

Algorithmen für Planare Graphen

Übung am 02.05.2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



Übung für Algorithmen für Planare Graphen

Übungsleiter

- Guido Brückner
- `brueckner@kit.edu`
- Raum 317
- Sprechzeiten: individuell per Mail vereinbaren

Vorlesungen und Übungen:

- Montag, 15:45-17:15, Hörsaal -102 - Gebäude 50.34 - Informatik-Hauptgebäude
- Dienstag, 14:00–15:30, Hörsaal II - Gebäude 30.41 - Chemie Flachbau

Für Abweichungen siehe Homepage:

<http://i11www.iti.uni-karlsruhe.de/teaching/sommer2017/planargraphs/index>

Ablauf des Übungsbetrieb

- Es wird voraussichtlich 7 Übungsblätter geben.
- Bearbeitung ist freiwillig, **aber** wird sehr **empfohlen!!!**
- Lösungen werden in den Übungen besprochen/**diskutiert**.



Tag der Besprechung des aktuellen ÜB
=
Tag der Ausgabe für nächstes ÜB.



Ablauf des Übungsbetrieb

- Es wird voraussichtlich 7 Übungsblätter geben.
- Bearbeitung ist freiwillig, **aber** wird sehr **empfohlen!!!**
- Lösungen werden in den Übungen besprochen/**diskutiert**.



Tag der Besprechung des aktuellen ÜB
=
Tag der Ausgabe für nächstes ÜB.



Aufgaben werden an der Tafel besprochen

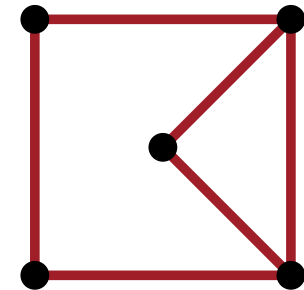
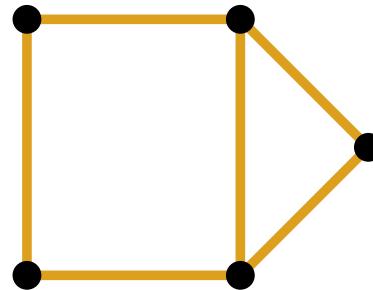
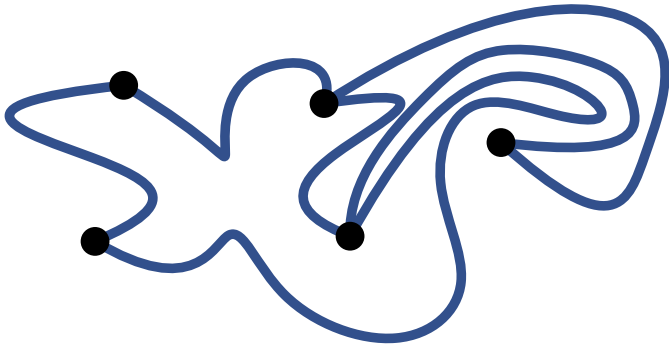
Es wird keine Musterlösung geben.

→ Anwesenheit lohnt sich!

Repräsentation und Eigenschaften von Planaren Graphen

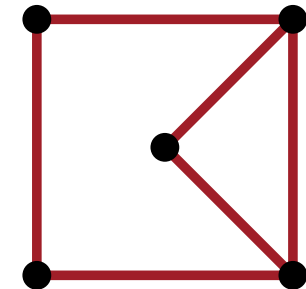
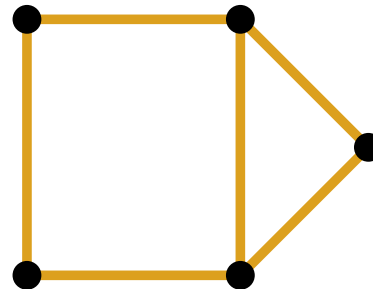
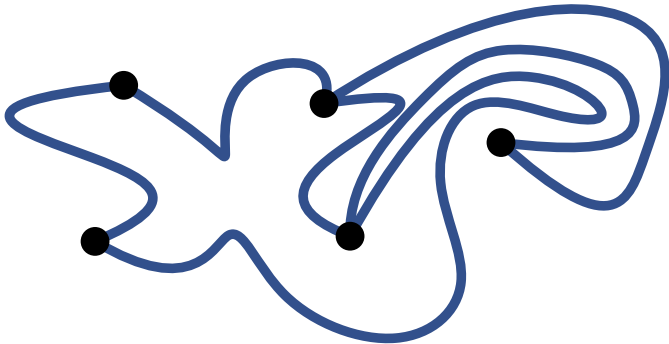
Planare Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.



→ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.



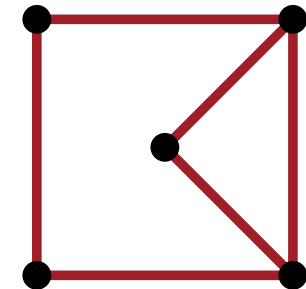
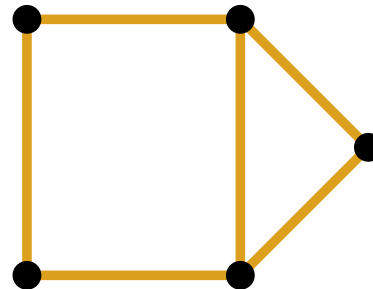
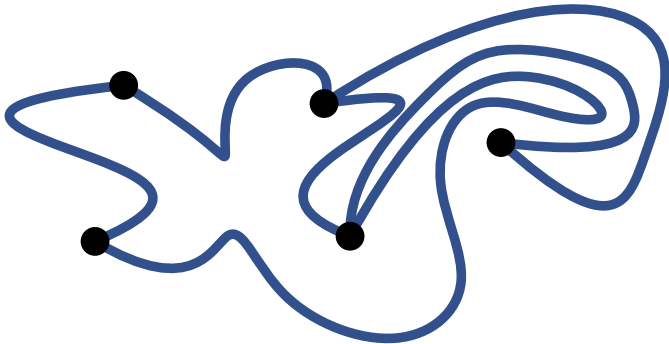
→ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

Welche geometrischen Eigenschaften besitzt ein planarer Graph?

