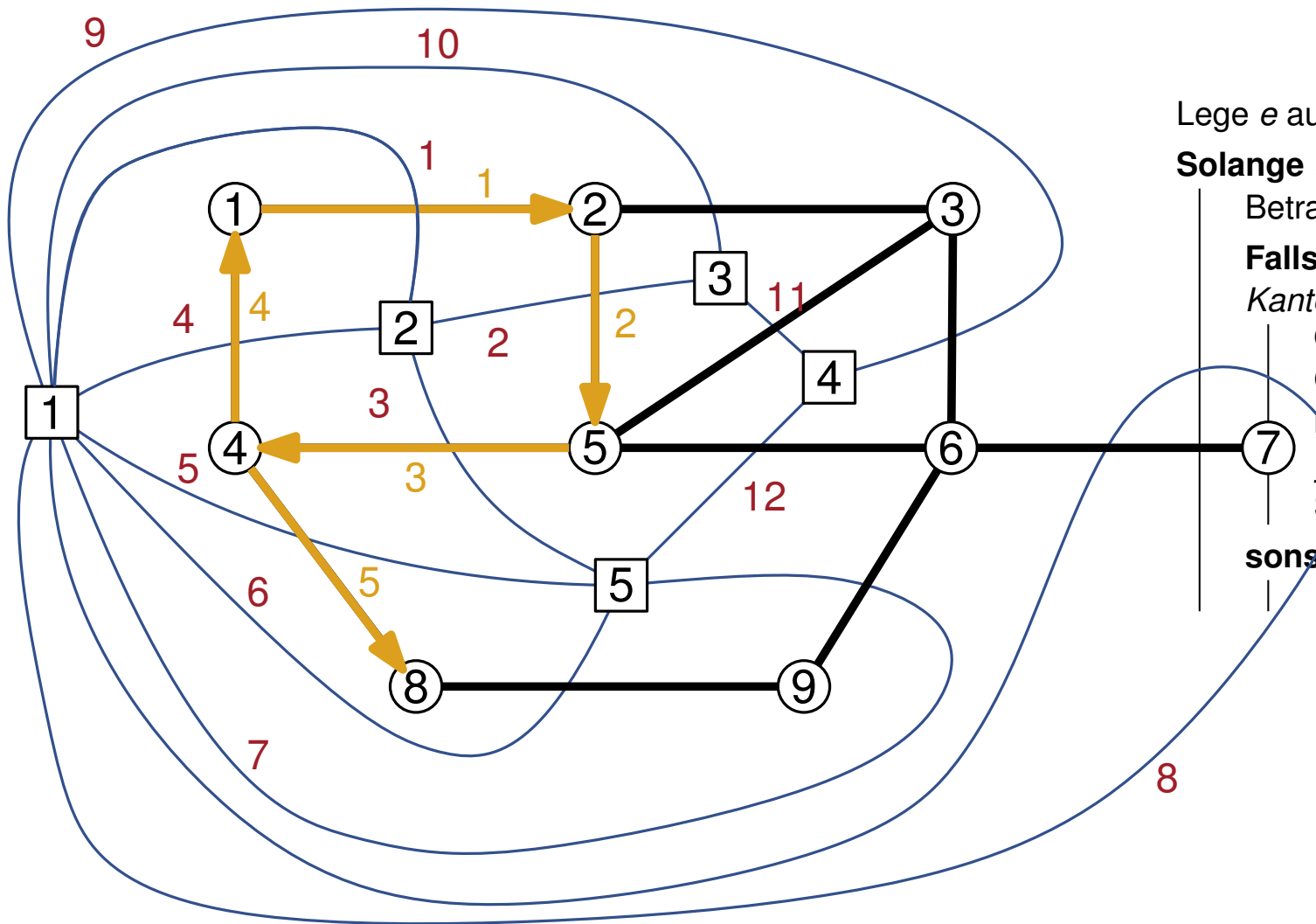
**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

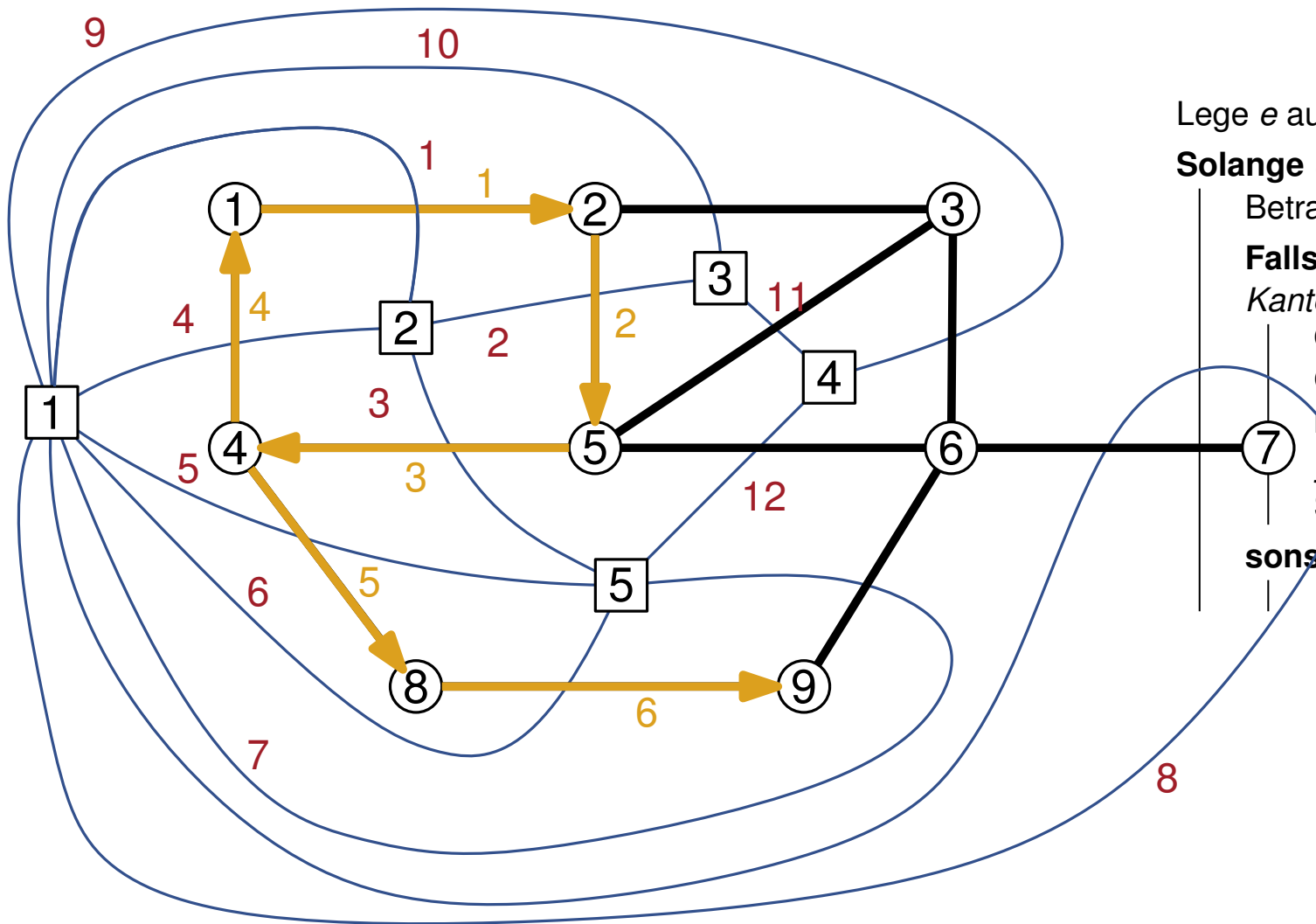
**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

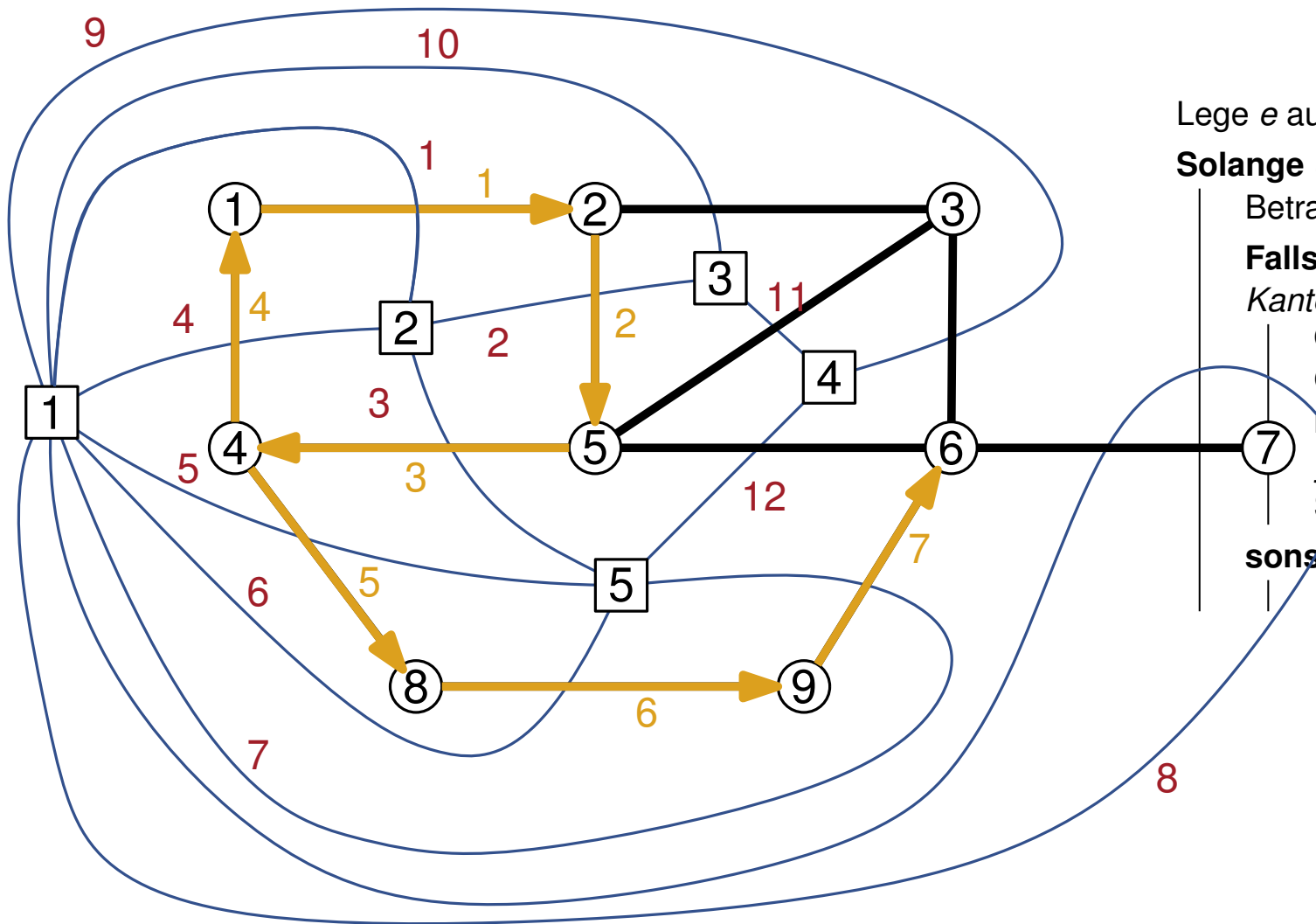
**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

