

Algorithmen für Planare Graphen

Übung am 23.05.2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

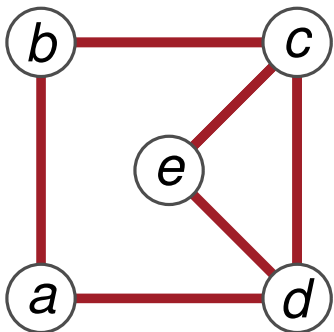


3. Übungsblatt

Aufgabe 1

- a) Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung \mathcal{G}' findet.

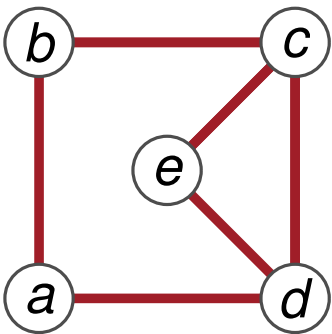
Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.



Aufgabe 1

- a) Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung \mathcal{G}' findet.

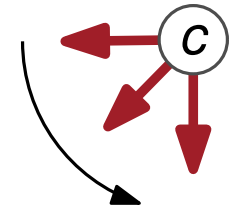
Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.



Datenstruktur:

Liste aller Knoten: $(a) \leftrightarrow (b) \leftrightarrow (c) \leftrightarrow (e) \leftrightarrow (d)$

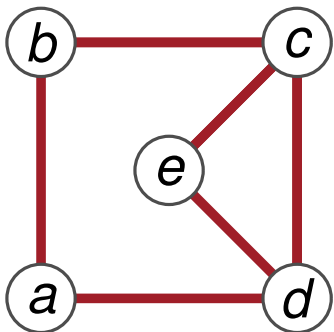
Knoten: Liste gerichteter Kanten entgegen des Uhrzeigersinns.



Aufgabe 1

- a) Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung \mathcal{G}' findet.

Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.

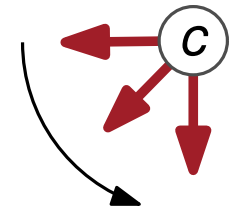


Datenstruktur:

Liste aller Knoten: $(a) \leftrightarrow (b) \leftrightarrow (c) \leftrightarrow (e) \leftrightarrow (d)$

Knoten: Liste gerichteter Kanten entgegen des Uhrzeigersinns.

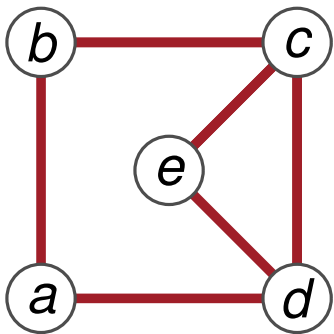
- Kante:
- Zeiger auf entgegengerichtete Kante.
 - Zeiger auf Ursprungsknoten



Aufgabe 1

a) Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung \mathcal{G}' findet.

Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.



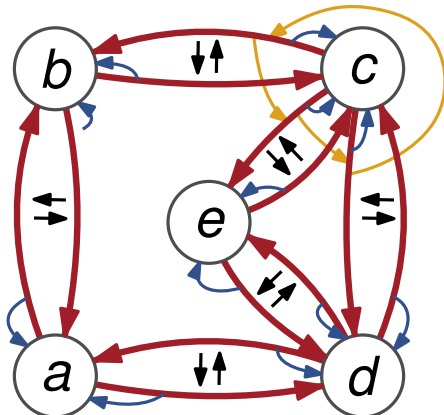
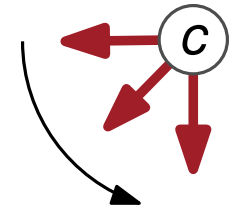
Datenstruktur:

Liste aller Knoten: $(a) \leftrightarrow (b) \leftrightarrow (c) \leftrightarrow (e) \leftrightarrow (d)$

Knoten: Liste gerichteter Kanten entgegen des Uhrzeigersinns.

Kante:

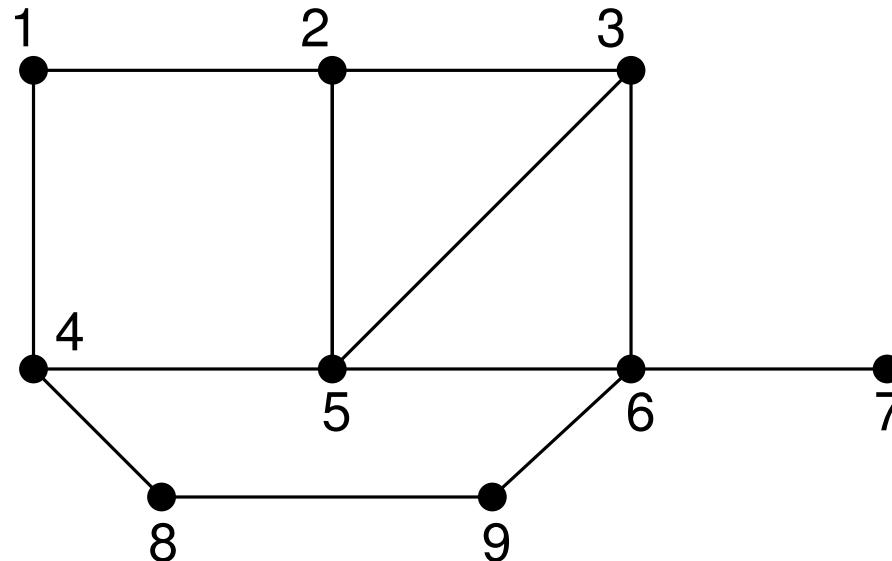
- Zeiger auf entgegengerichtete Kante.
- Zeiger auf Ursprungsknoten



Aufgabe 1

Führen Sie Ihren Algorithmus an folgenden Beispielgraphen aus und nummerieren Sie jeweils die von Ihrem Algorithmus eingefügten Kanten in der Reihenfolge, in der Ihr Algorithmus sie einfügt.

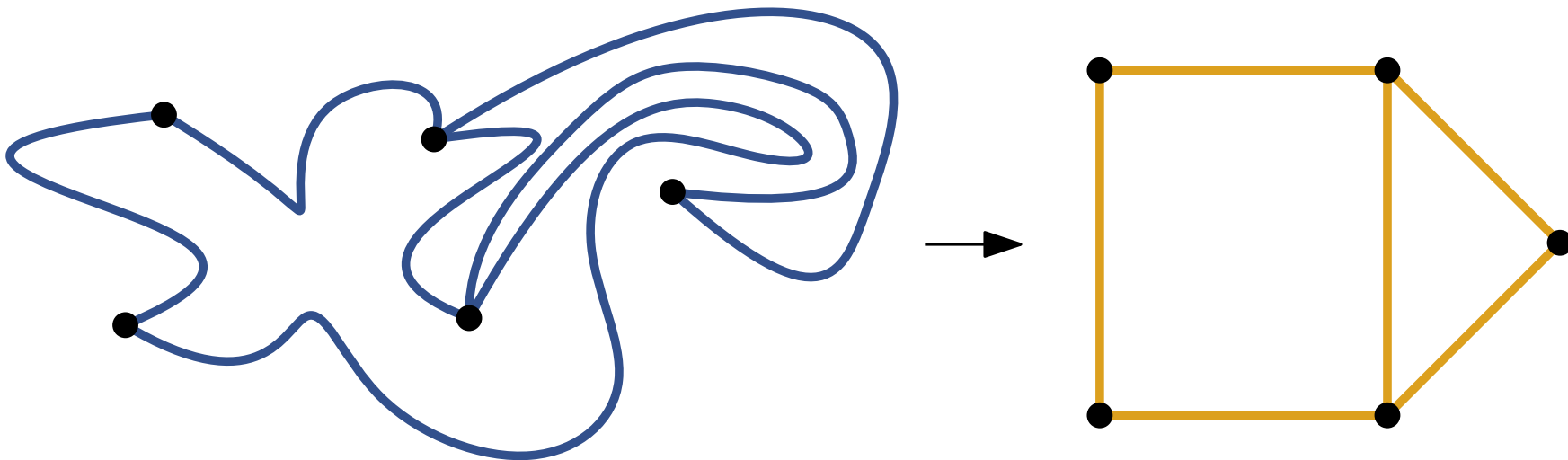
- a) $K_{1,2}$
- b) $K_{1,3}$
- c) Q_2
- d) G_1



Aufgabe 2

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist.

Zeigen Sie: G besitzt eine planare Zeichnung, in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.



Aufgabe 3

a) Zeigen oder widerlegen Sie:

- In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$.
- Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?

Aufgabe 3

a) **Zeigen oder widerlegen Sie:**

- In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$.
- Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?

b) **Zeigen oder widerlegen Sie:** In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit $S = S_m \cup S_M$ einen gültigen Separator findet.

Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

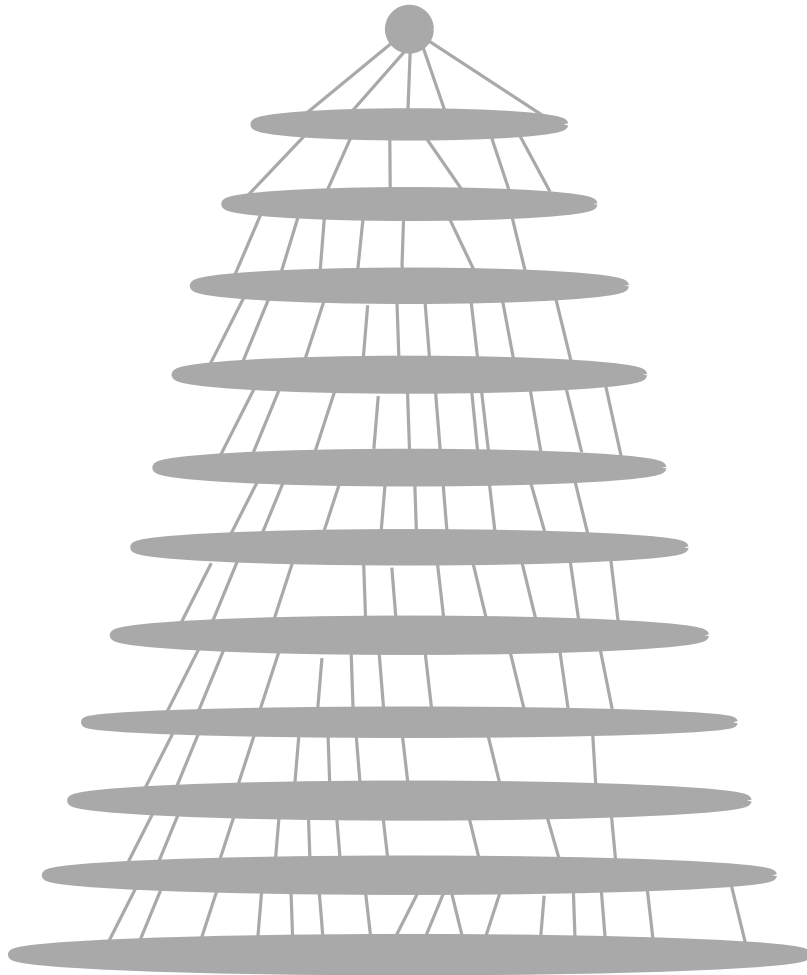
**Lipton & Tarjan
1977**

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

Beweis des Planar-Separator-Theorem

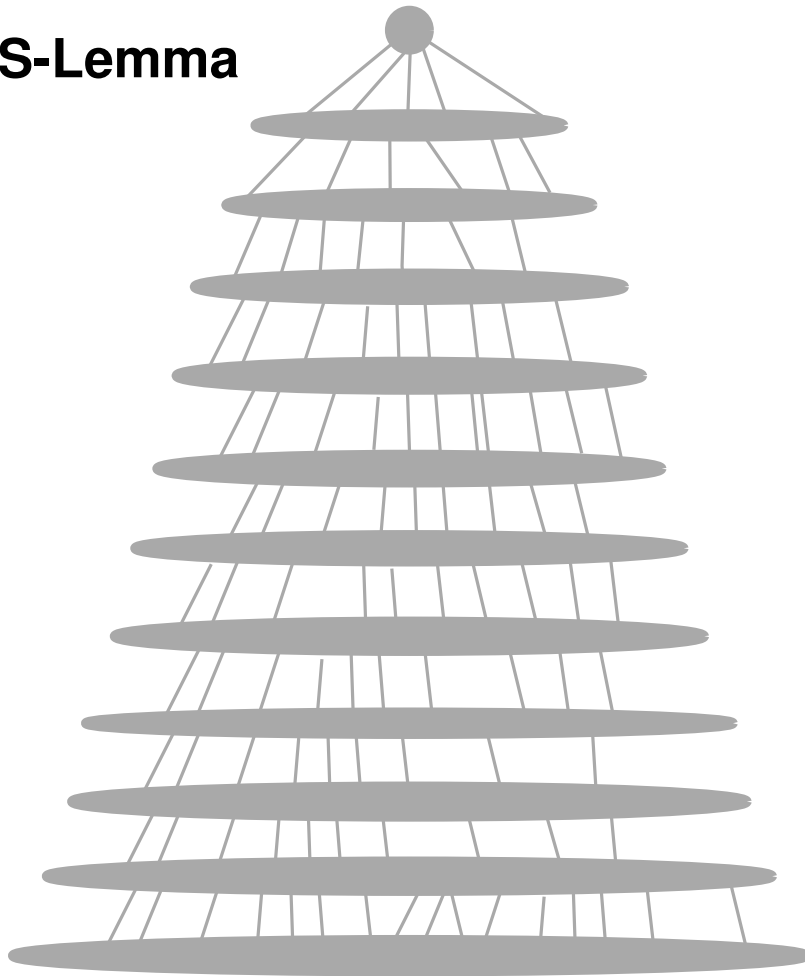
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

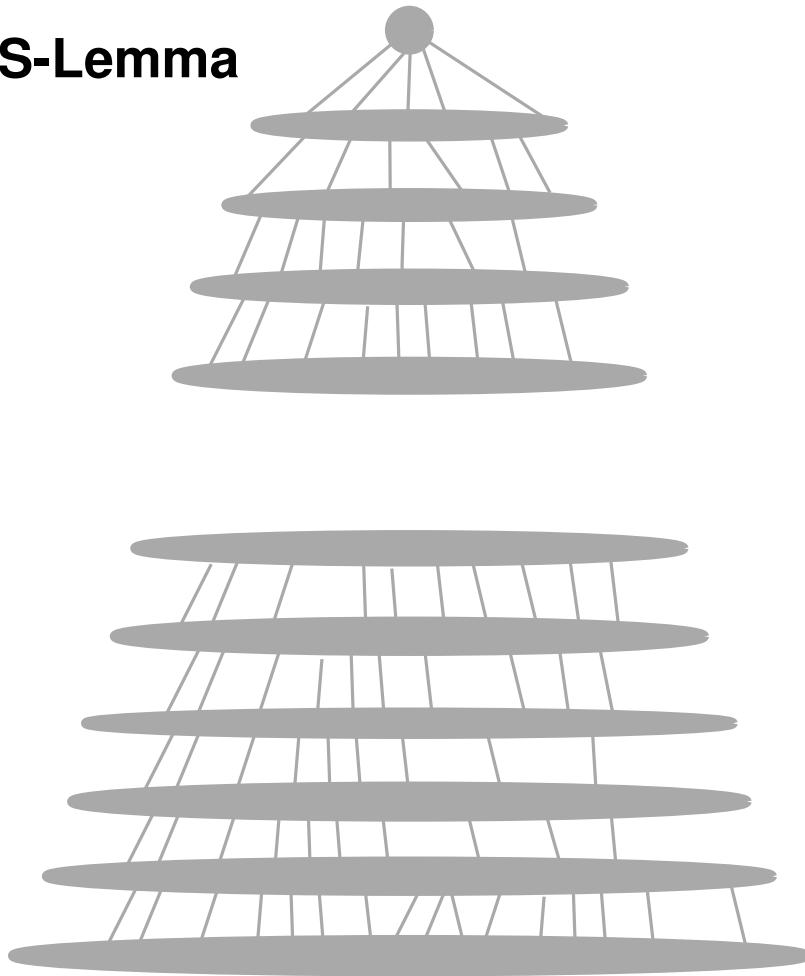
BFS-Lemma



Beweis des Planar-Separator-Theorem

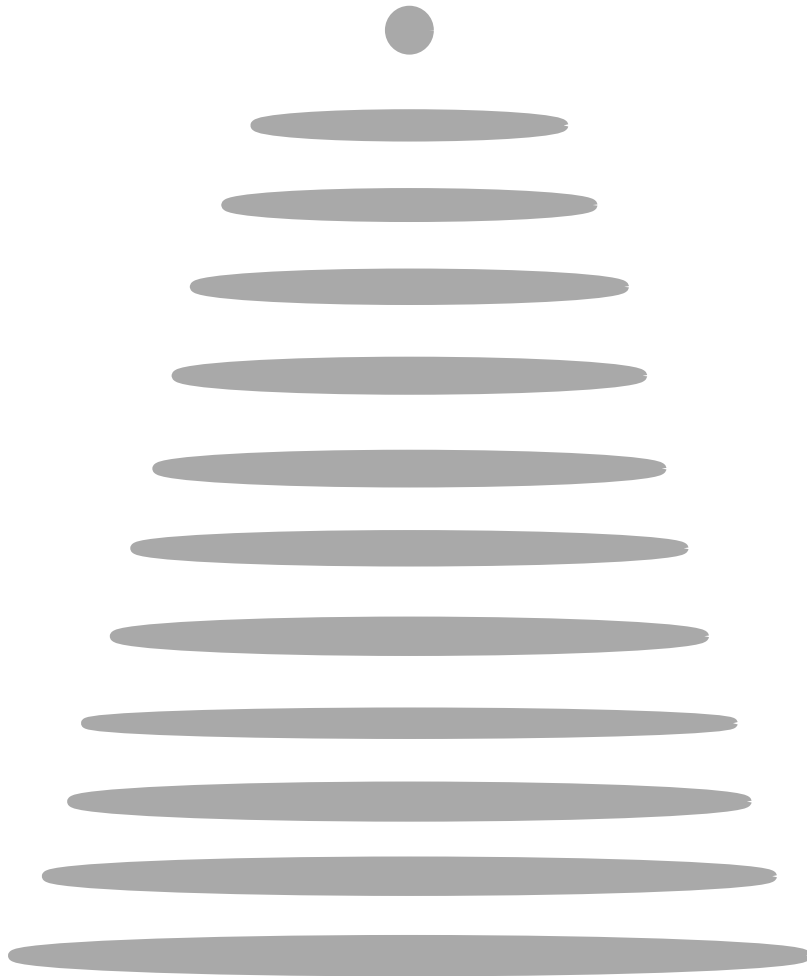
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