- Wie kann man planaren Graphen zeichnen?
- Kann man immer eine geradlinige Zeichnung finden?
- Wie groß muss die Zeichenfläche sein?
- ...

→ Vorlesung *Graphenvisualisierung*

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.

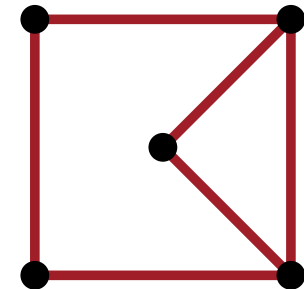
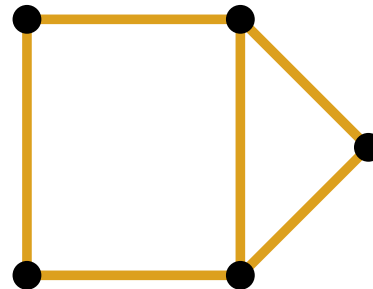
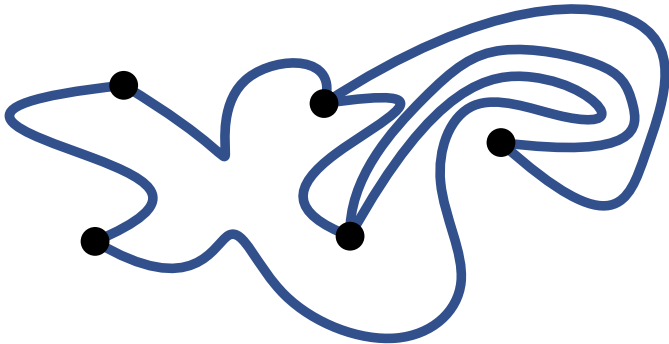


→ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

Welche **kombinatorischen** Eigenschaften besitzt ein planarer Graph?

- Verhältnis Kanten-, Knoten-, Facettenzahl?
- Färbbarkeit?
- Gibt es Dinge (z.B. Schnitte, Flüsse) die man schneller berechnen kann?
- ... → Vorlesung **Algorithmen für planare Graphen**

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.



→ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

Welche **kombinatorischen** Eigenschaften besitzt ein planarer Graph?

- Verhältnis Kanten- Knoten- Facettenzahl?

Nicht an der Geometrie einer Einbettung interessiert, sondern an ihrer Kombinatorik!



→ Finde Beschreibung der Einbettung, die möglichst von Geometrie abstrahiert.



...

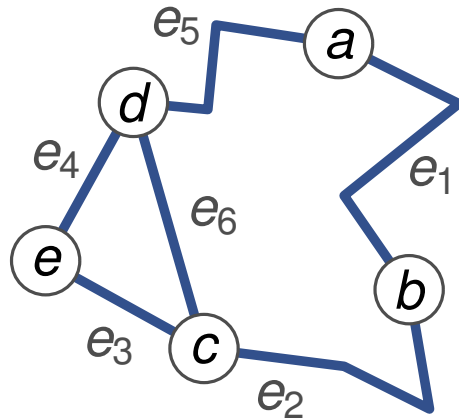


Vorlesung **Algorithmen für planare Graphen**

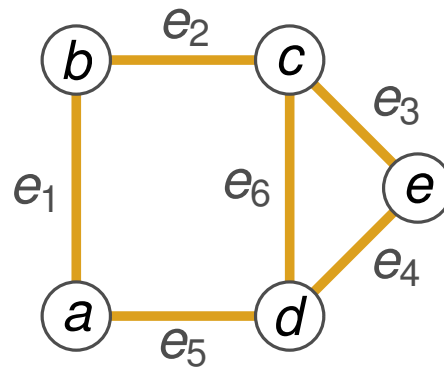
Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1 , E_2 von E_3 ?

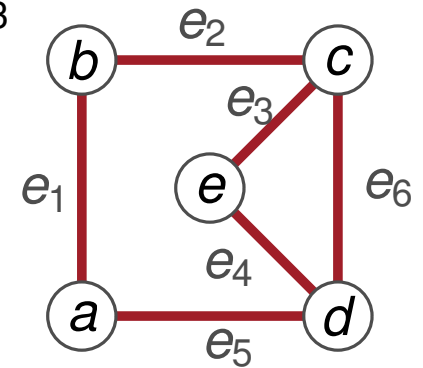
E_1



E_2



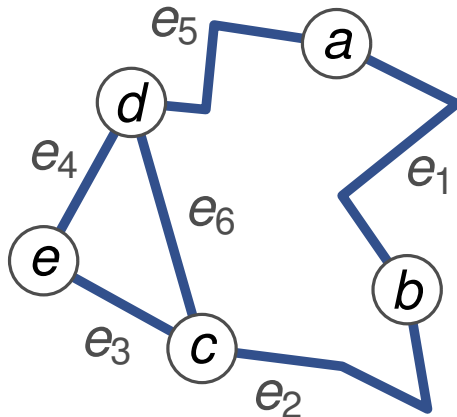
E_3



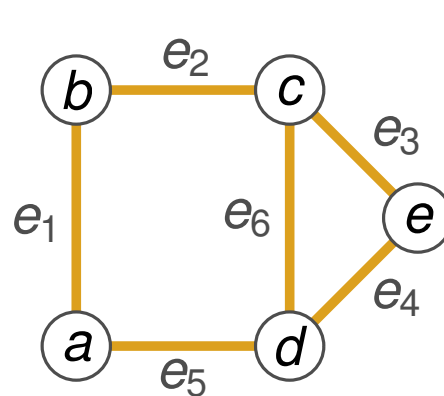
Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1 , E_2 von E_3 ?