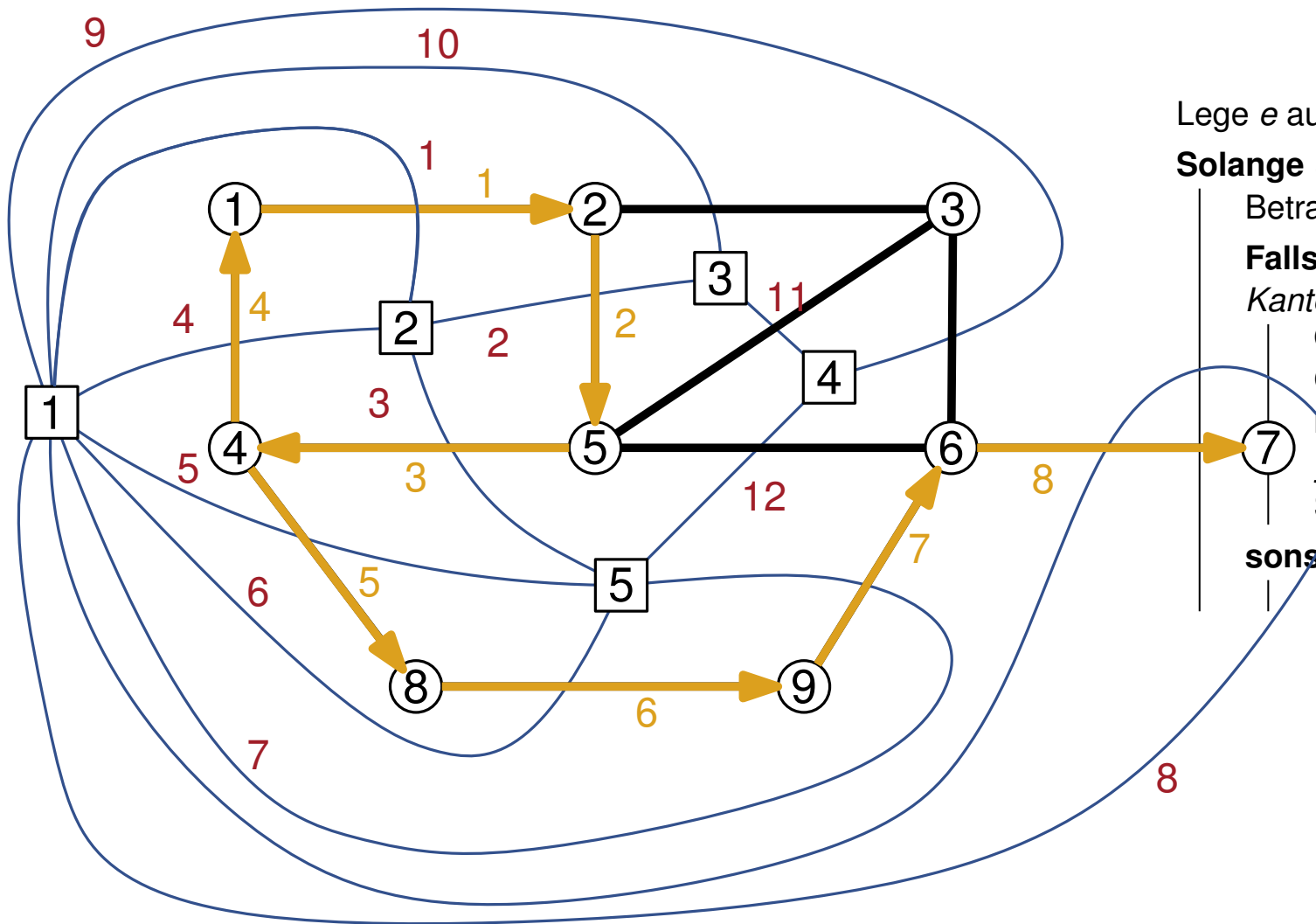
**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

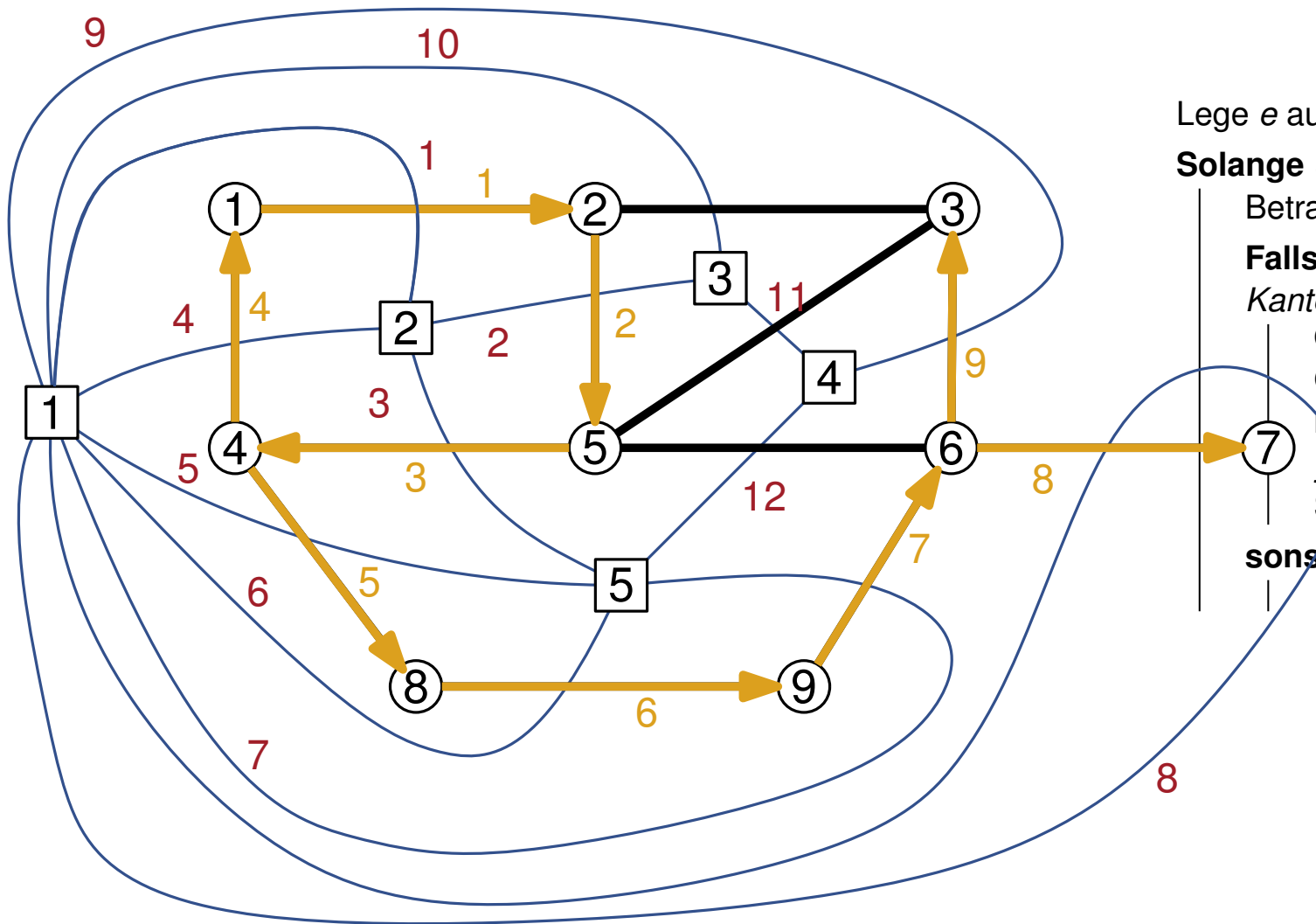
**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