BFS-Lemma



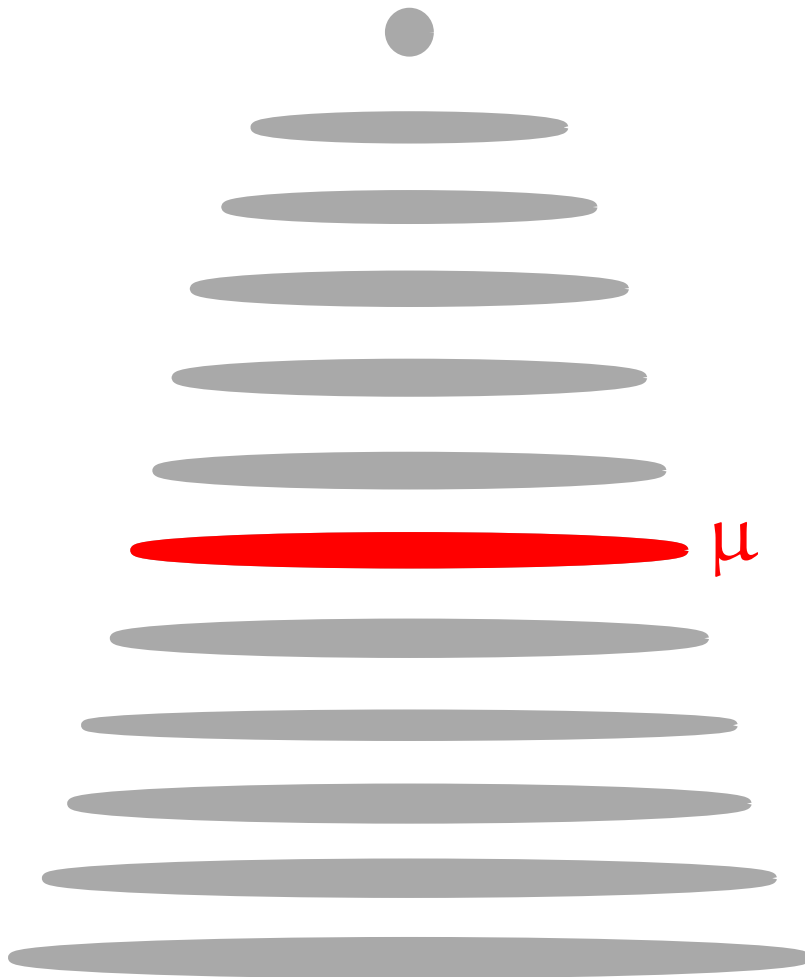
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



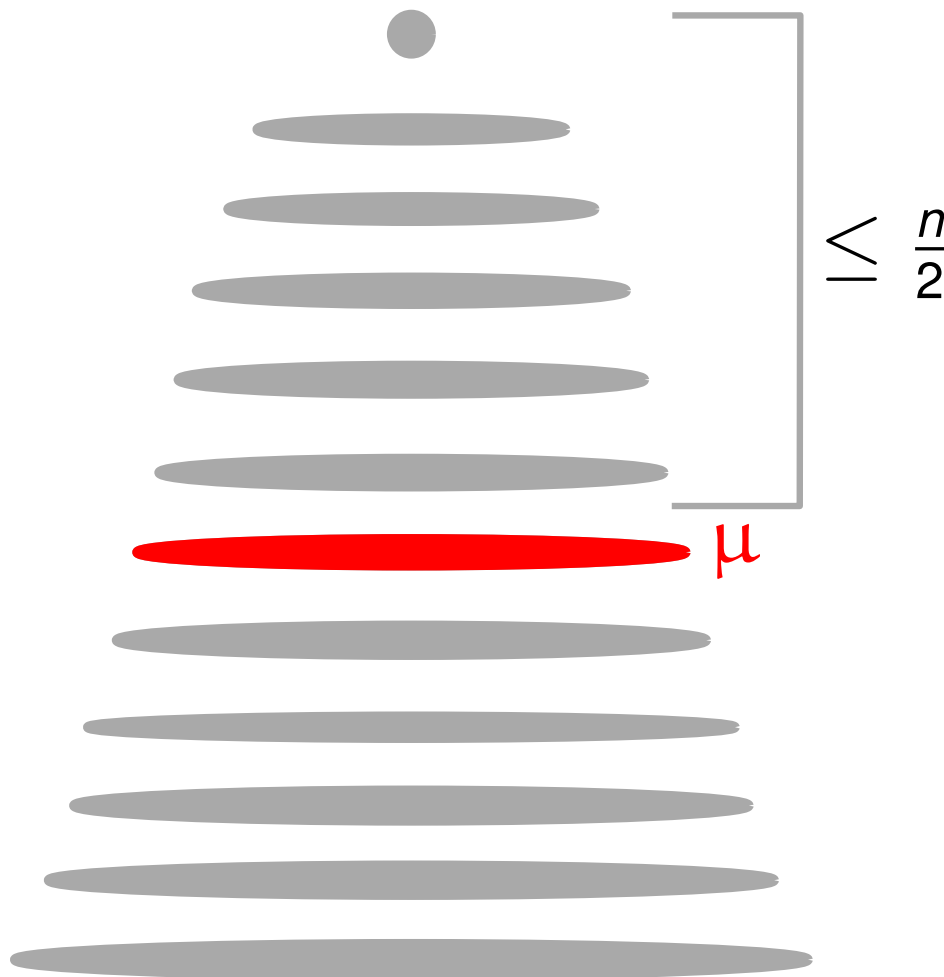
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



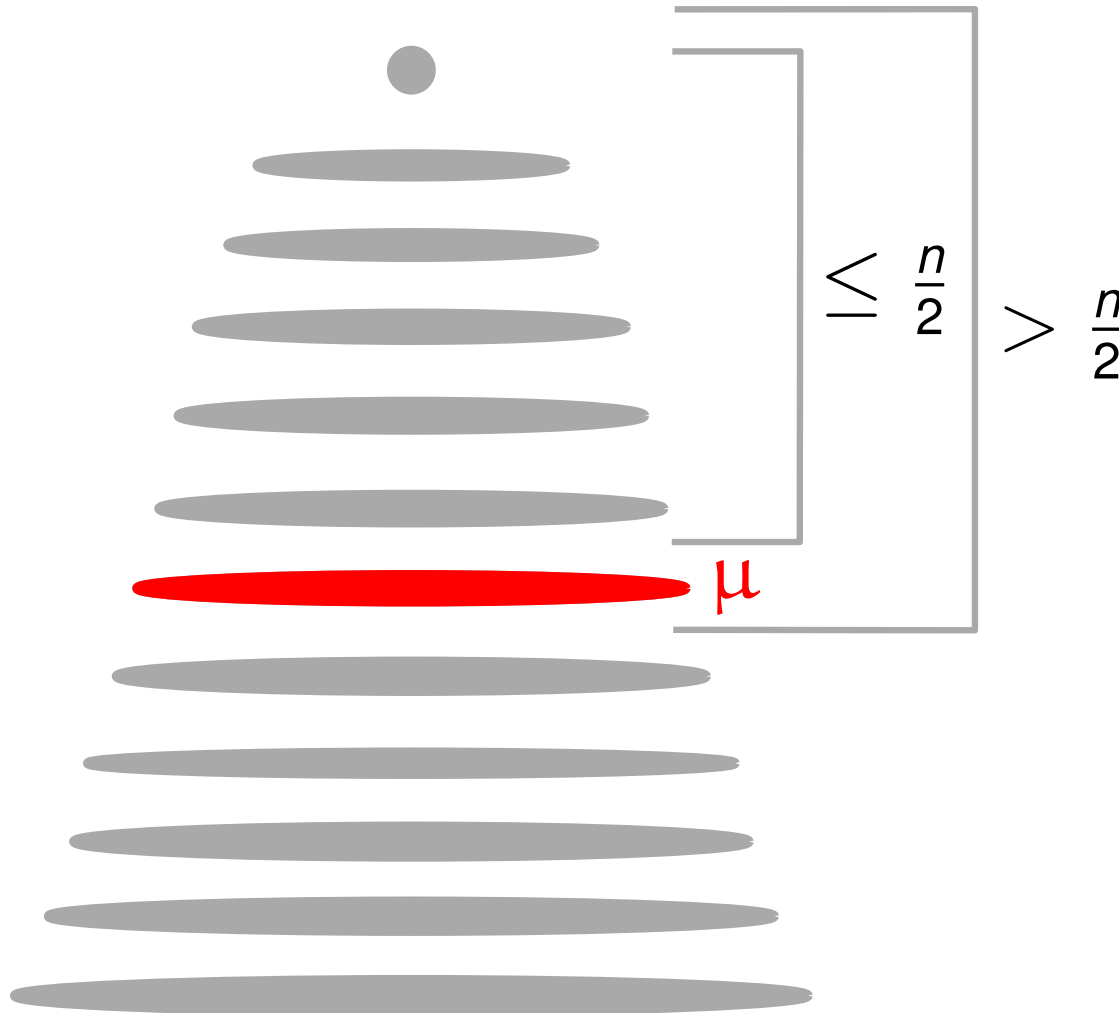
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



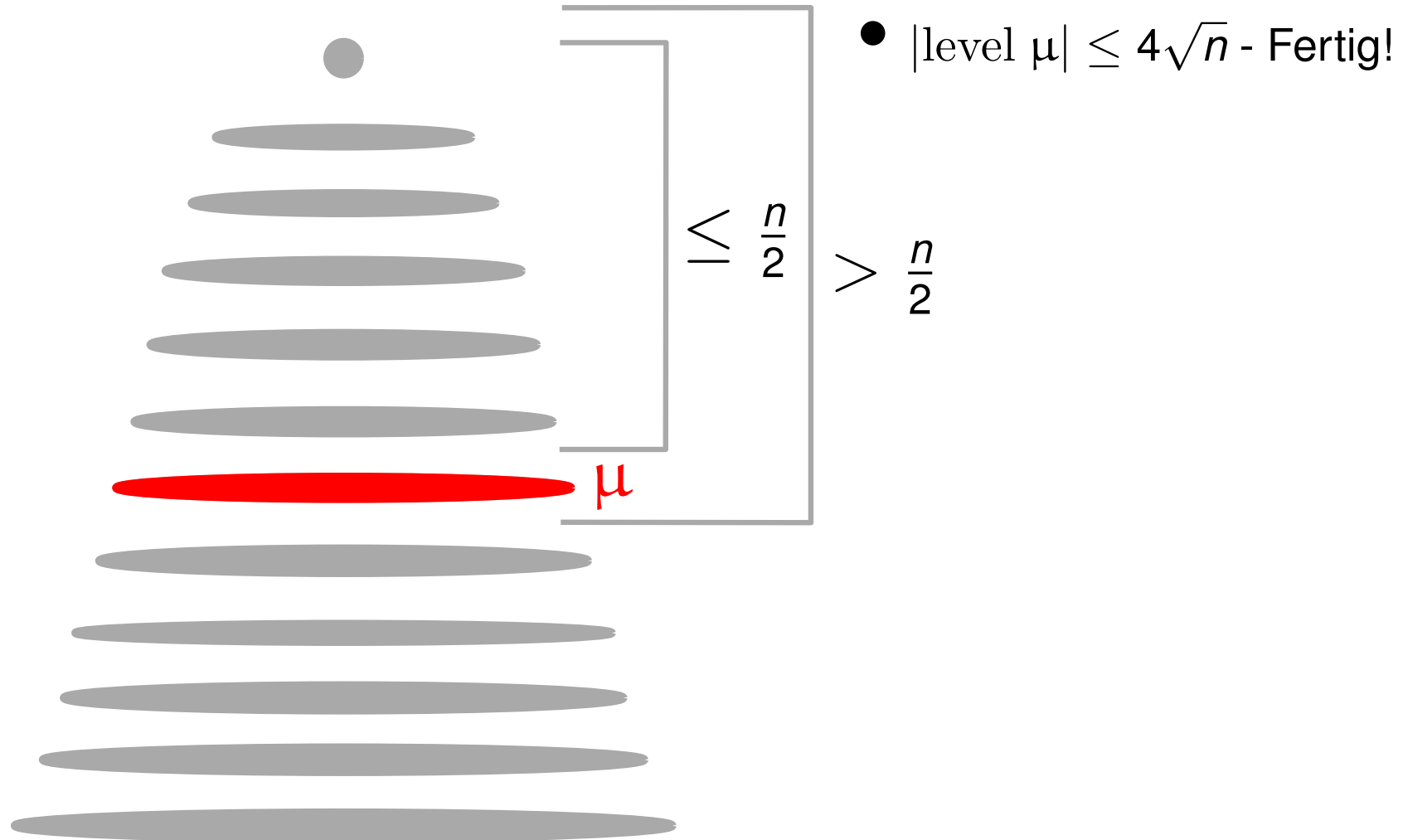
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