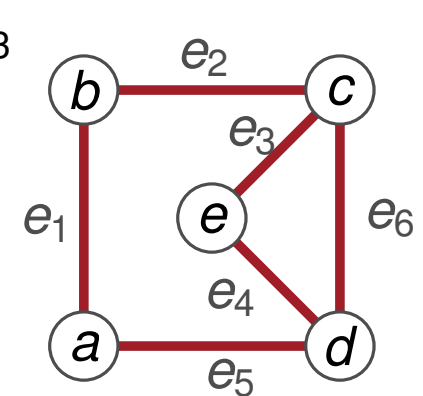
E_1



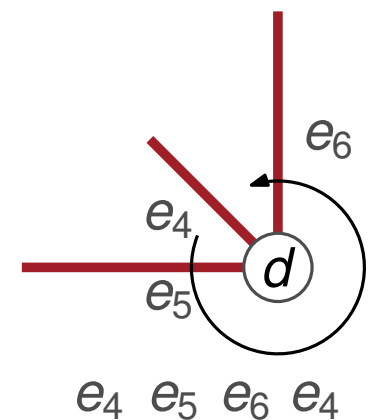
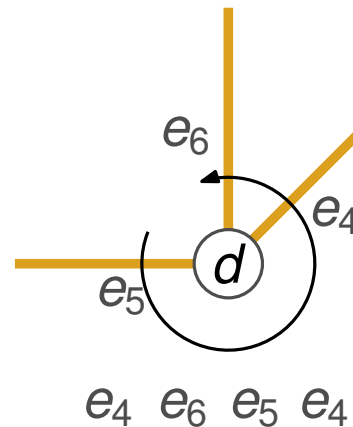
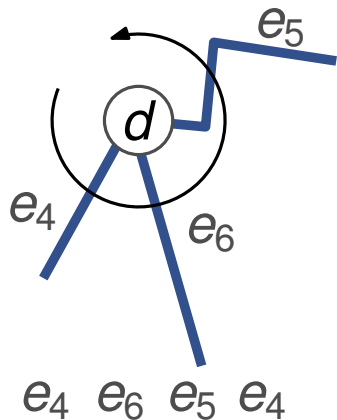
E_2



E_3

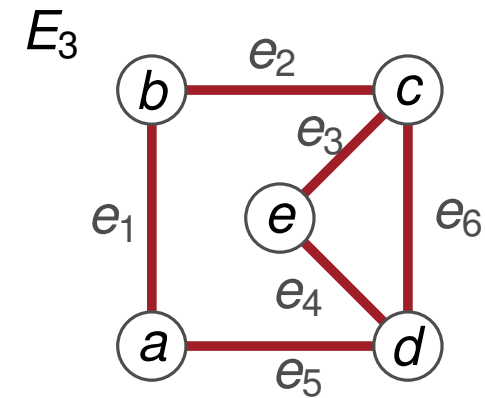
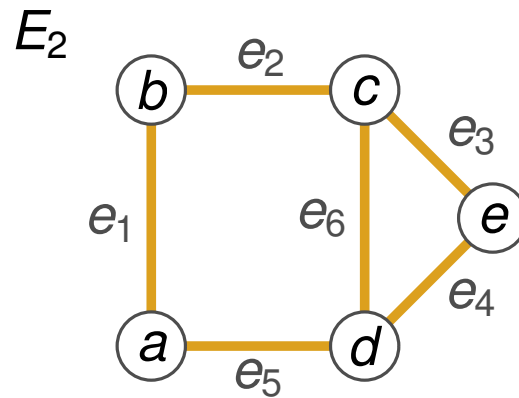
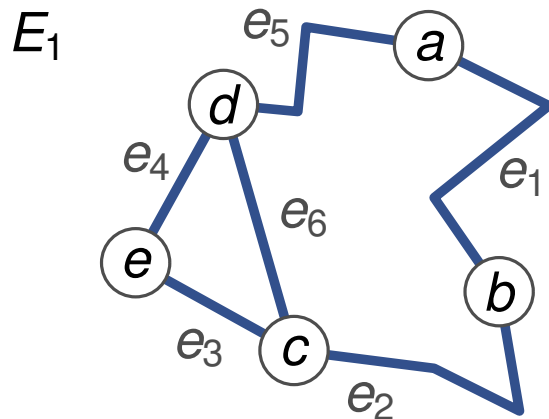


Für E_1 und E_2 ist für **jeden** Knoten die **zyklische Ordnung** der inzidenten Kanten gleich:

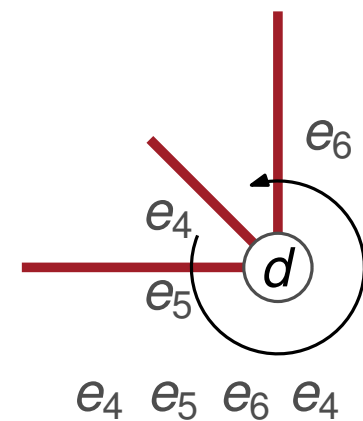
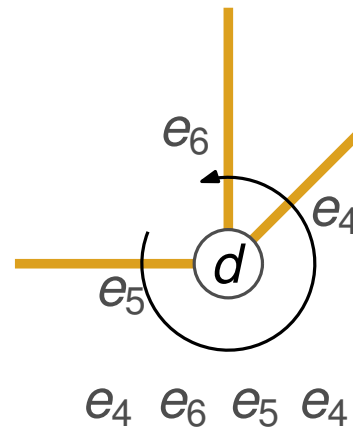
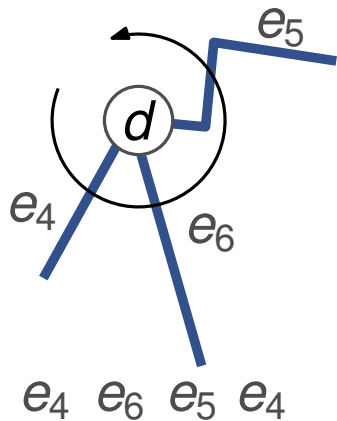


Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1 , E_2 von E_3 ?