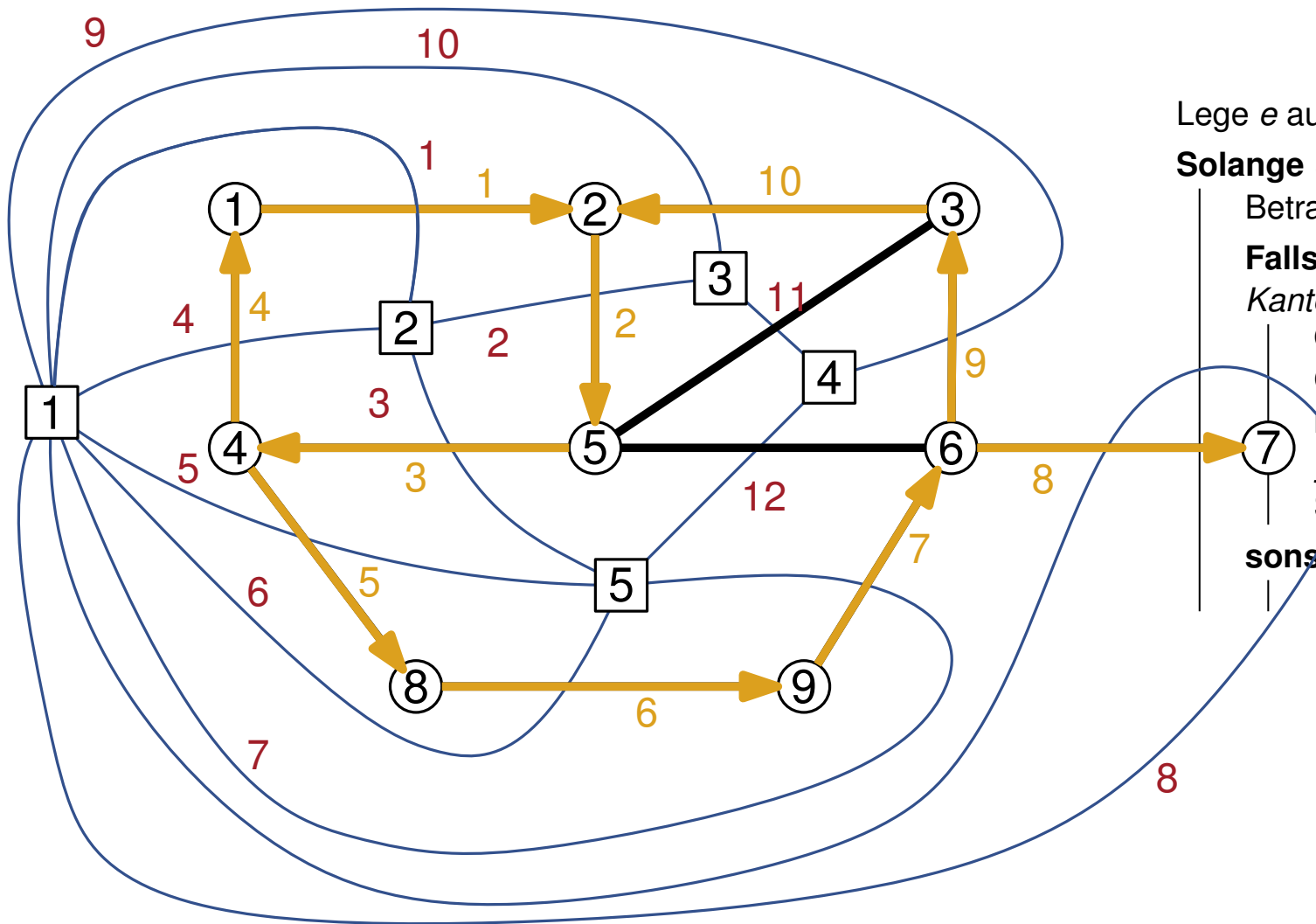
**Falls** *y* **inzident zu nichtorientierter Kante**

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

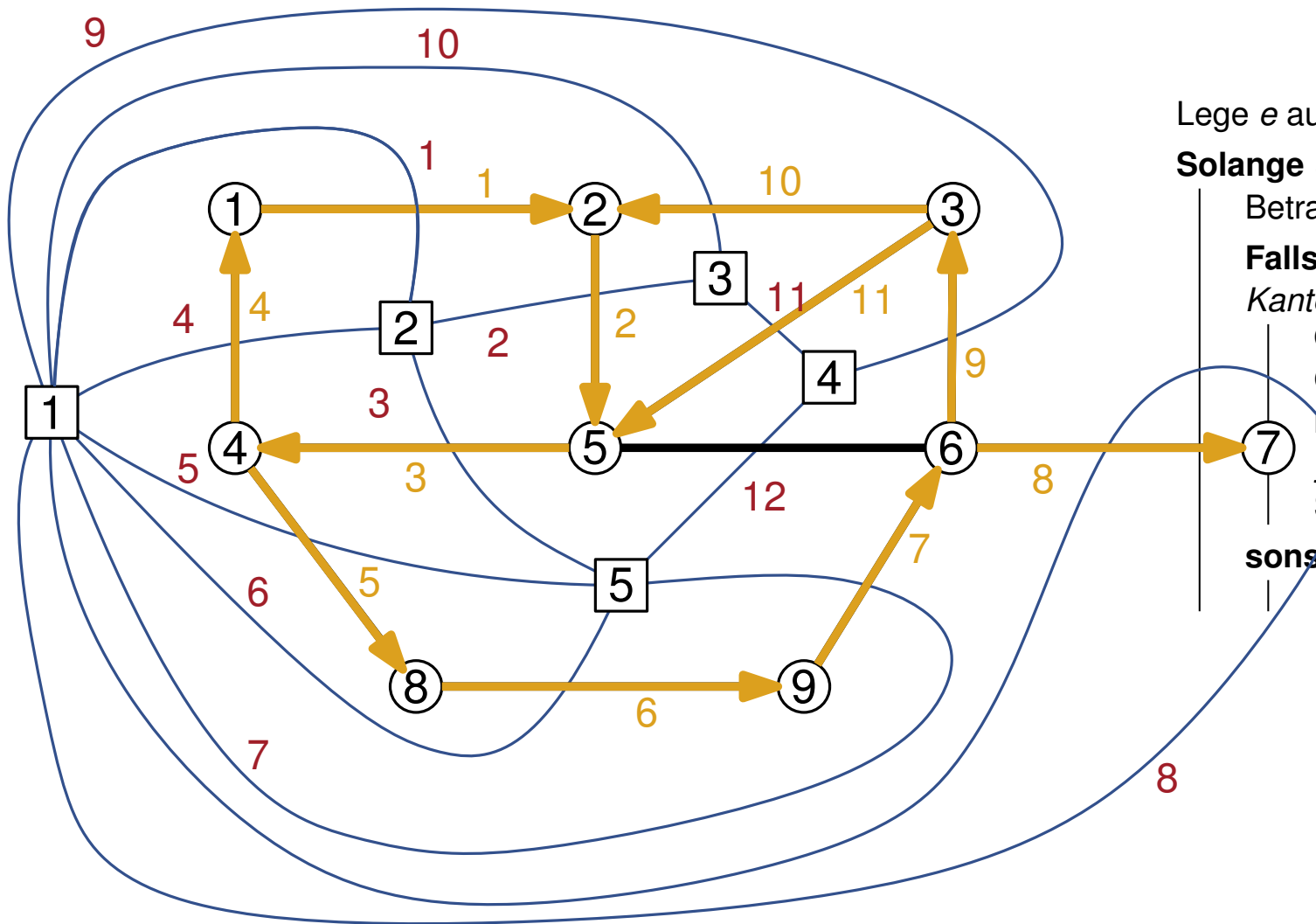
Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel



# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

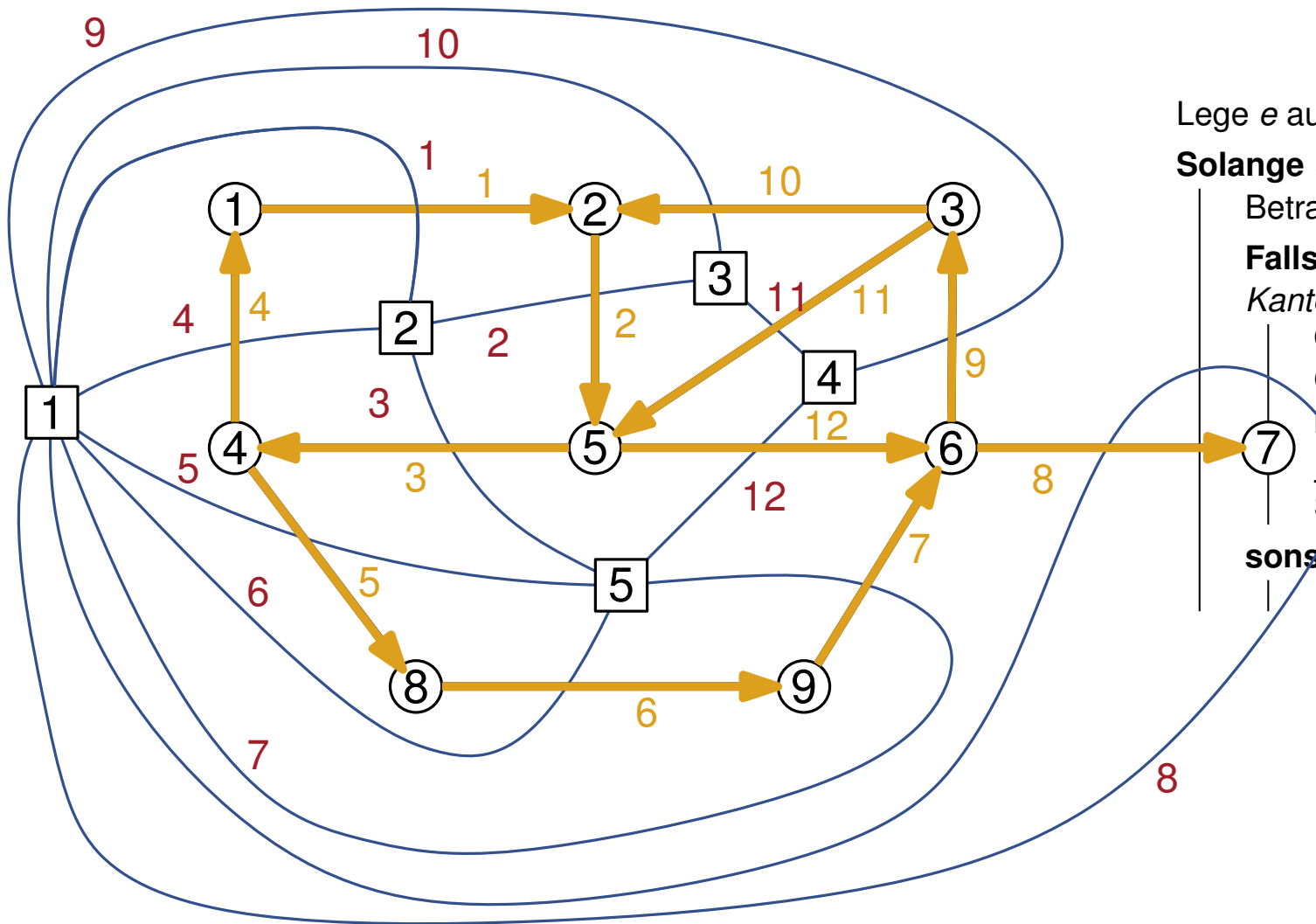
**Falls**  *$y$  inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1



Lege  $e$  auf einen Stapel

**Solange** *Stapel nicht leer wiederhole*

Betrachte oberste Kante  $(x, y)$

**Falls**  $y$  *inzident zu nichtorientierter Kante*

Orientiere im  
Gegenuhrzeigersinn bzgl.  $y$   
nächste nichtorientierte Kante  
 $y \rightarrow w$  und lege diese auf den  
Stapel