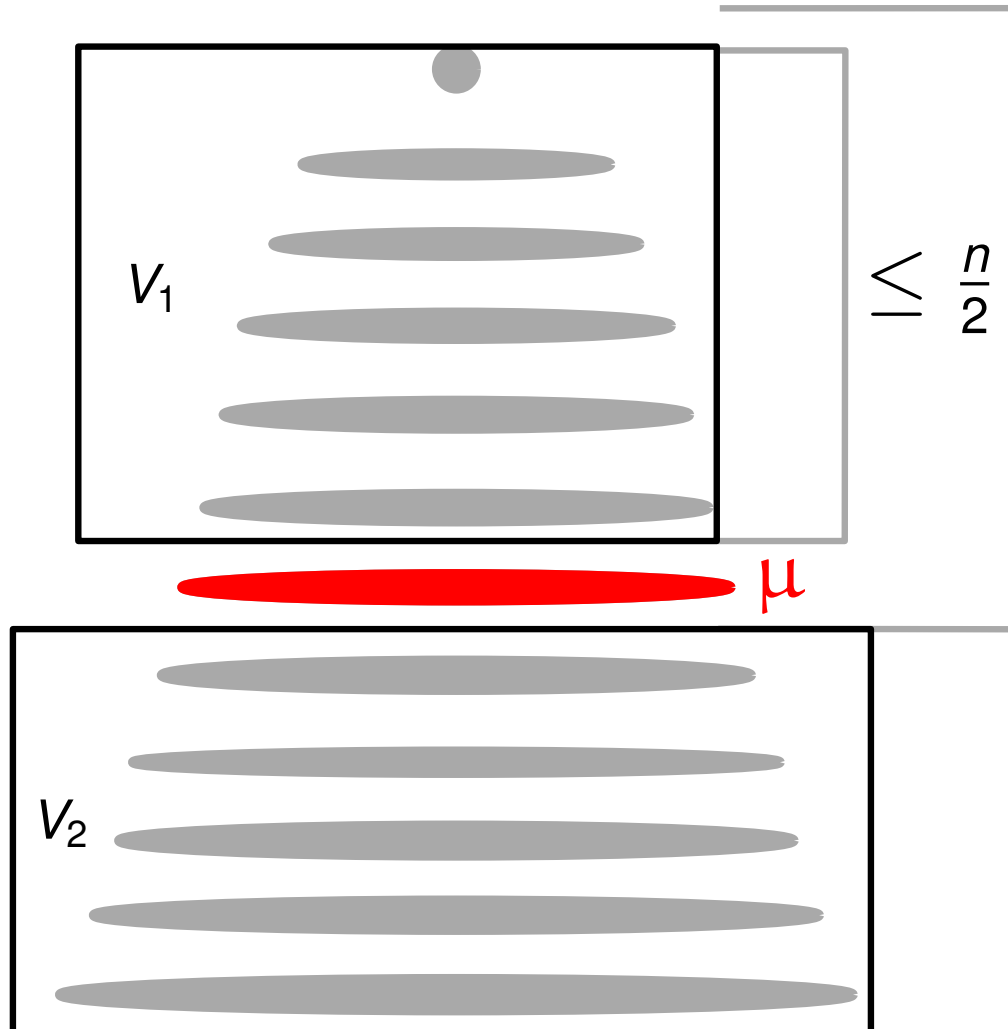
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

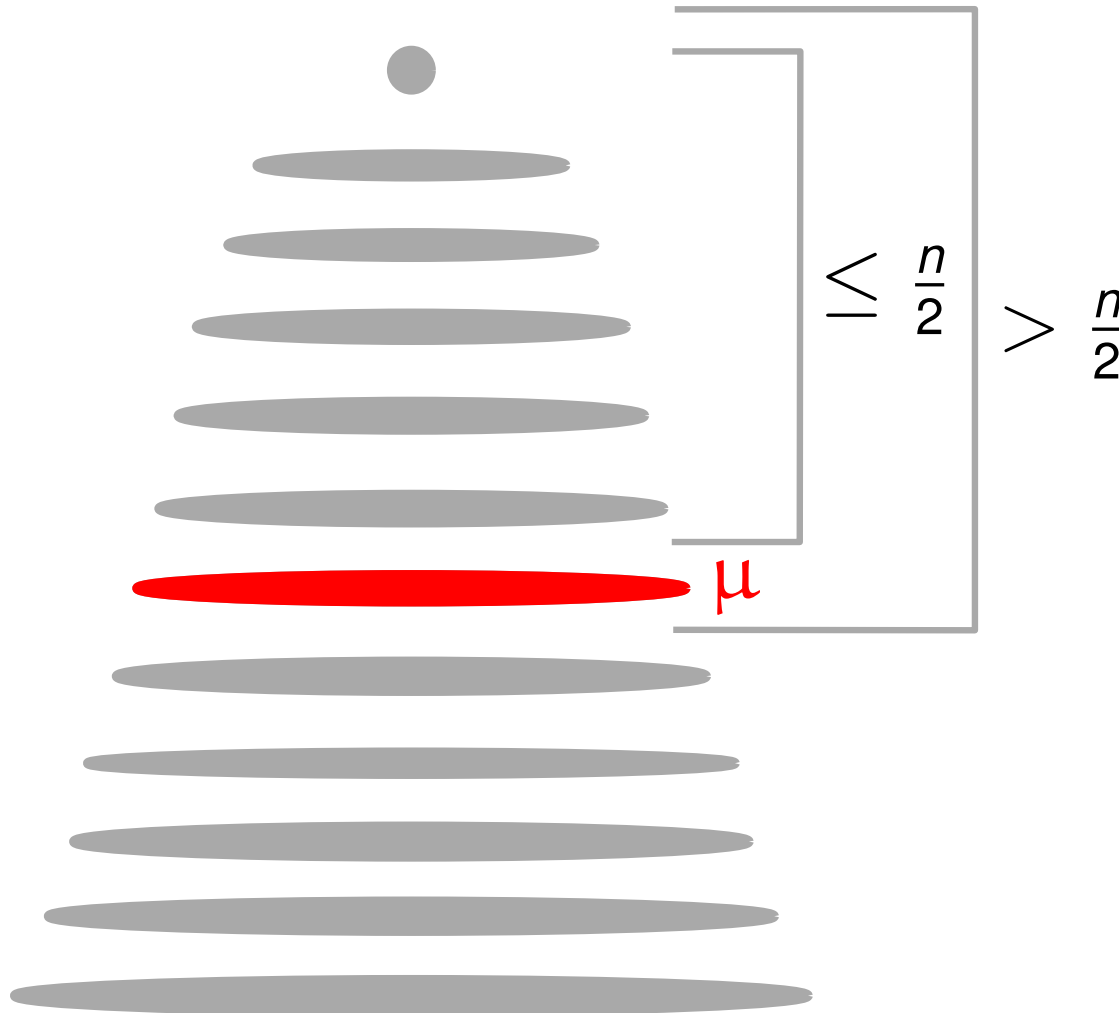
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$ - Fertig!
- Level μ ist Separator S