Für E_1 und E_2 ist für **jeden** Knoten die **zyklische Ordnung** der inzidenten Kanten gleich:

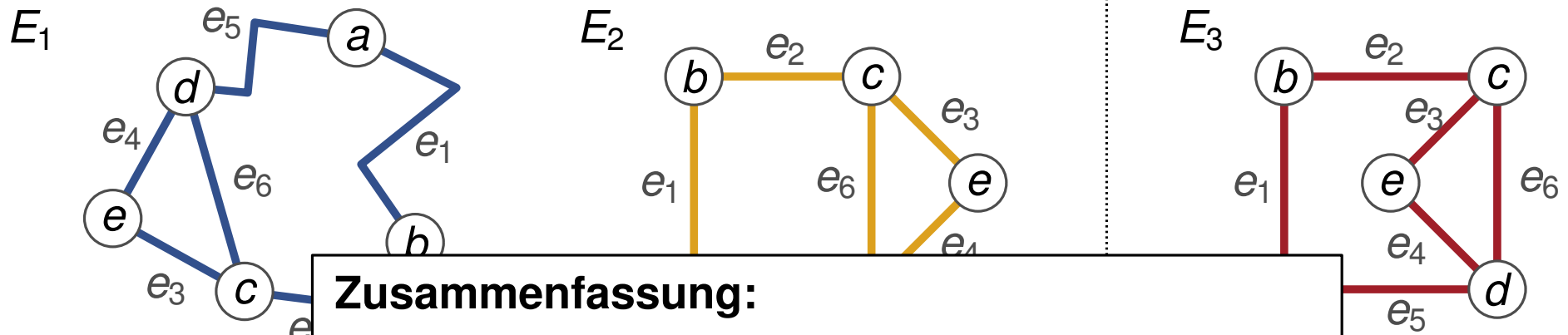


E_1 und E_2 haben dasselbe *Rotationssystem*

→ E_1 und E_2 sind *Repräsentanten* derselben *kombinatorischen Einbettung*.

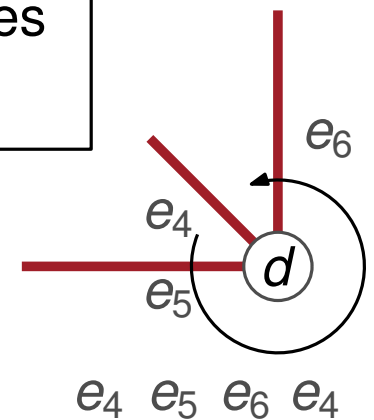
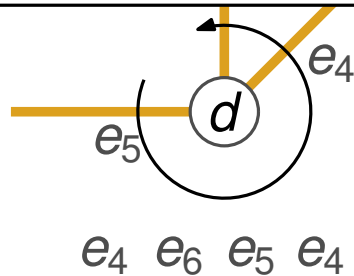
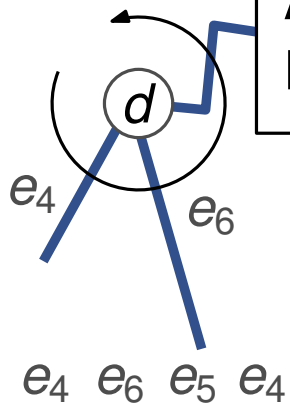
Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1 , E_2 von E_3 ?



Zusammenfassung:
 Betrachte vor allem kombinatorische Einbettung,
 und nicht geometrische Einbettung.
Aber: Gebe diese üblicherweise mithilfe eines
 Repräsentanten an.

Für E_1 und E_2 ist die
 Einbettung der inzidenz

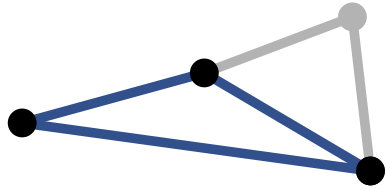


E_1 und E_2 haben dasselbe *Rotationssystem*

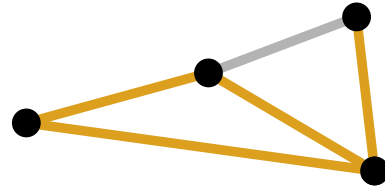
→ E_1 und E_2 sind *Repräsentanten* derselben *kombinatorischen Einbettung*.

Minorenbildung

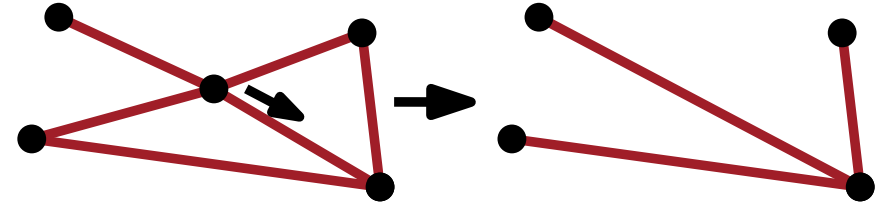
Ein ungerichteter Graph H ist ein **Minor** von $G = (V, E)$, falls man H aus G erhalten kann, indem man:



1) Knoten löscht



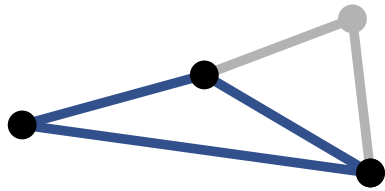
2) Kanten löscht



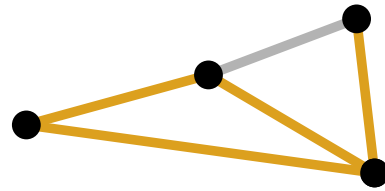
3) Kanten kontrahiert.

Minorenbildung

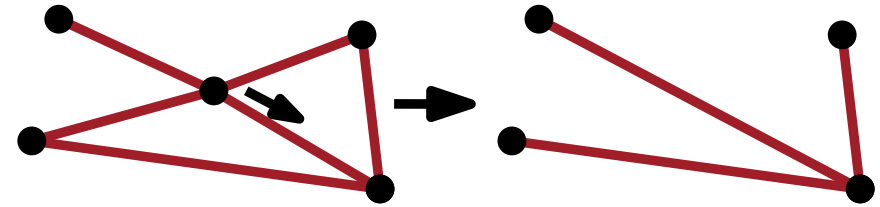
Ein ungerichteter Graph H ist ein **Minor** von $G = (V, E)$, falls man H aus G erhalten kann, indem man:



1) Knoten löscht



2) Kanten löscht

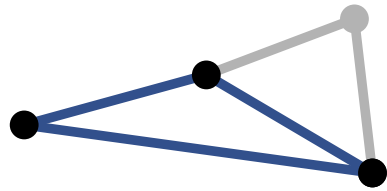


3) Kanten kontrahiert.