**sonst**

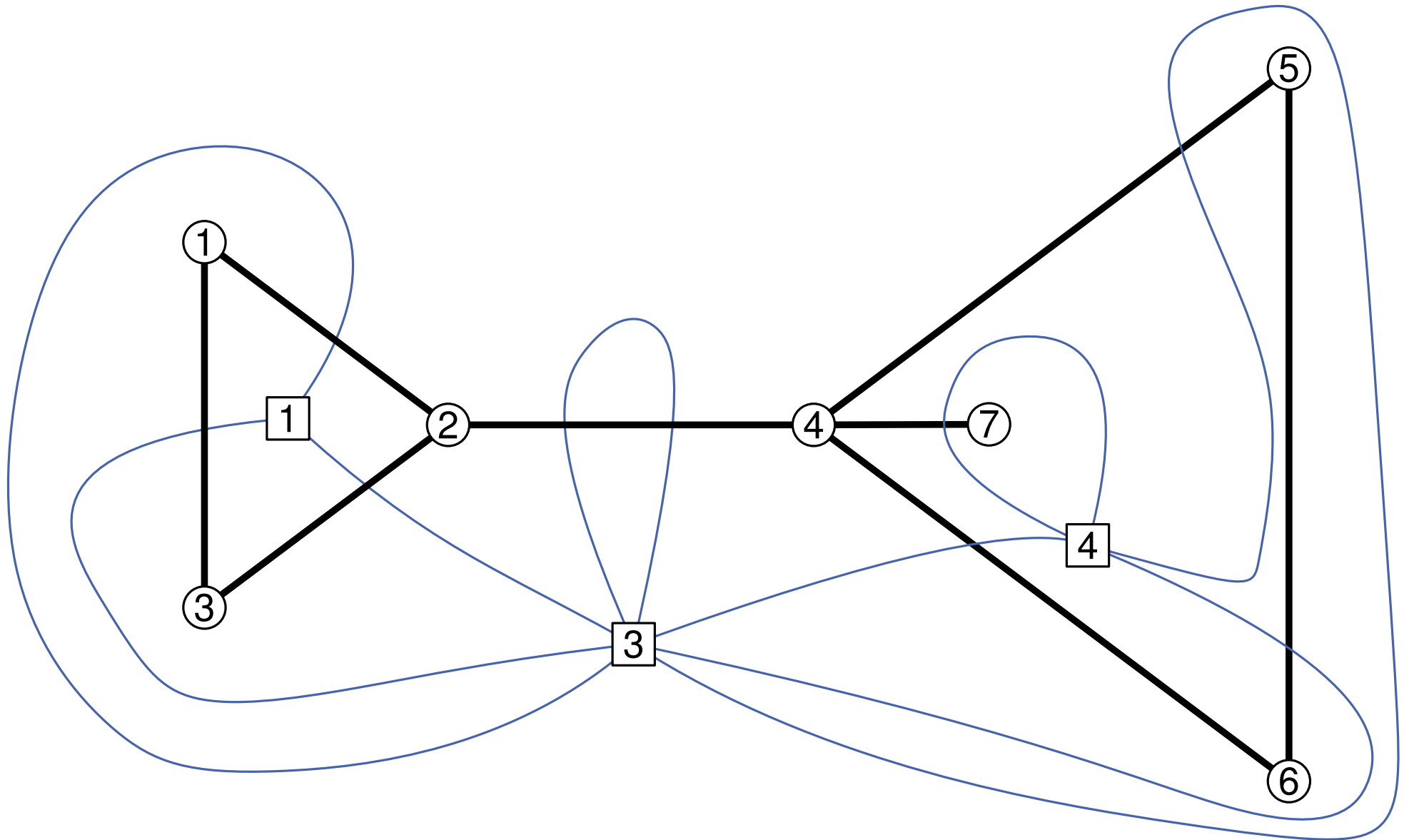
Entferne  $(x, y)$  vom Stapel

# Aufgabe 1

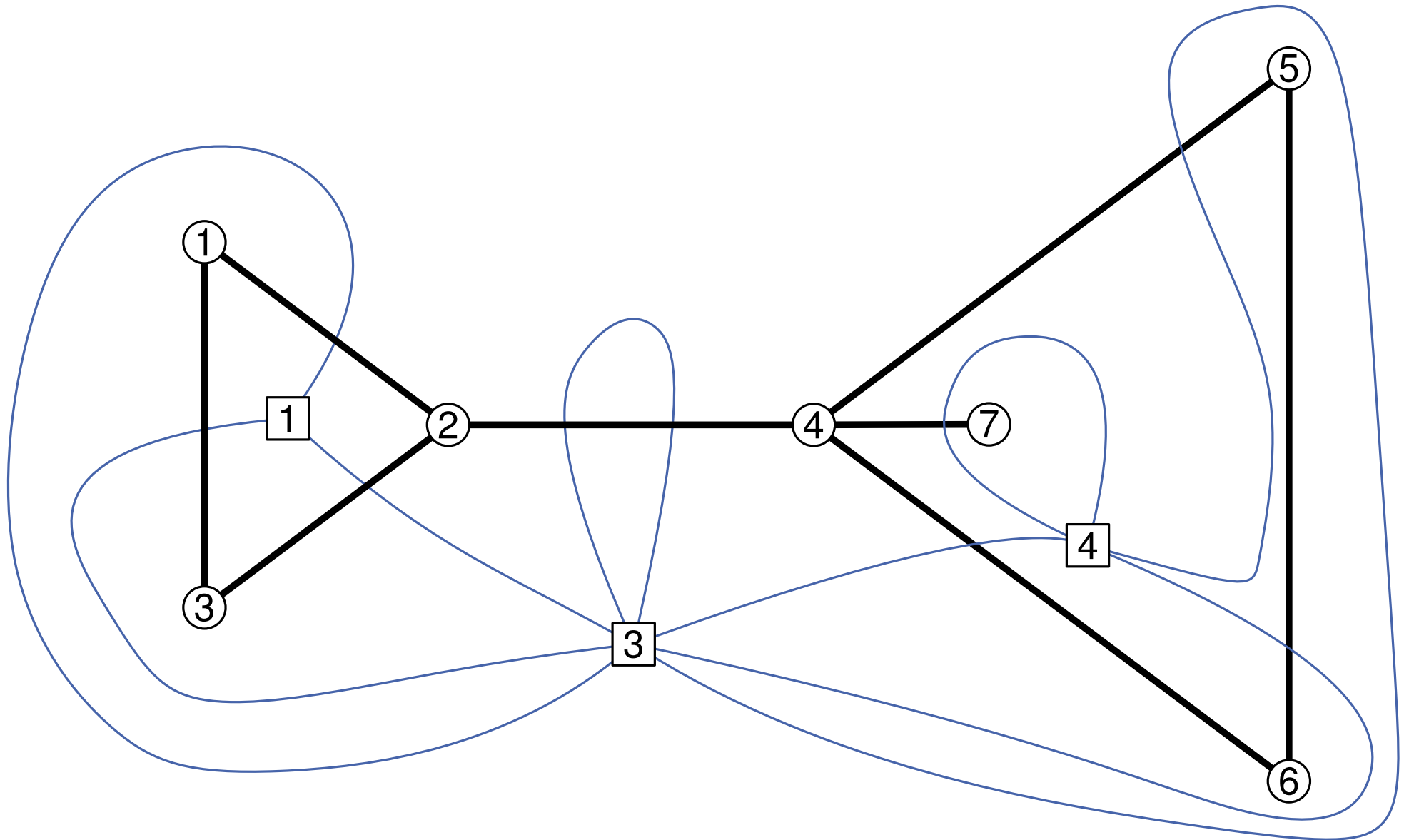
Geben Sie einen Graphen an, für den  $R$  und  $R^*$  nicht dual sind.