Beweis des Planar-Separator-Theorem

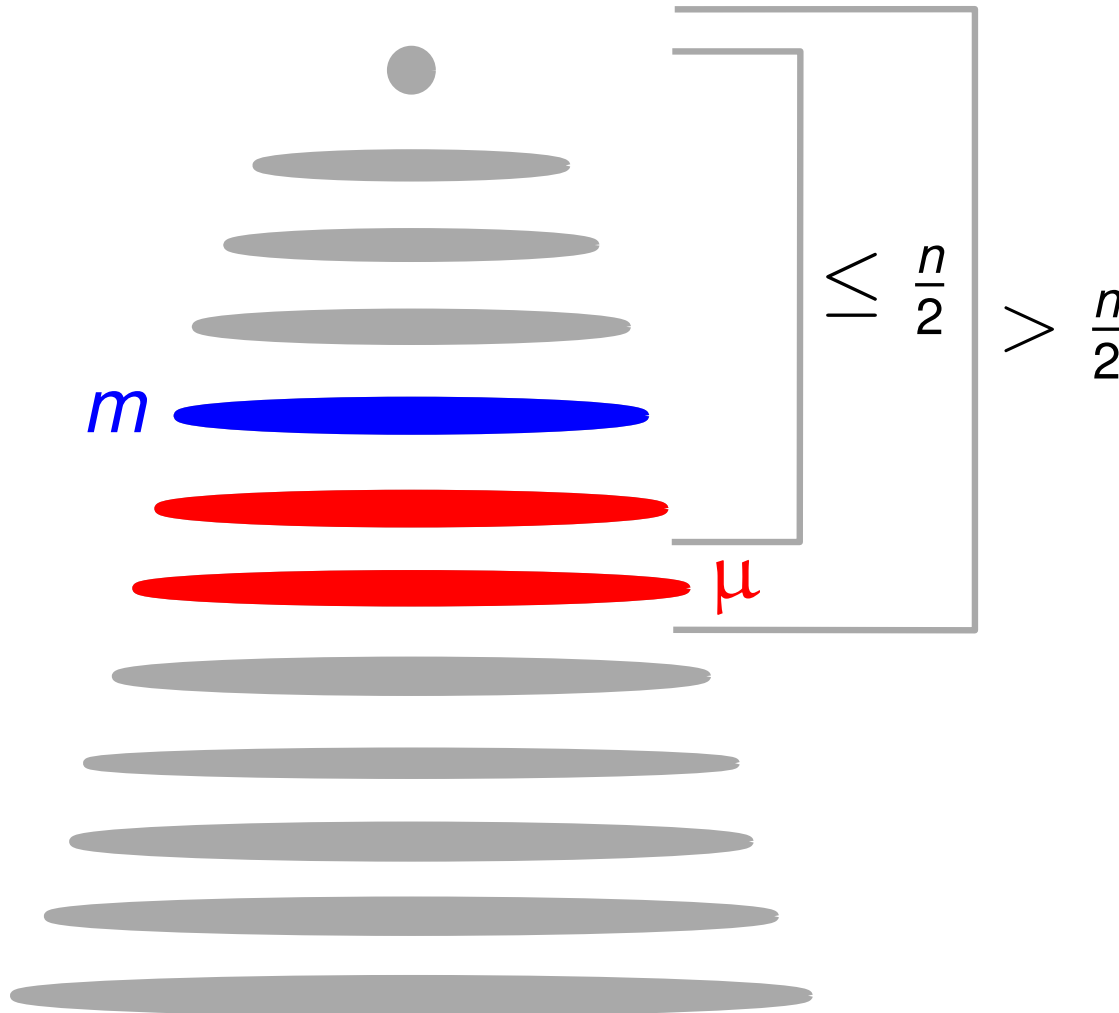
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

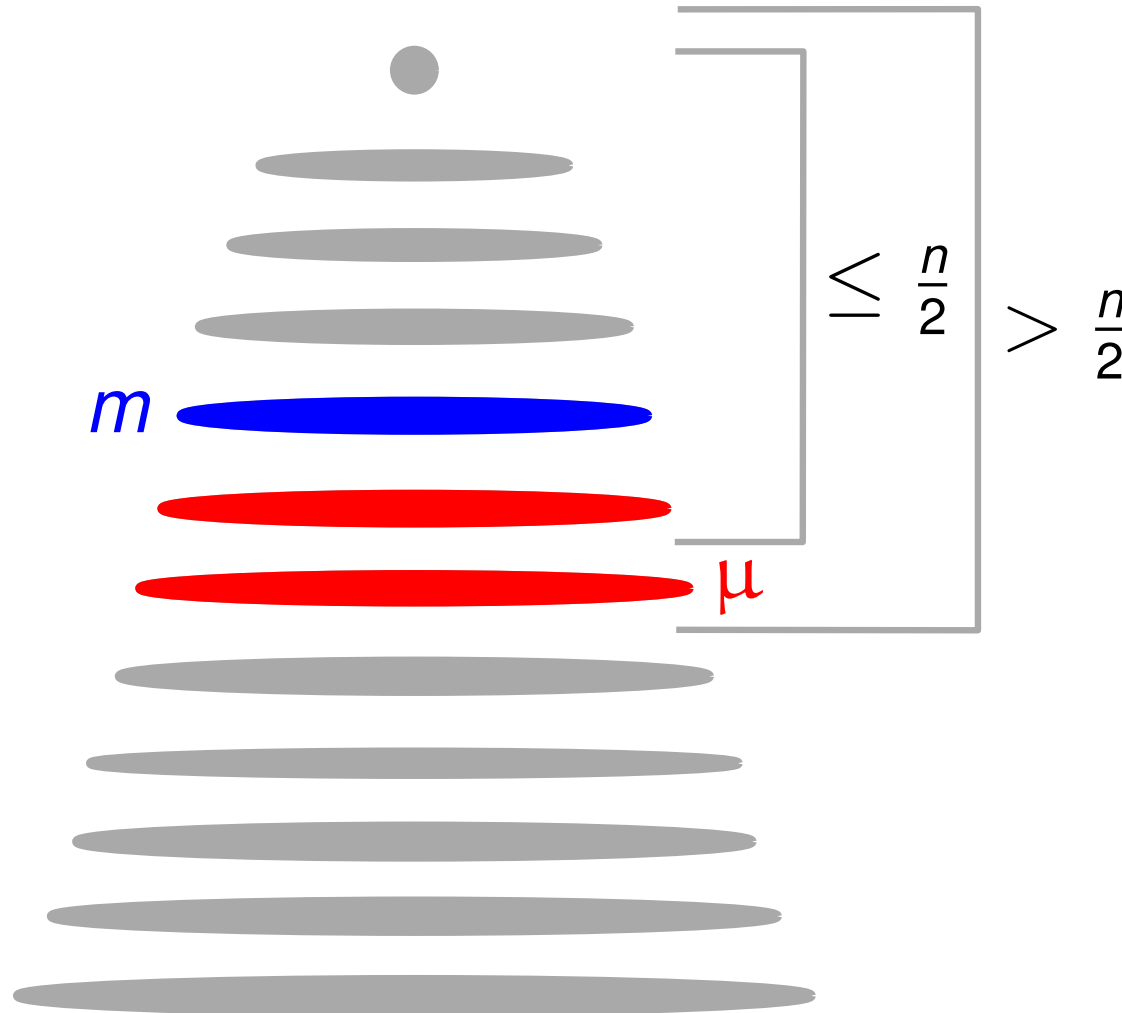
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

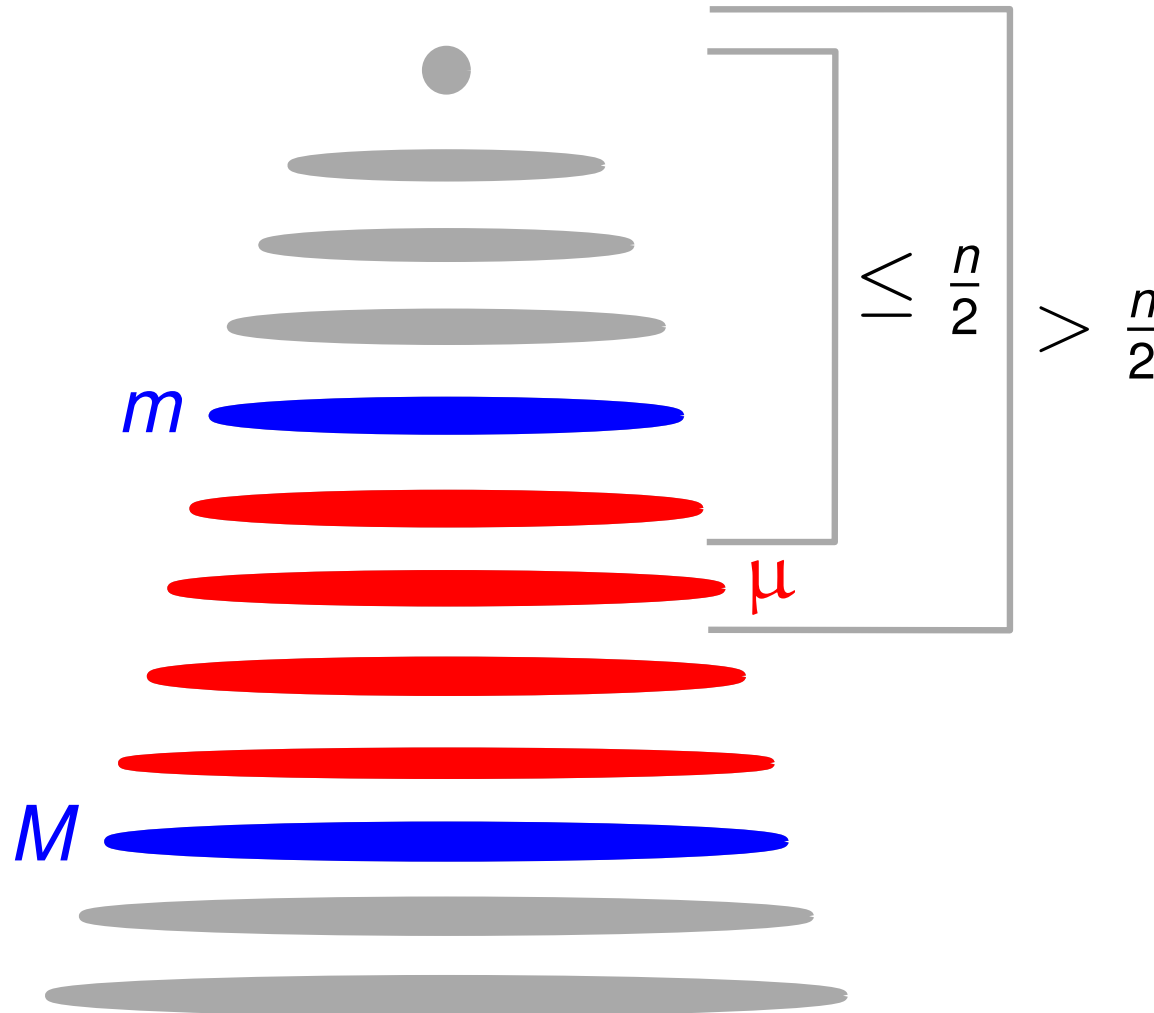
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