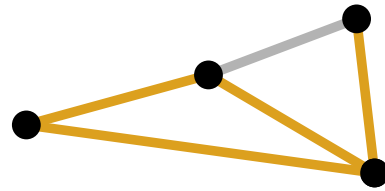
Planare Graphen sind unter Minorenbildung abgeschlossen!

Minorenbildung

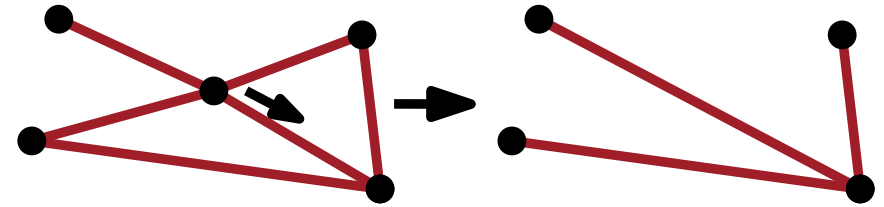
Ein ungerichteter Graph H ist ein **Minor** von $G = (V, E)$, falls man H aus G erhalten kann, indem man:



1) Knoten löscht



2) Kanten löscht



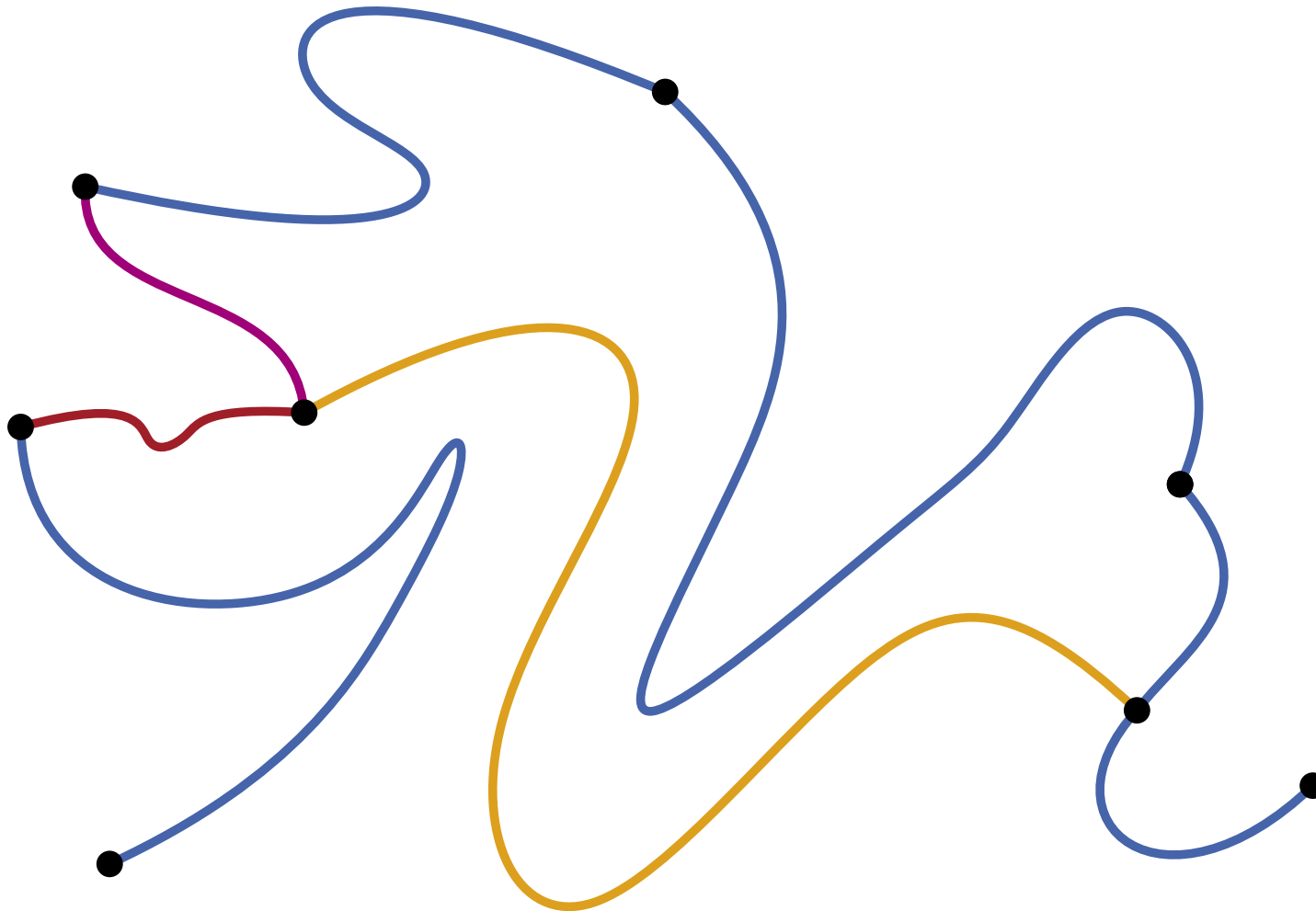
3) Kanten kontrahiert.



Planare Graphen sind unter Minorenbildung abgeschlossen!

Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

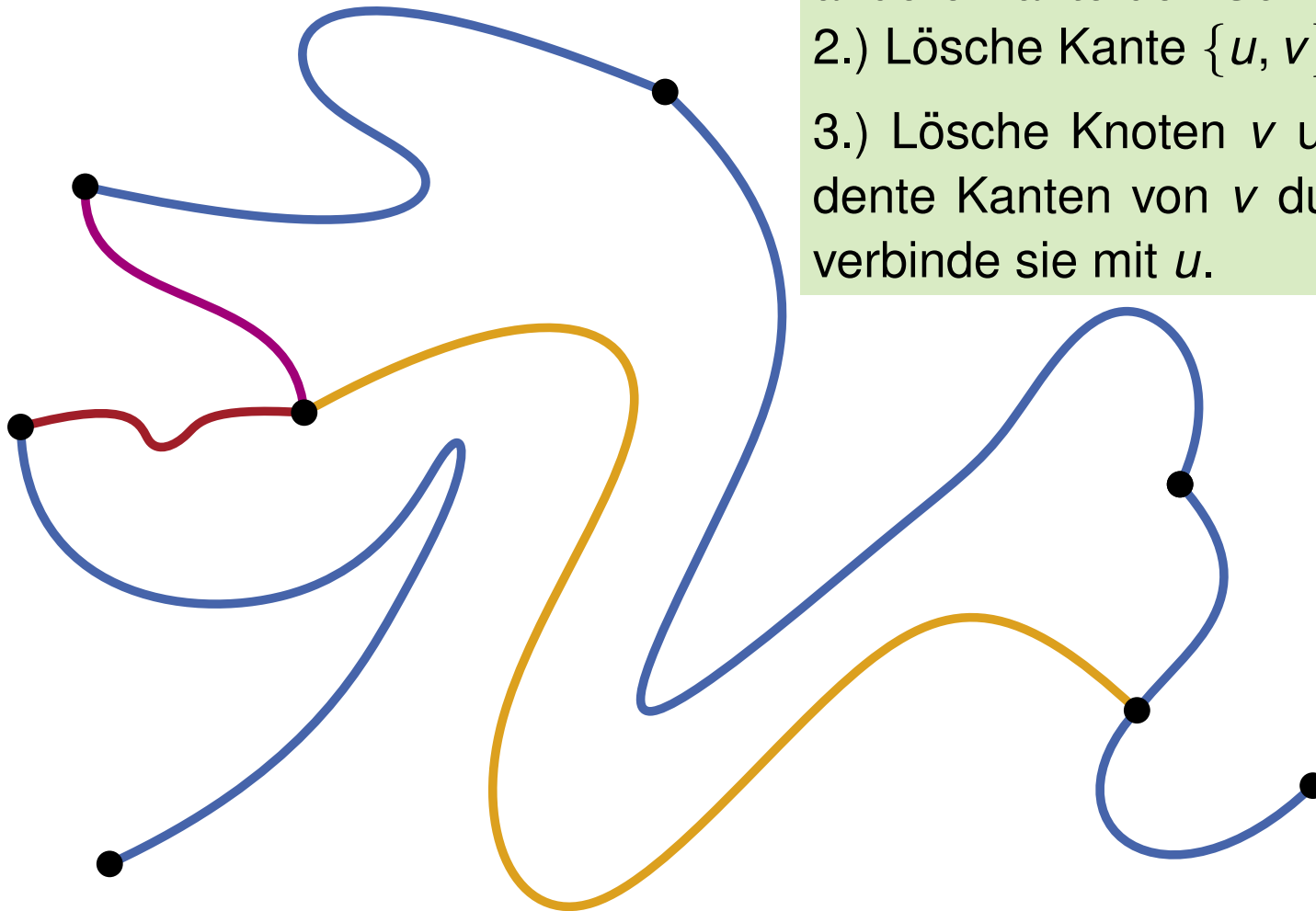
Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.



Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.

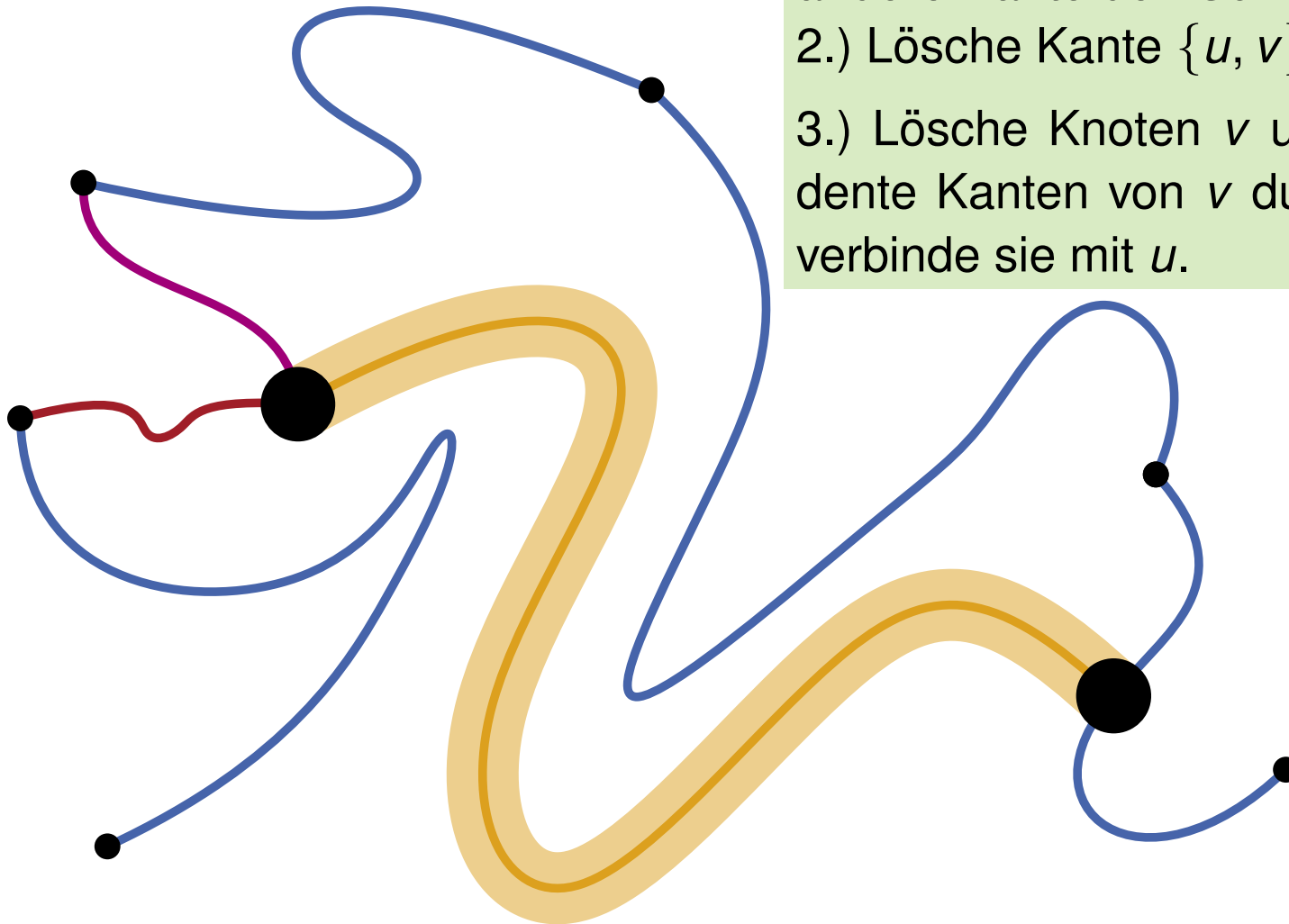
- 1.) Lege ϵ -Schlauch um $\{u, v\}$, sodass keine andere Kante den Schlauch schneidet.
- 2.) Lösche Kante $\{u, v\}$
- 3.) Lösche Knoten v und führe restliche inzidente Kanten von v durch den Schlauch und verbinde sie mit u .



Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.

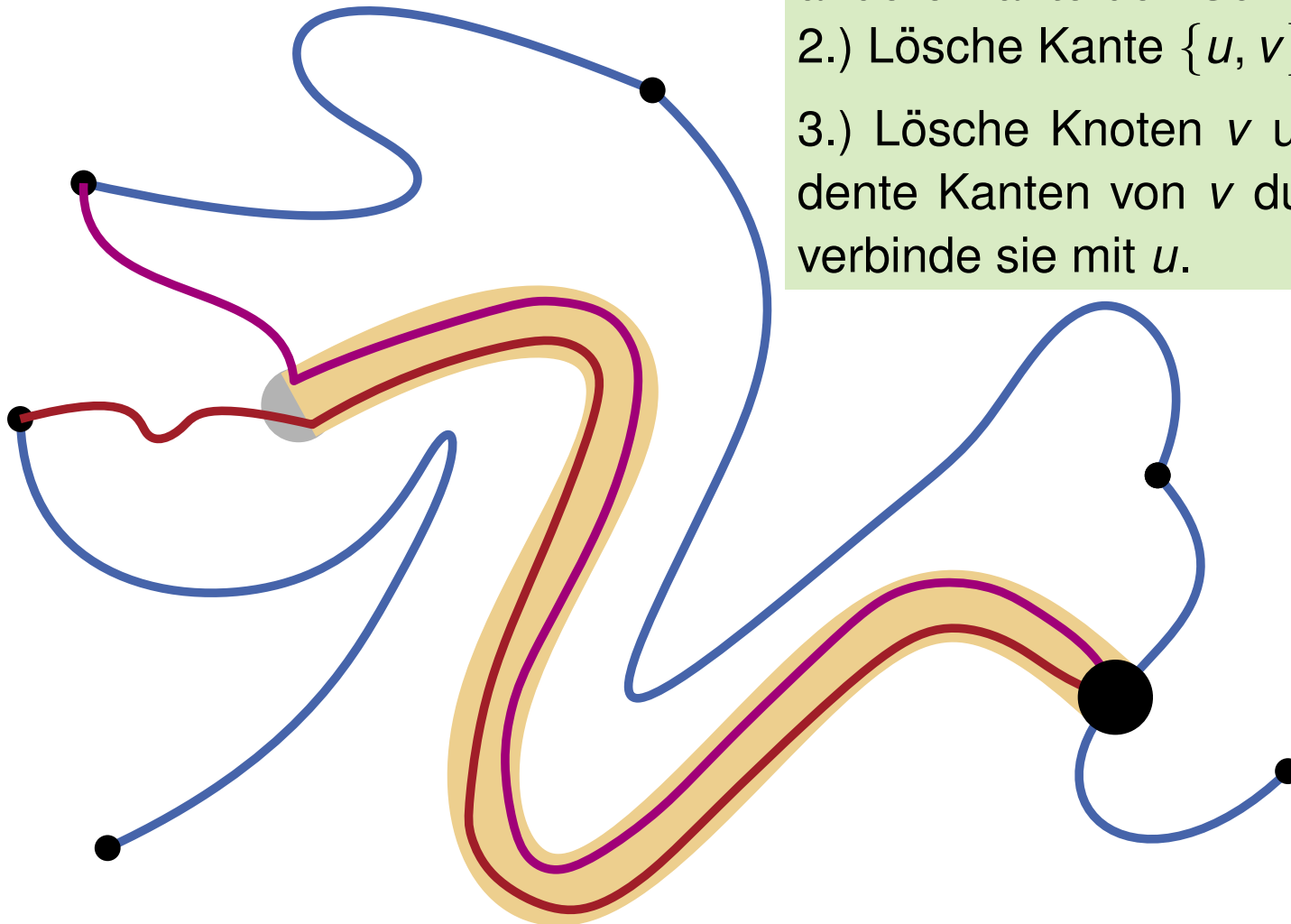
- 1.) Lege ϵ -Schlauch um $\{u, v\}$, sodass keine andere Kante den Schlauch schneidet.
- 2.) Lösche Kante $\{u, v\}$
- 3.) Lösche Knoten v und führe restliche inzidente Kanten von v durch den Schlauch und verbinde sie mit u .



Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.

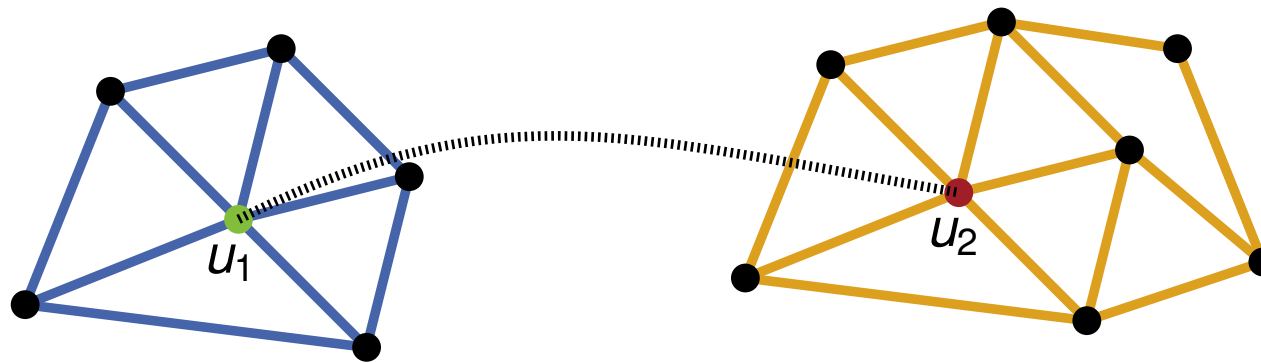
- 1.) Lege ϵ -Schlauch um $\{u, v\}$, sodass keine andere Kante den Schlauch schneidet.
- 2.) Lösche Kante $\{u, v\}$
- 3.) Lösche Knoten v und führe restliche inzidente Kanten von v durch den Schlauch und verbinde sie mit u .