**Hinweis:** Betrachten Sie Graphen mit Brücken und Kreisen.

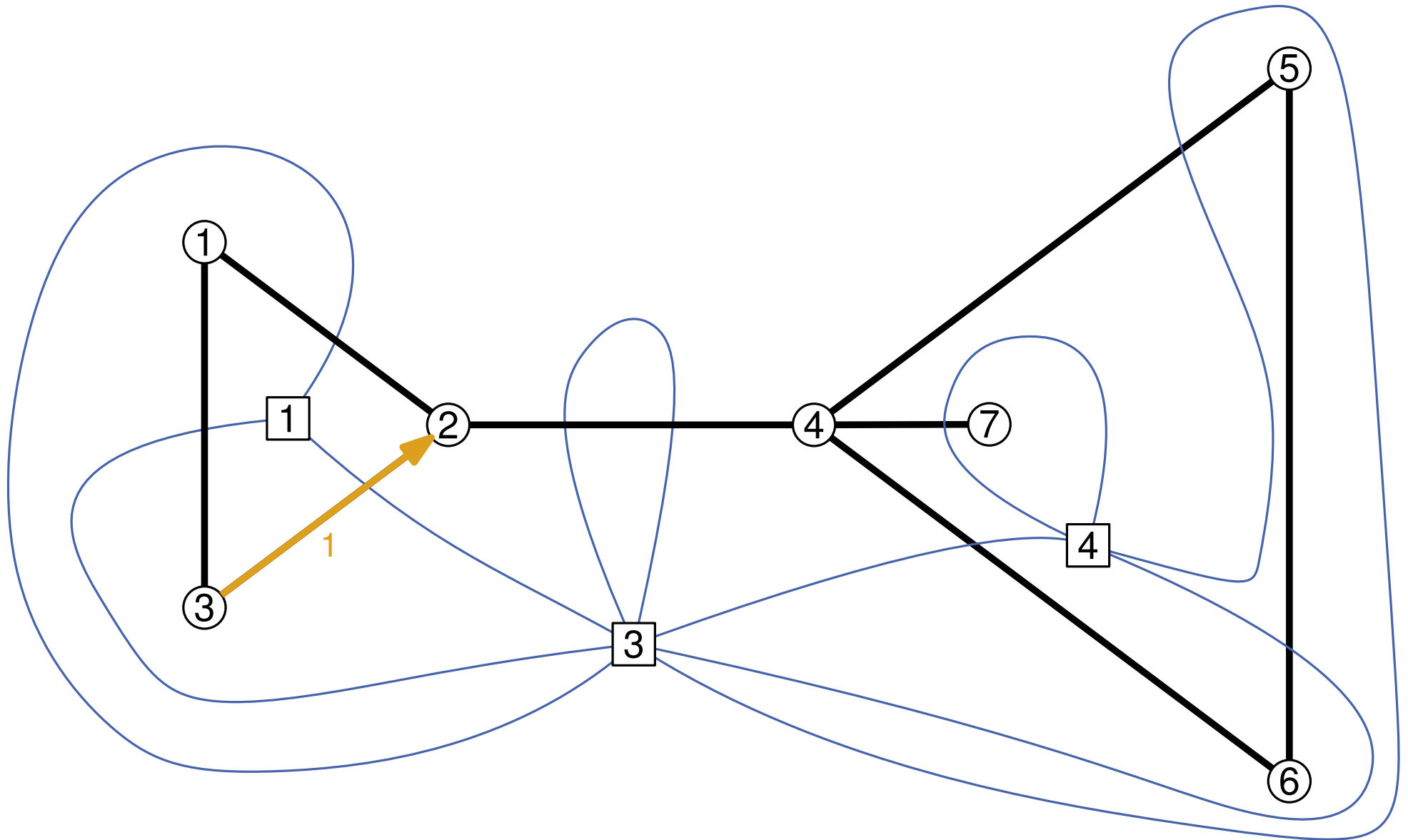
# Aufgabe 1



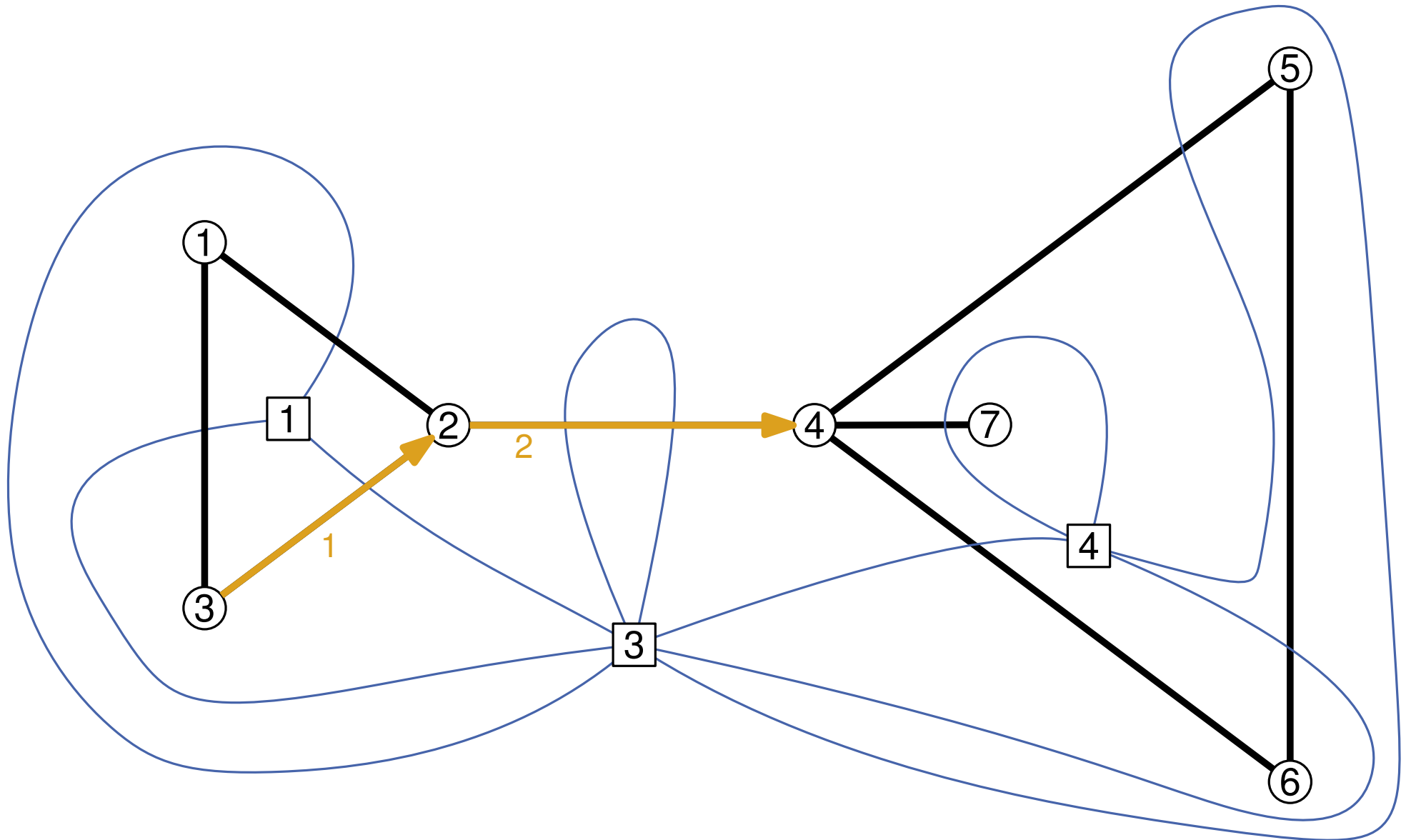
# Aufgabe 1



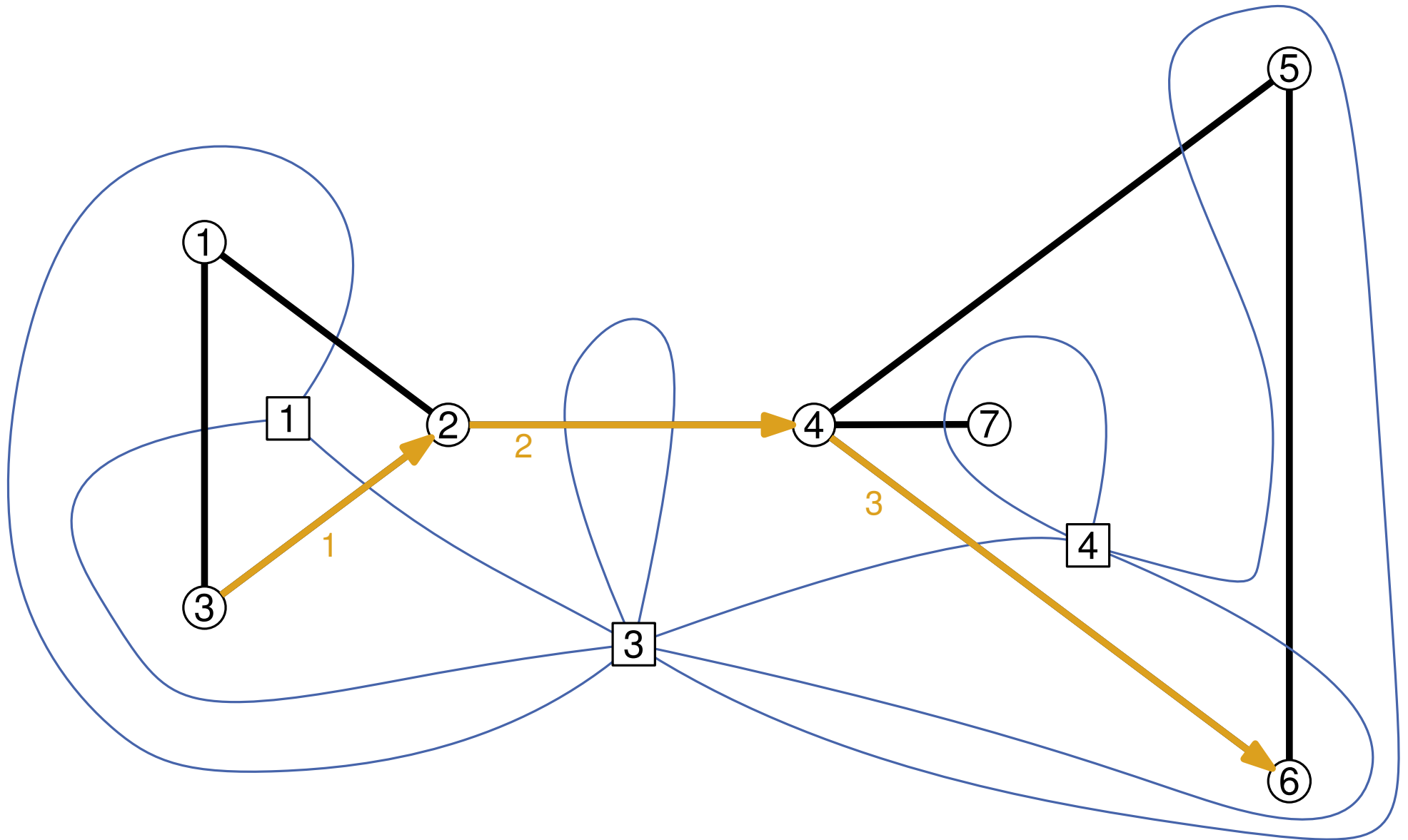
# Aufgabe 1



# Aufgabe 1

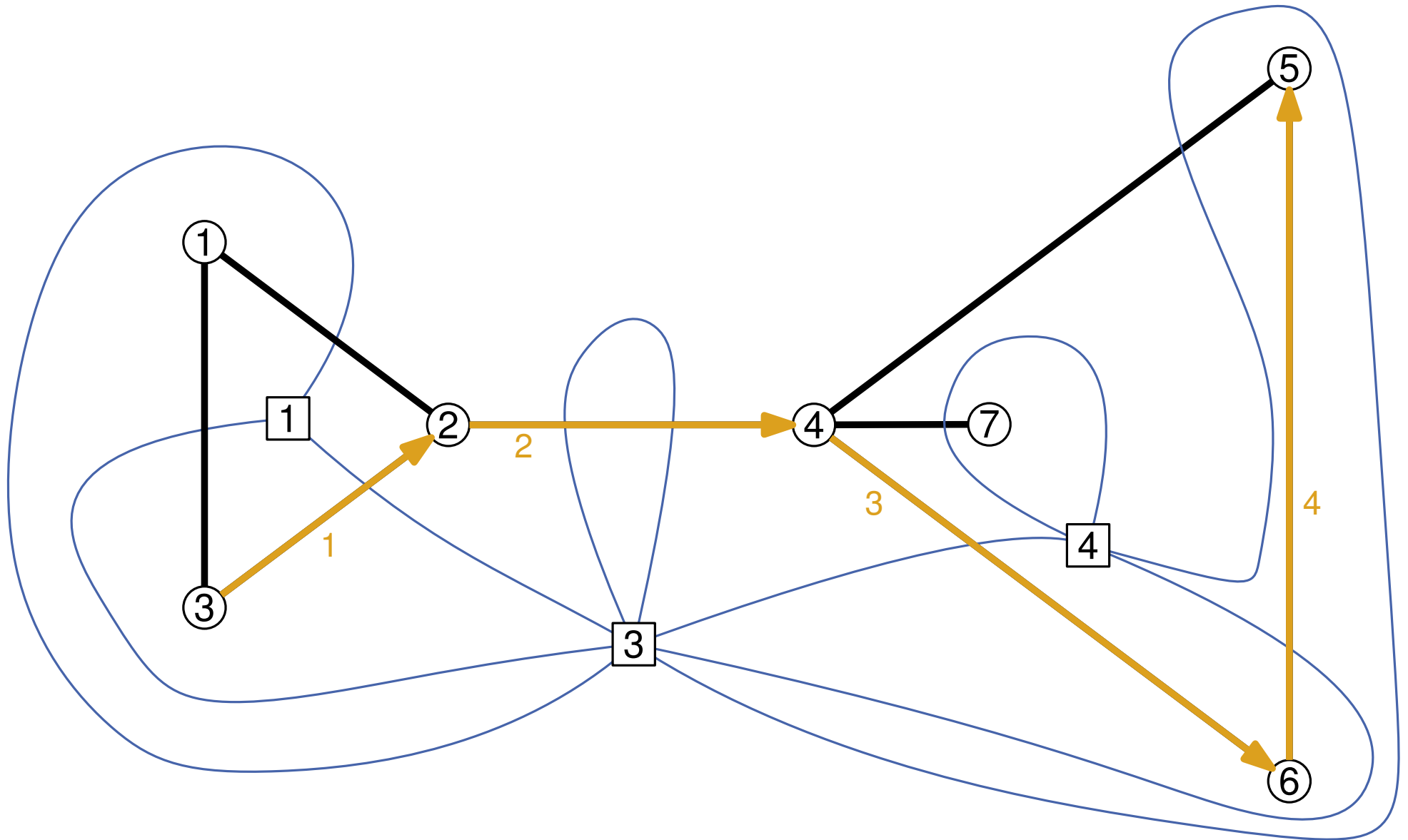


# Aufgabe 1

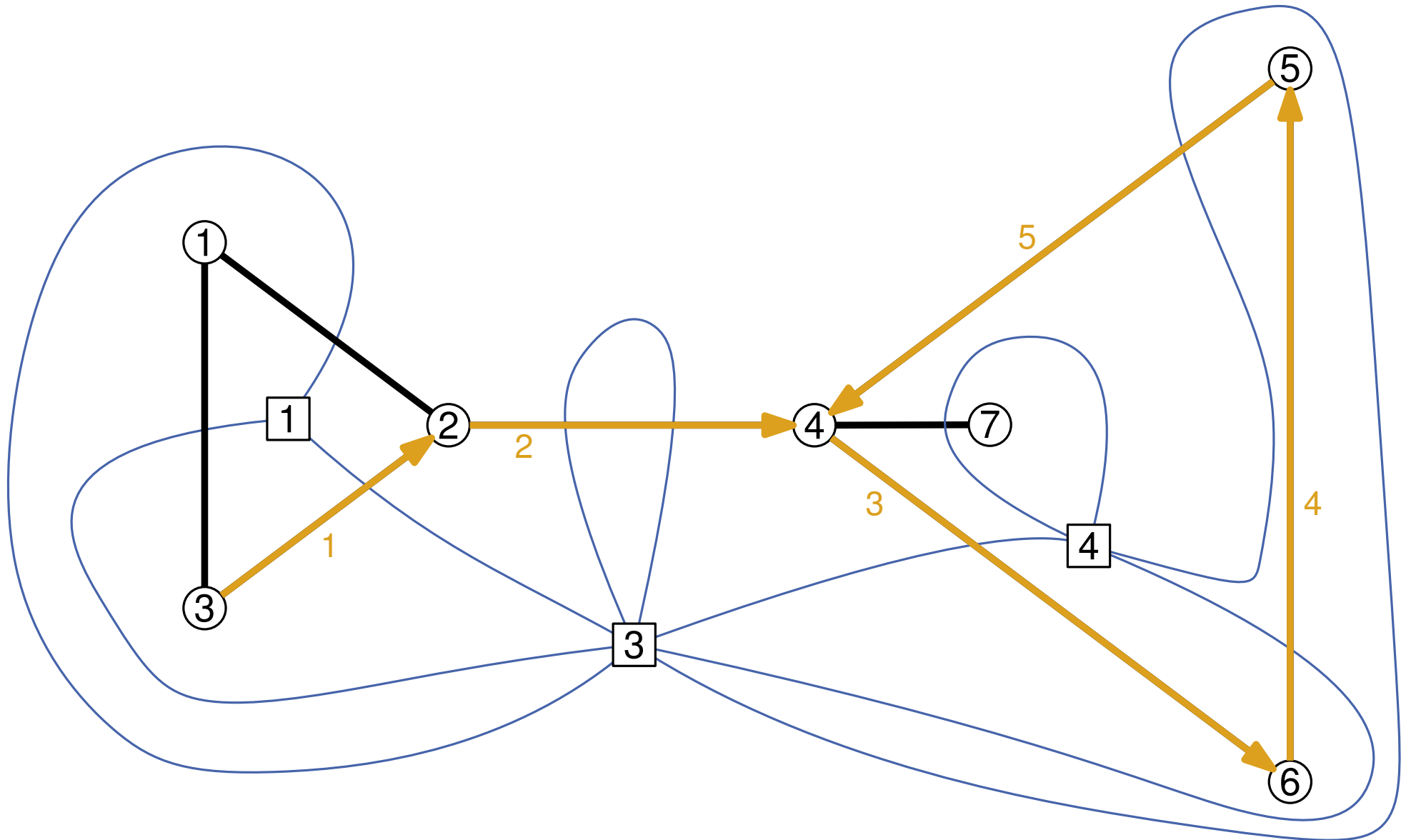




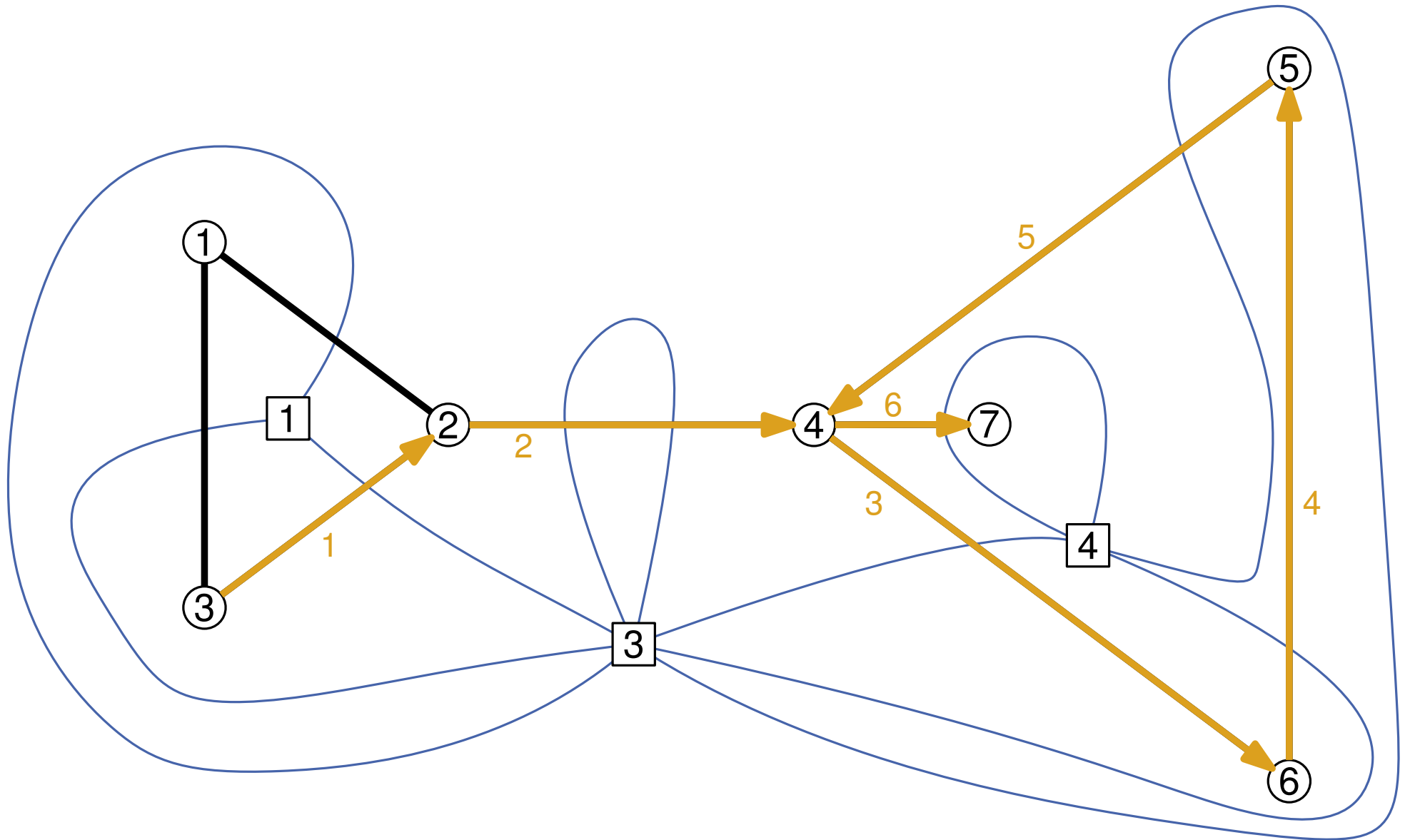
# Aufgabe 1



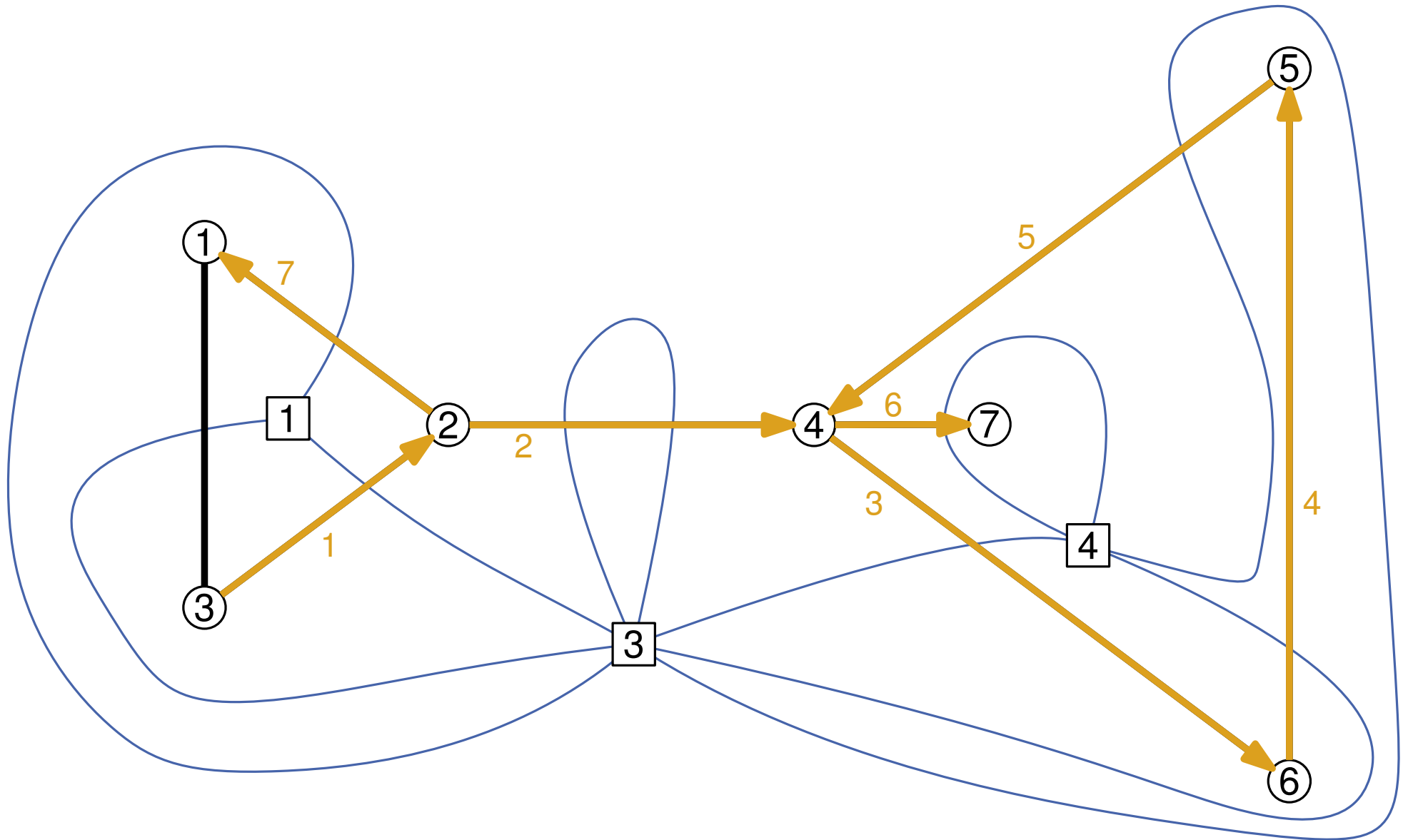
# Aufgabe 1



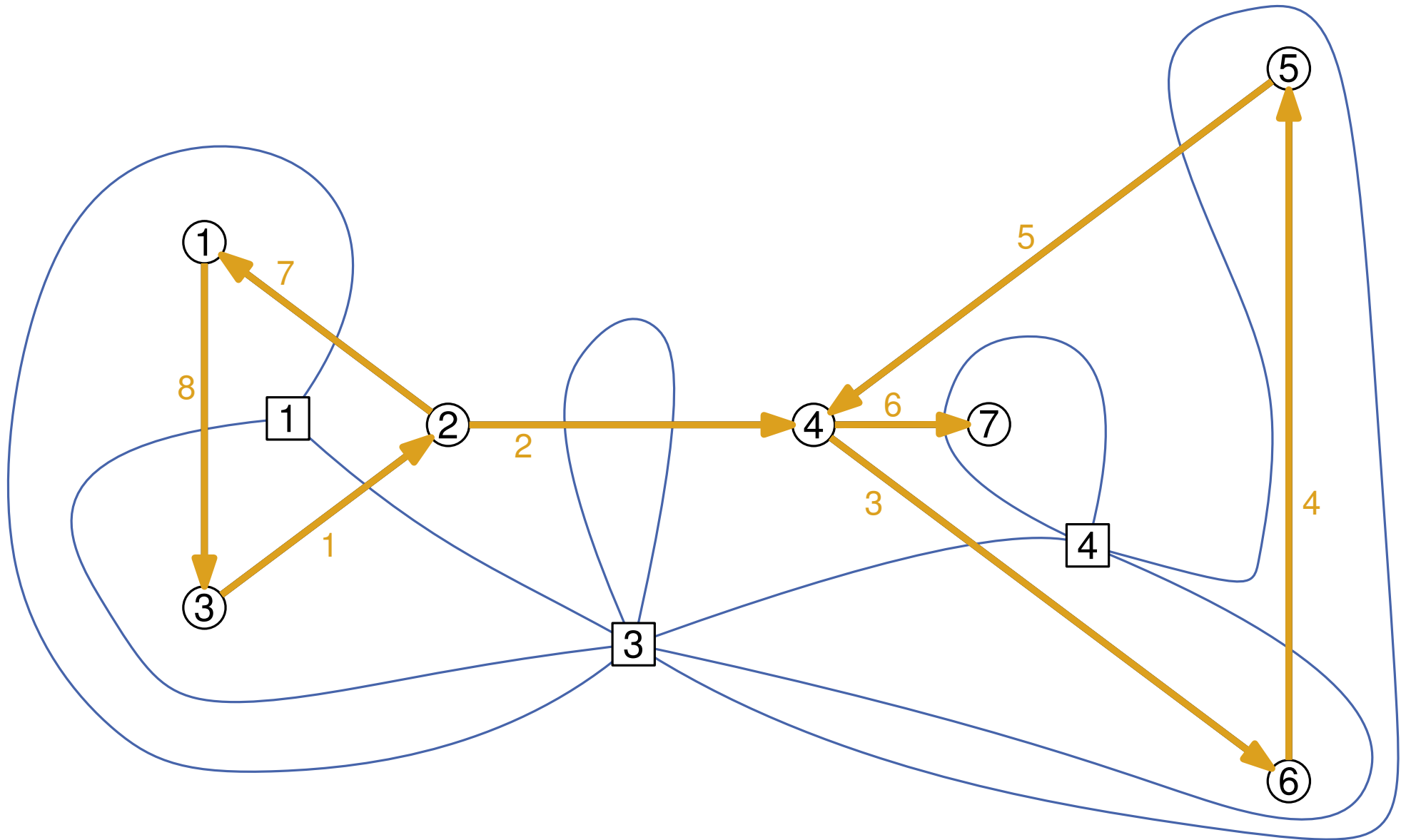
# Aufgabe 1



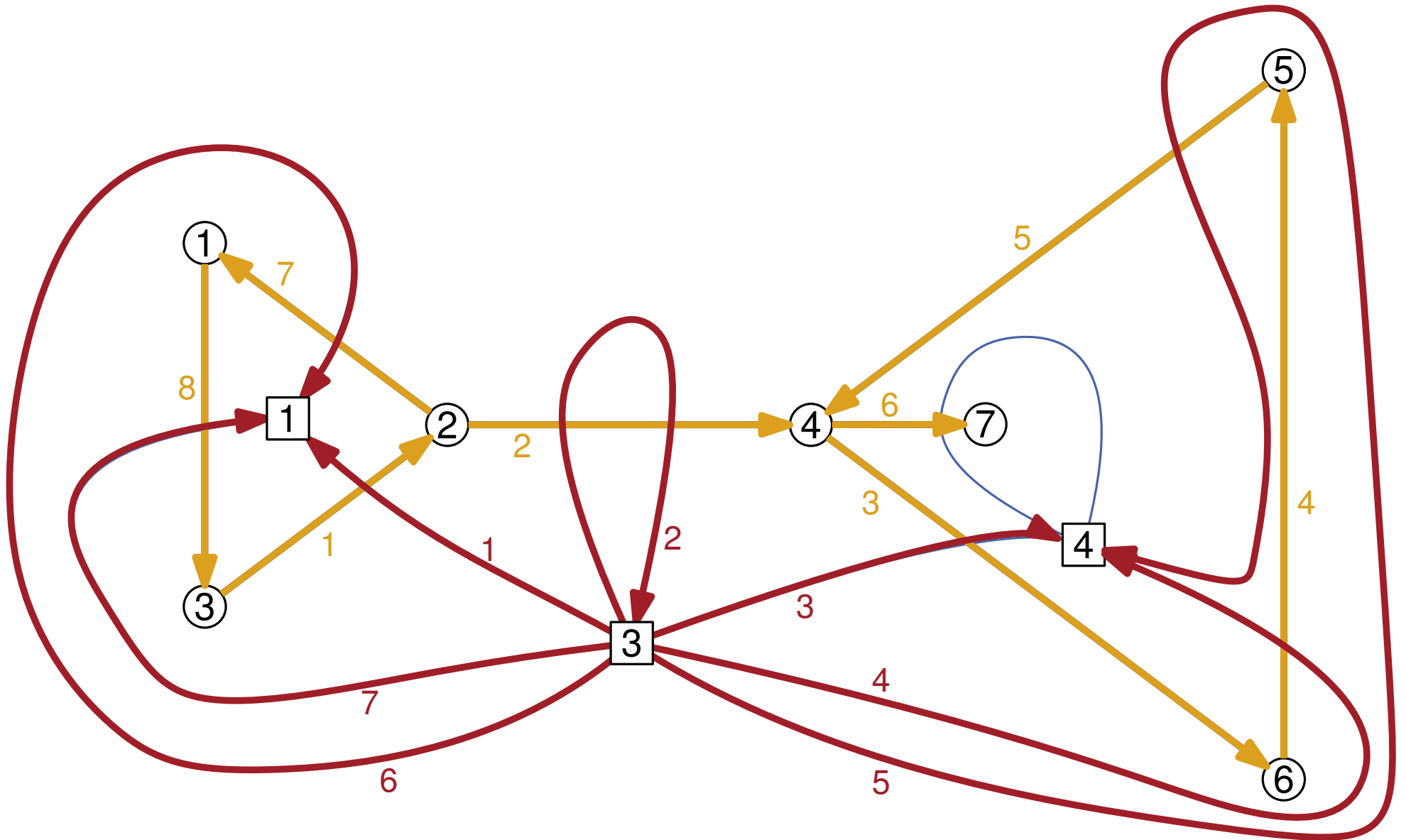
# Aufgabe 1



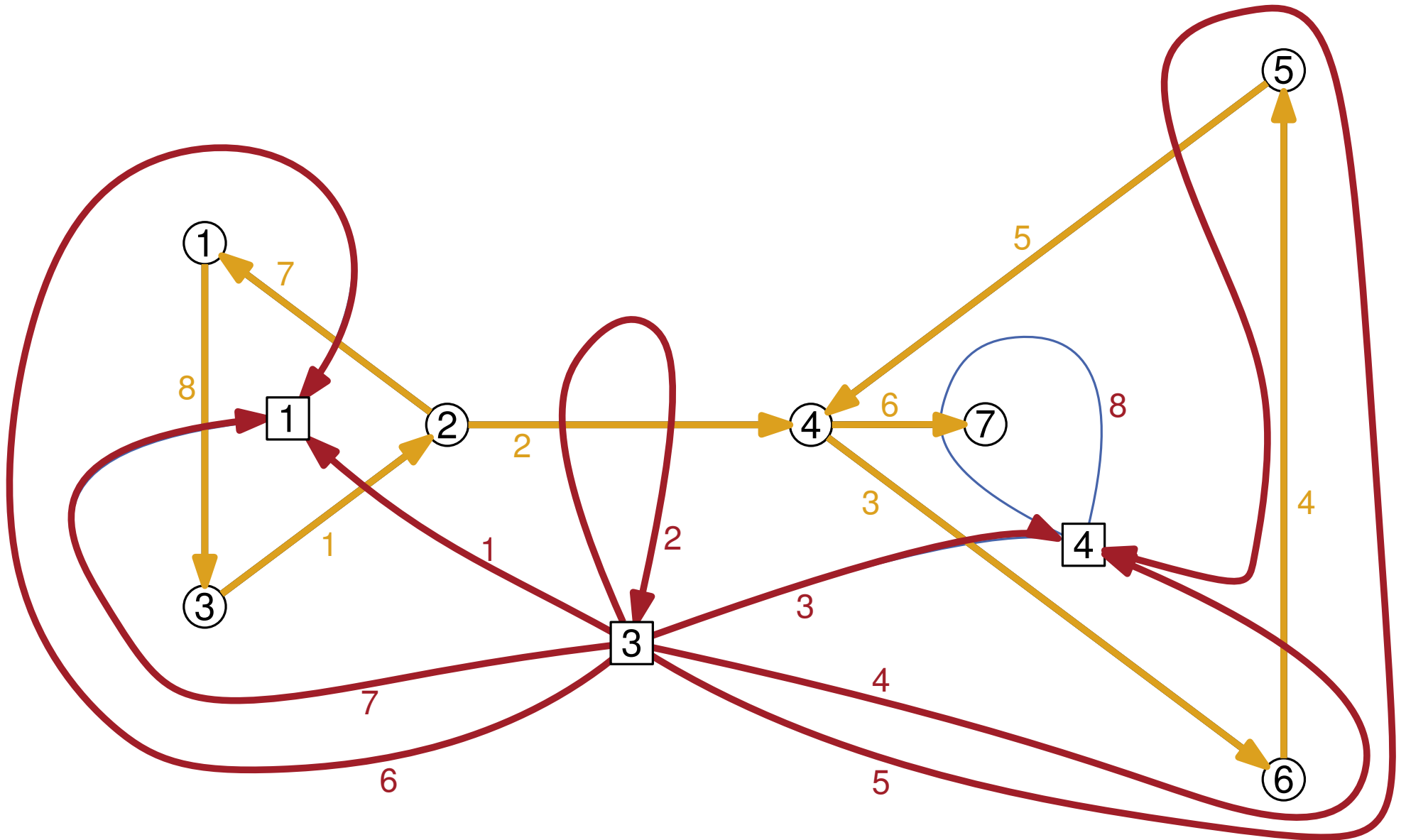
# Aufgabe 1



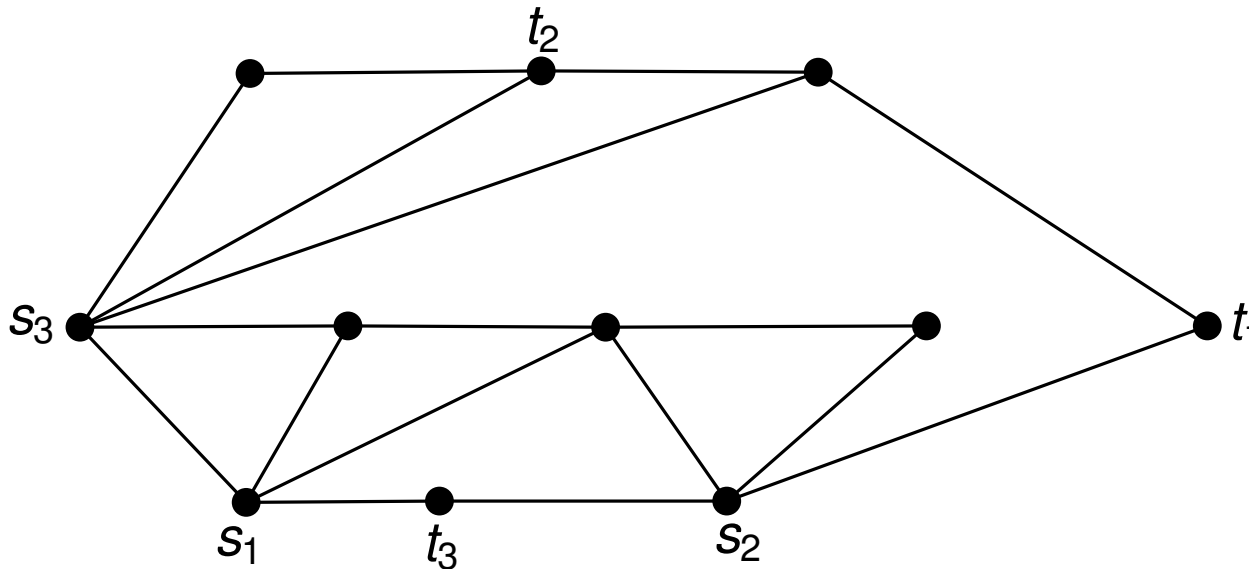