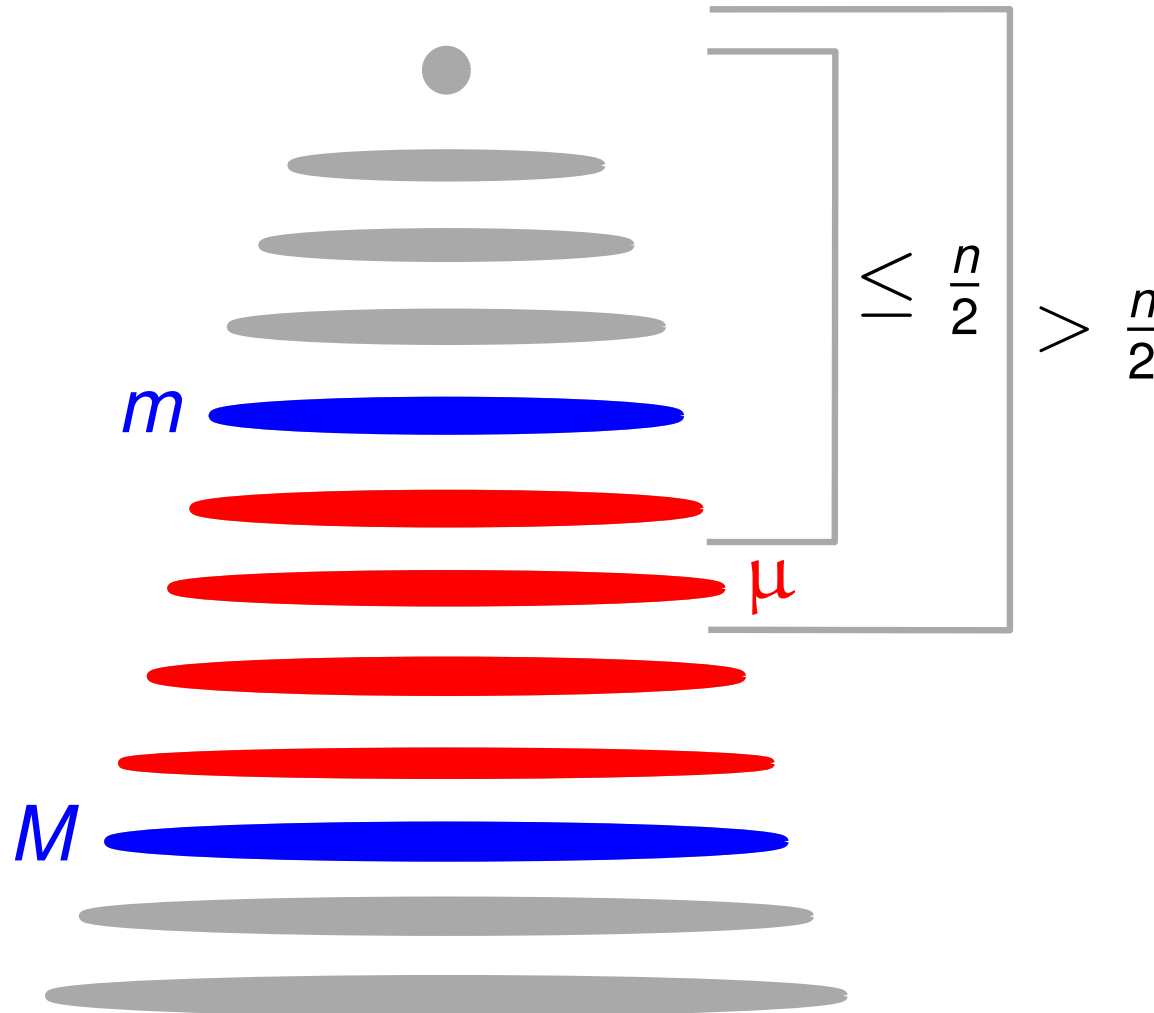
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

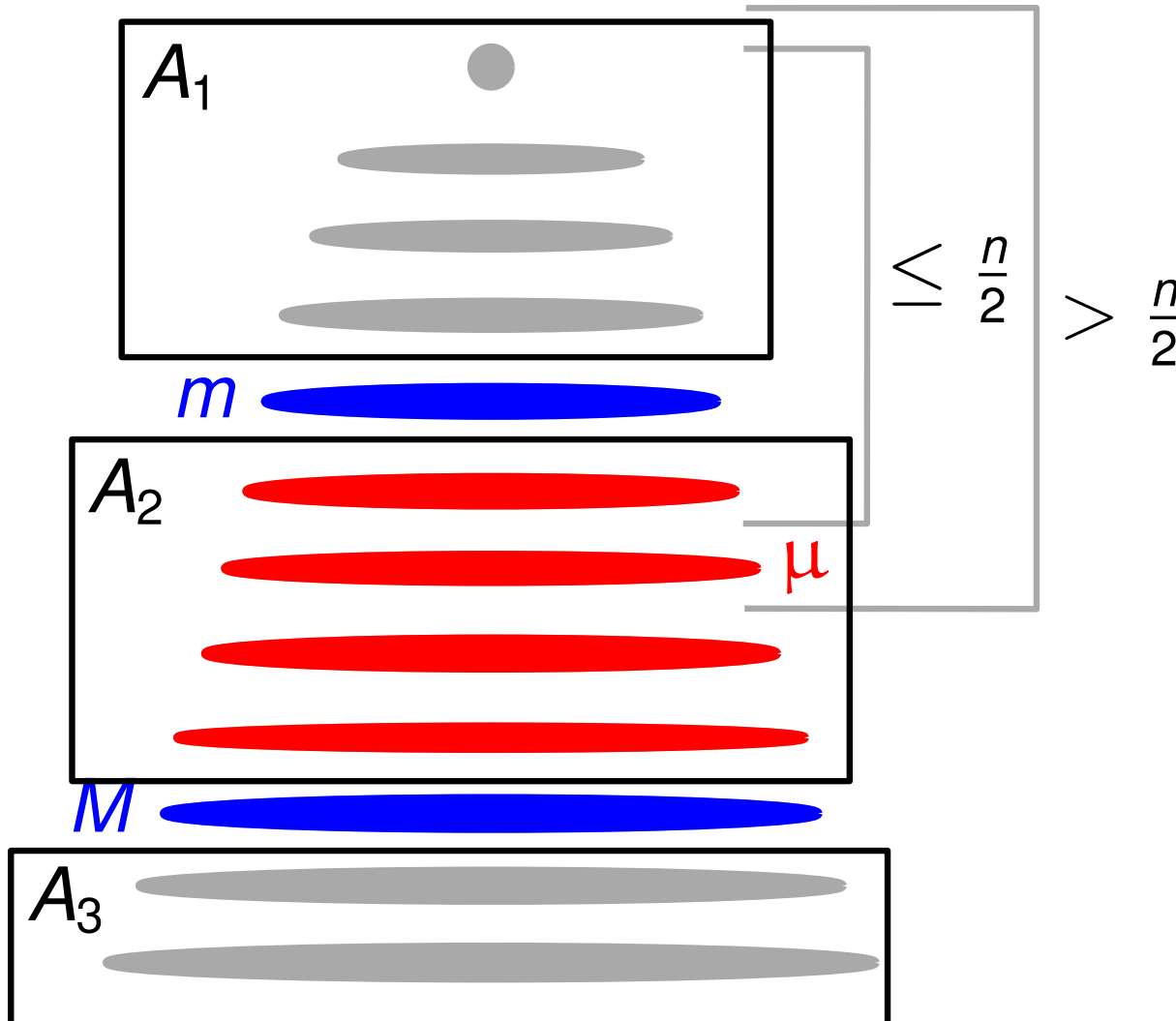
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

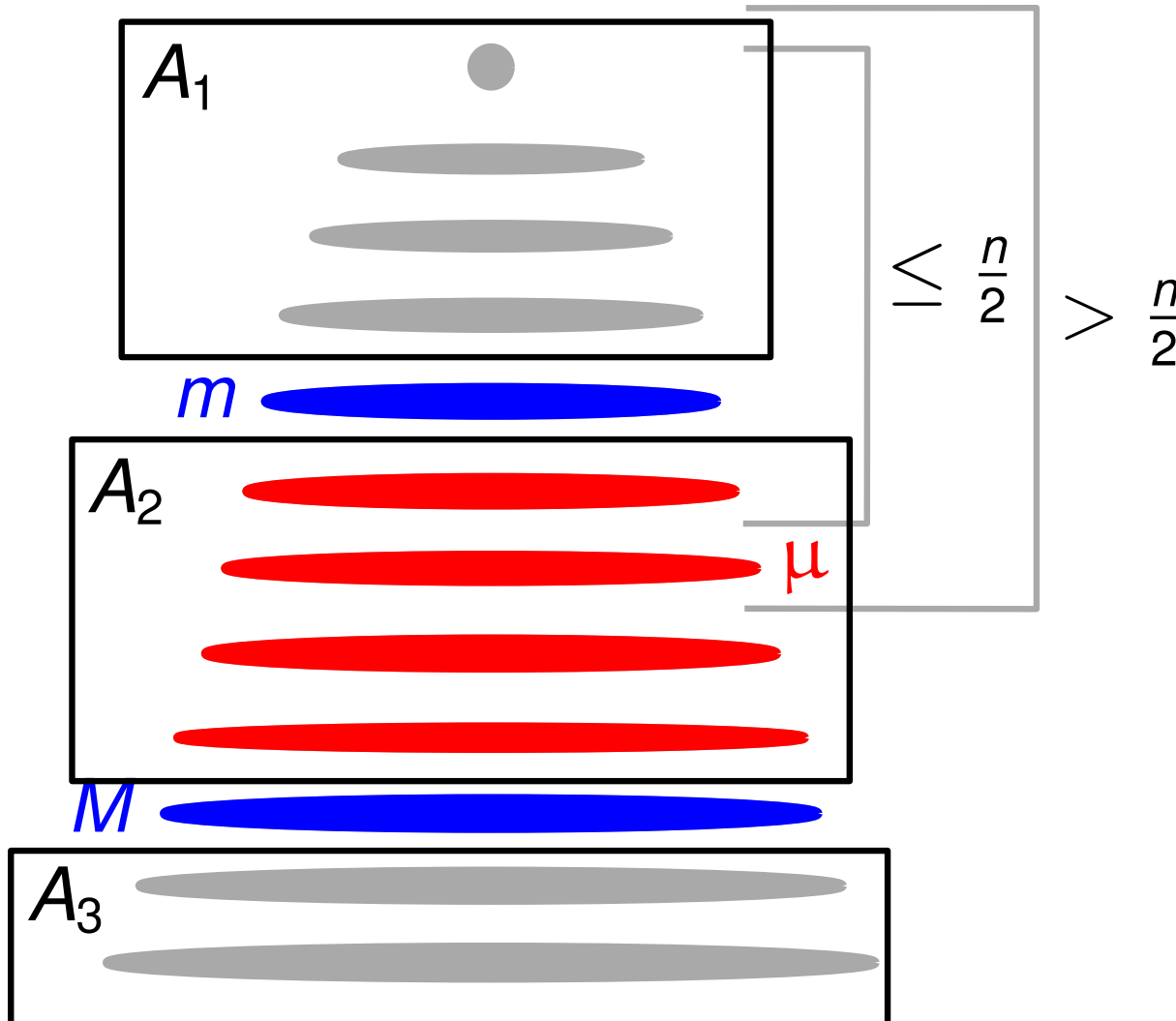
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