Äußere Facette

Gegeben planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, sowie zwei Knoten $u_1 \in V_1$ und $u_2 \in V_2$:

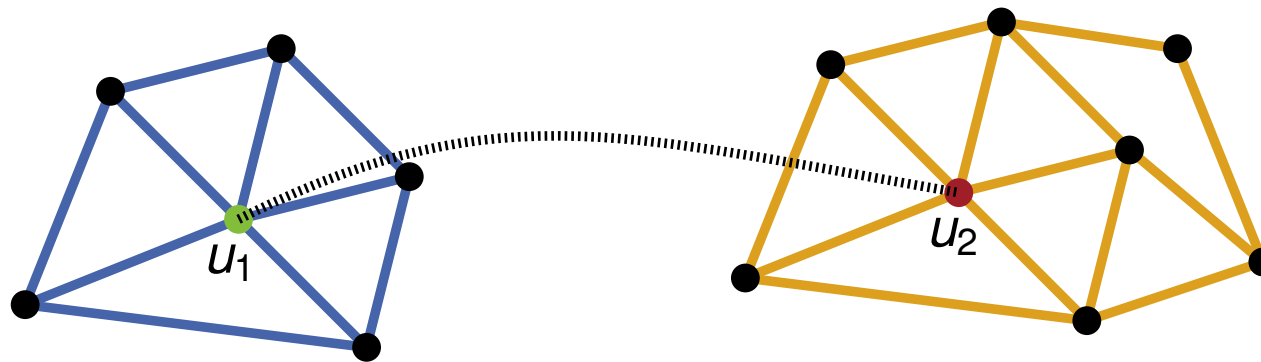
Ist $G_{1,2} = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u_1, u_2\}\})$ ebenfalls planar?



Äußere Facette

Gegeben planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, sowie zwei Knoten $u_1 \in V_1$ und $u_2 \in V_2$:

Ist $G_{1,2} = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u_1, u_2\}\})$ ebenfalls planar?

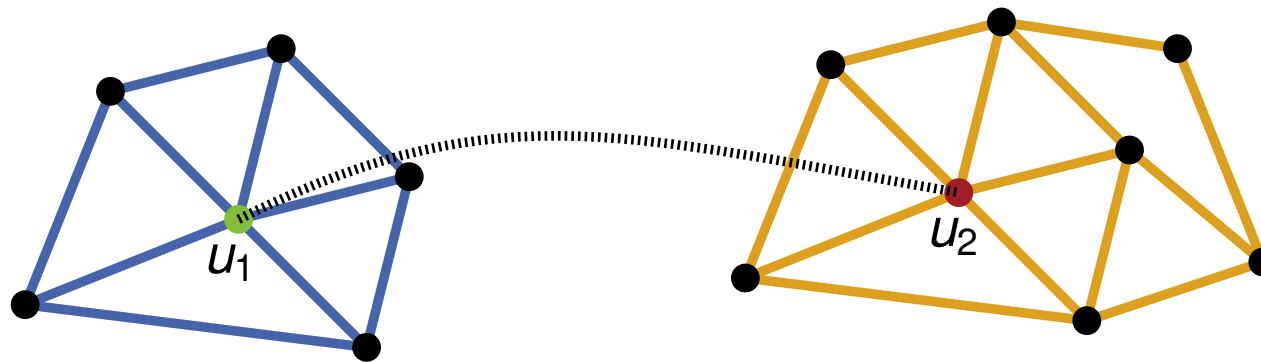


Idee: Finde planare Einbettungen von G_1 und G_2 , für welche die Knoten u_1 bzw. u_2 auf der äußeren Facette liegen.

Äußere Facette

Gegeben planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, sowie zwei Knoten $u_1 \in V_1$ und $u_2 \in V_2$:

Ist $G_{1,2} = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u_1, u_2\}\})$ ebenfalls planar?



Idee: Finde planare Einbettungen von G_1 und G_2 , für welche die Knoten u_1 bzw. u_2 auf der äußeren Facette liegen.

Lemma: Sei G ein planarer Graph und f eine beliebige Facette von G . Es gibt eine planare Einbettung von G , sodass f äußere Facette ist.

Übungsaufgaben

Definition: Der n -dimensionale Würfel Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.

1. Wieviele Knoten hat Q_n ? Wieviele Kanten hat Q_n ?
2. Beschreiben Sie die Knotengrade der Knoten im Q_n .
3. Betten Sie Q_1 , Q_2 , Q_3 und Q_4 (wenn möglich kreuzungsfrei) in die Ebene ein.
4. Betten Sie Q_4 kreuzungsfrei auf der Oberfläche eines Torus ein.

Aufgabe 2

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i , $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G . Nummeriere die Facetten so, dass die Folge (a_1, a_2, \dots, a_f) nichtabsteigend sortiert ist.

Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

Aufgabe 3

Die *Skewness* eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus G gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist. D.h. die *Skewness* eines Graphen ist Null genau dann, wenn der Graph planar ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen einfachen Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt:

$$\text{skewness}(G) \geq m - 3n + 6.$$

2. Berechnen Sie die *Skewness* von K_3 , K_5 , $K_{3,3}$ und K_6 .

Aufgabe 4

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G mit n Knoten:

1. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei.
2. G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.
3. G ist kreisfrei und hat $n - 1$ Kanten.