# Aufgabe 1



# Aufgabe 1



# Aufgabe 2



Betrachten Sie obenstehenden Graphen mit der angegebenen Menge an Terminalpaaren, und überprüfen Sie die *Geradheitsbedingung*.

Ist das induzierte *kantendisjunkte Wegpackungsproblem* lösbar?



# Wiederholung

**Gegeben:** Graph  $G = (V, E)$  und Paare ausgezeichneter Knoten  $\{s_1, t_1\}, \dots, \{s_k, t_k\}$ ,  $s_i, t_i \in V$  (nicht notwendig paarweise verschieden).

**Finde:** Paarweise kantendisjunkte  $s_i$ - $t_i$ -Wege  $p_i$  in  $G$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

**Definition 1** Sei  $G = (V, E)$ ,  $X \subseteq V$ . Dann heißt

$$c(X) := |\{\{u, v\} \in E : u \in X, v \in V \setminus X\}|$$

die Kapazität von  $X$  (Größe des durch  $X$  induzierten Schnittes). Zu  $G = (V, E)$  sei  $D = \{\{s_i, t_i\} : s_i, t_i \in V, 1 \leq i \leq k\}$  gegeben. Dann heißt

$$d(X) := |\{\{s_i, t_i\} \in D : |\{s_i, t_i\} \cap X| = 1\}|$$

die Dichte von  $X$ .

$$fc(X) := c(X) - d(X)$$

bezeichne die freie Kapazität von  $X$ .  $X$  heißt saturiert, falls  $fc(X) = 0$  und übersaturiert, falls  $fc(X) < 0$ .

# Wiederholung

Ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $D = \{\{s_i, t_i\} : s_i, t_i \in V, 1 \leq i \leq k\}$  erfüllt die *Geradheitsbedingung* (auch *Euler-Bedingung* genannt), falls  $fc(X)$  gerade ist für alle  $X \subseteq V$ .