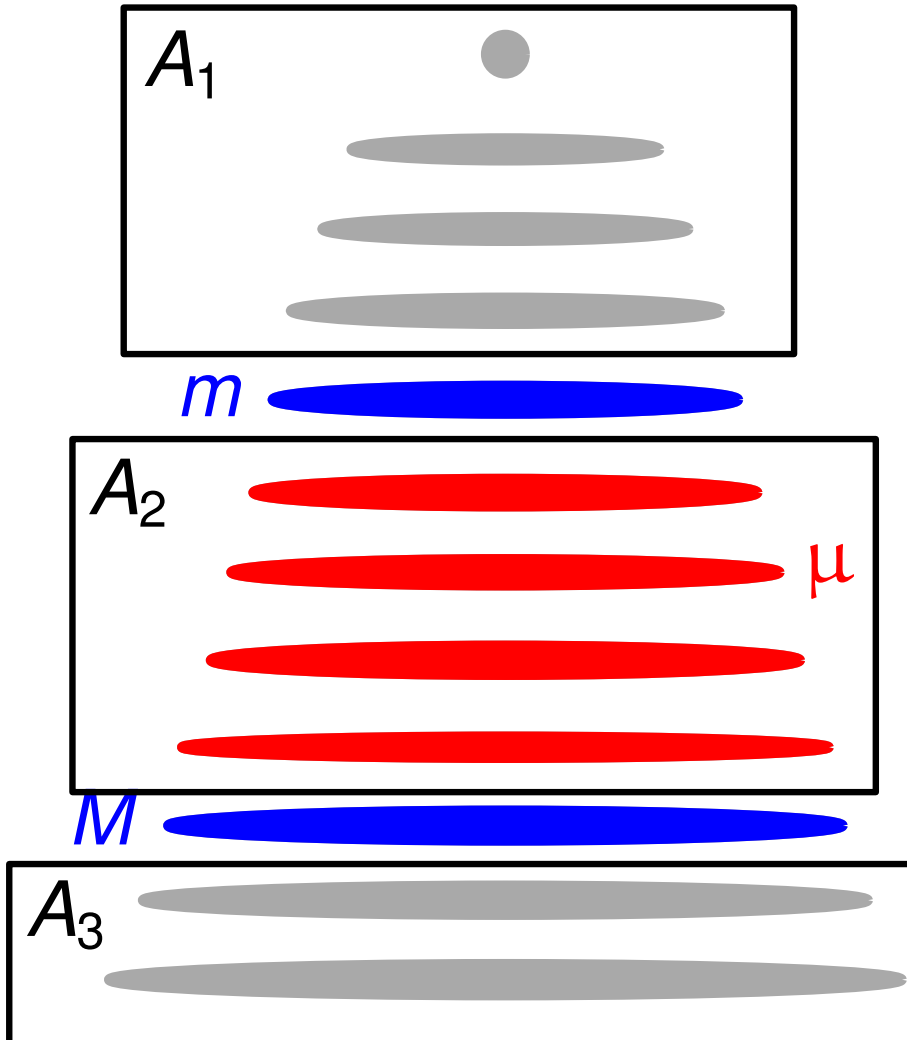
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

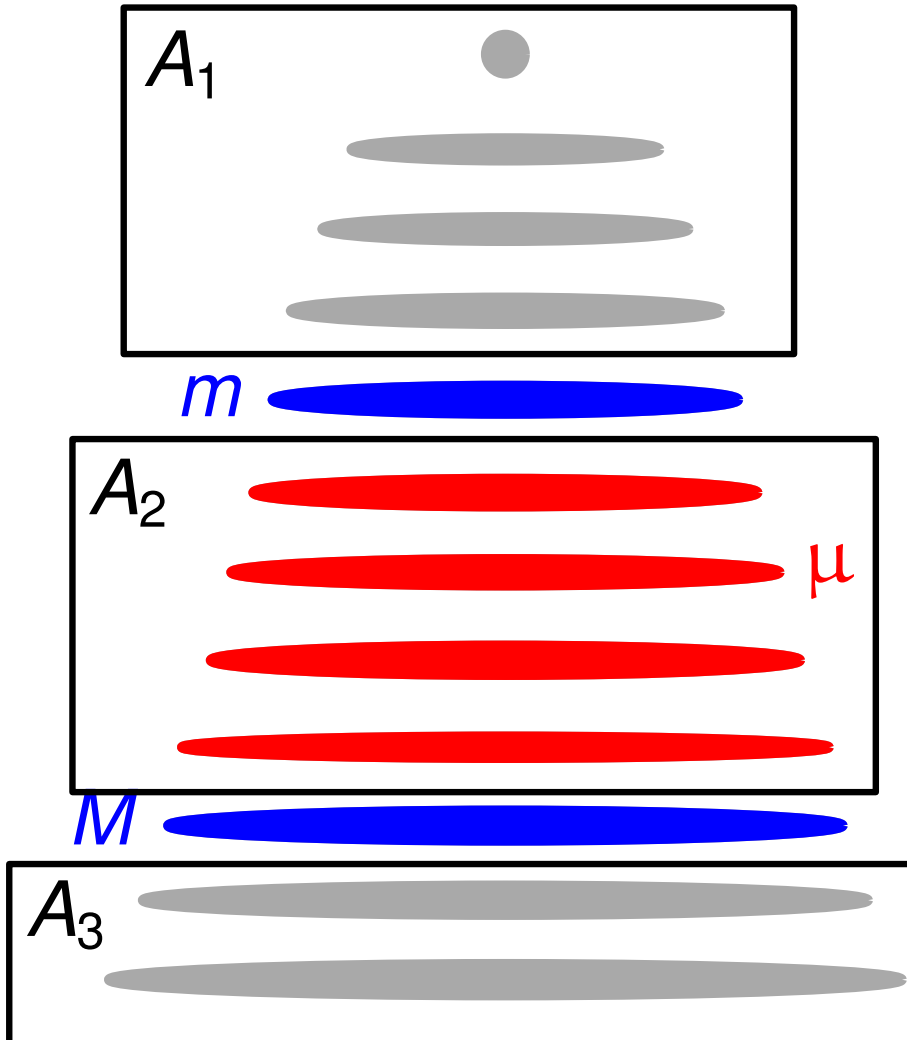
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