## Lemma

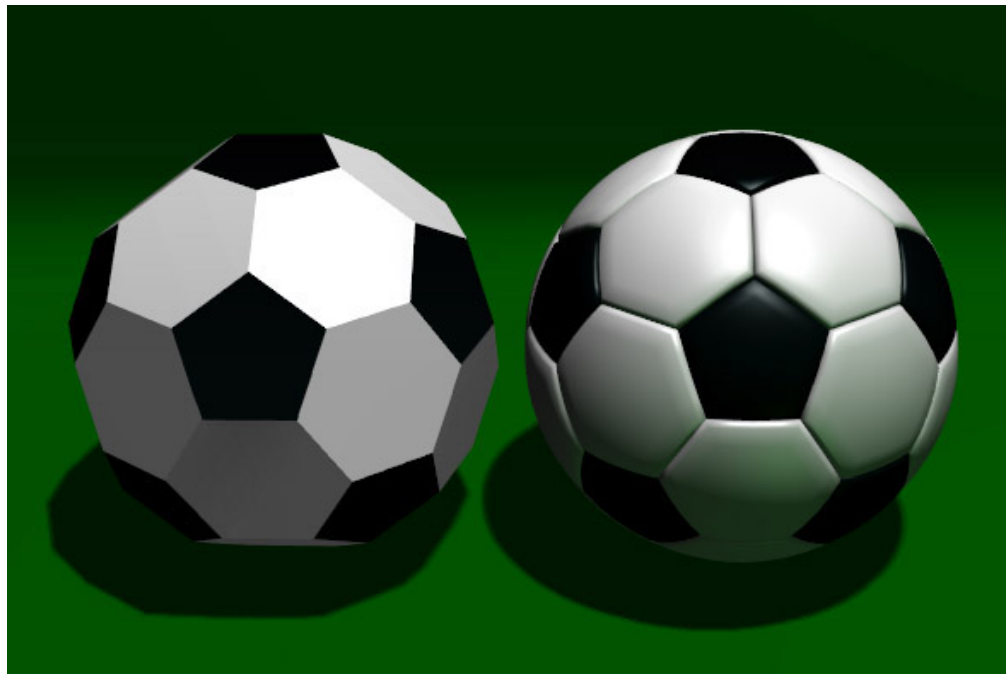
Sei  $G = (V, E)$ ,  $D := \{\{s_i, t_i\} : s_i, t_i \in V, 1 \leq i \leq k\}$ . Es gilt  $fc(X)$  gerade für alle  $X \subseteq V$  genau dann, wenn  $fc(v) := fc(\{v\})$  gerade für alle  $v \in V$ .



# Aufgabe 3

Ein Fußball mit Wabenstruktur hat eine Oberfläche die ausschließlich aus regulären Fünf- und Sechsecken besteht.

Zeigen Sie: Die Anzahl der Fünfecke auf jedem Fußball mit Wabenstruktur ist 12.



[https://de.wikipedia.org/wiki/Fußball\\_\(Sportgerät\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Fußball_(Sportgerät))

*Hinweis:* Nehmen Sie an, dass ein Fußball in etwa die Form einer Kugel hat.