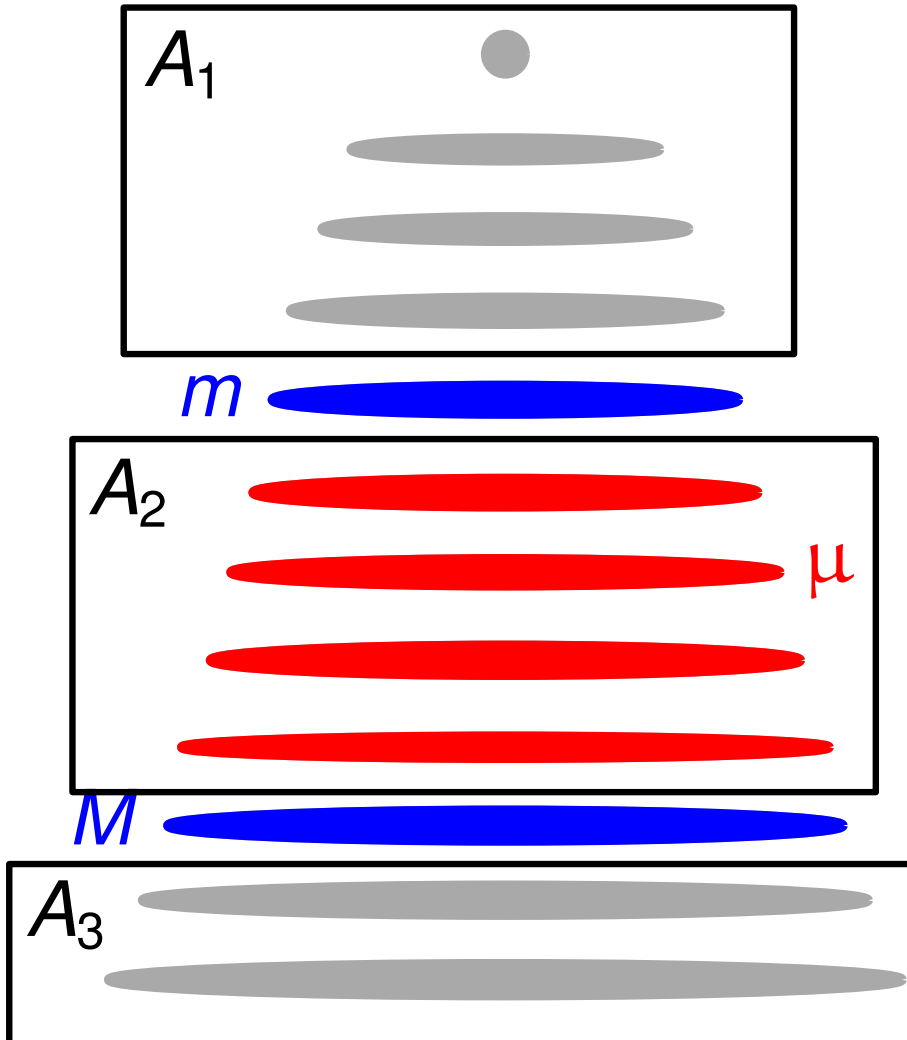


- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



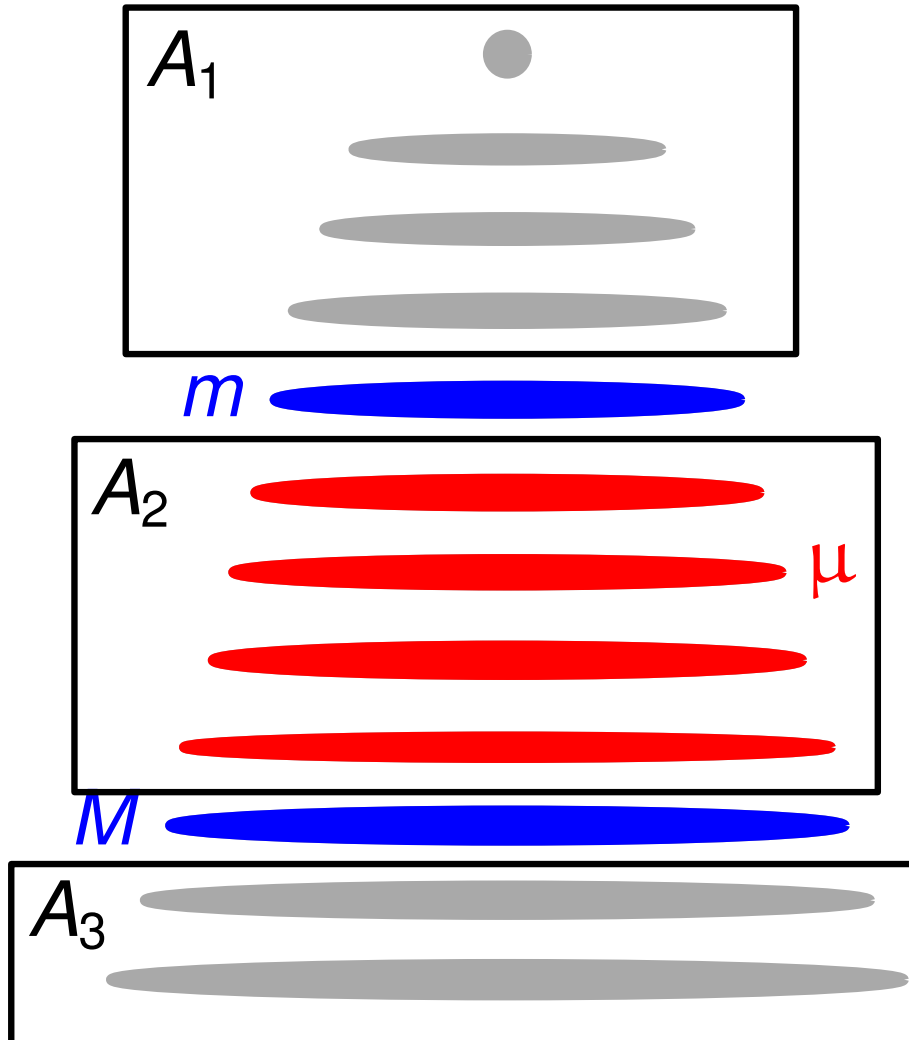
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



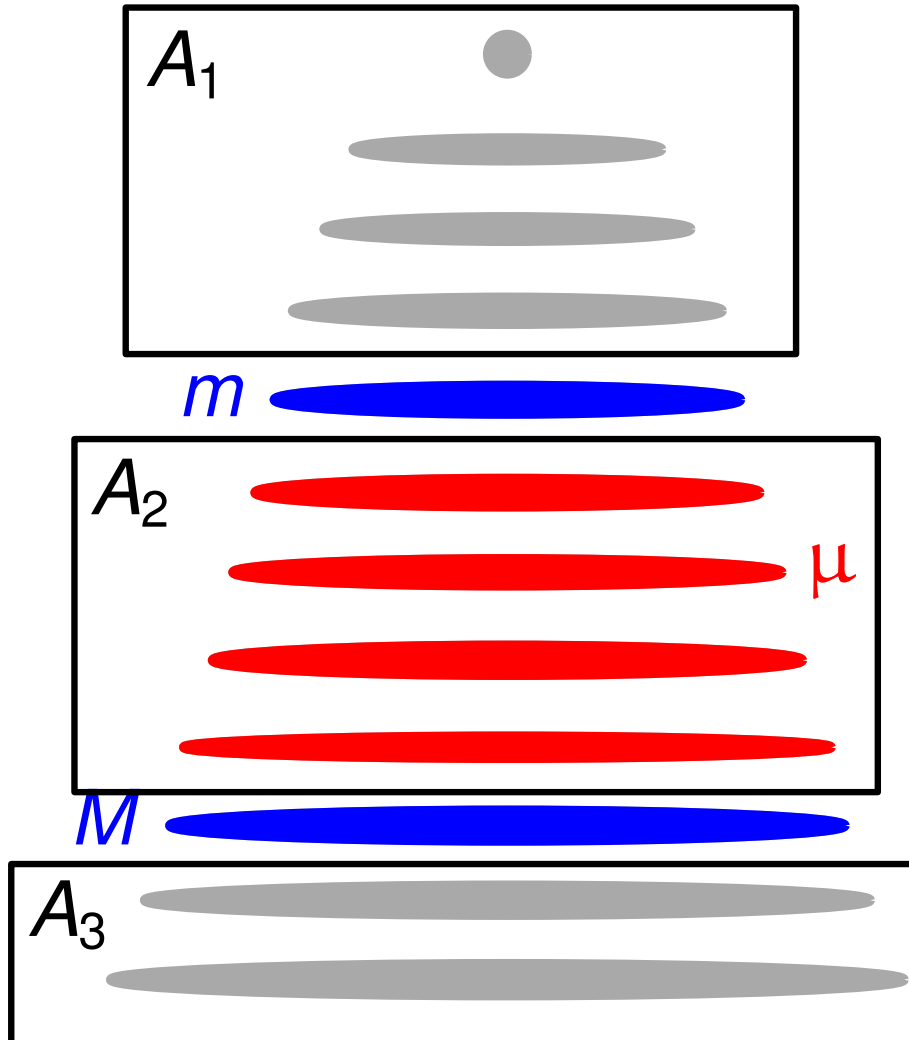
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



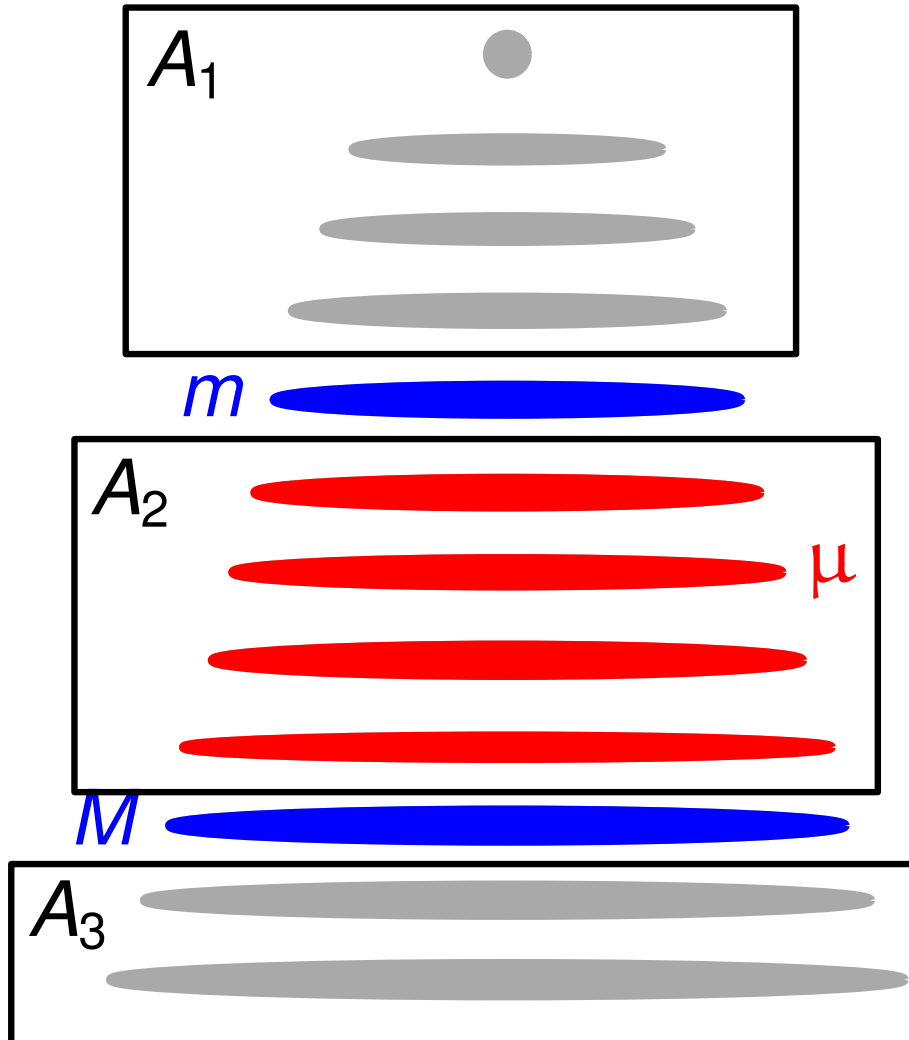
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

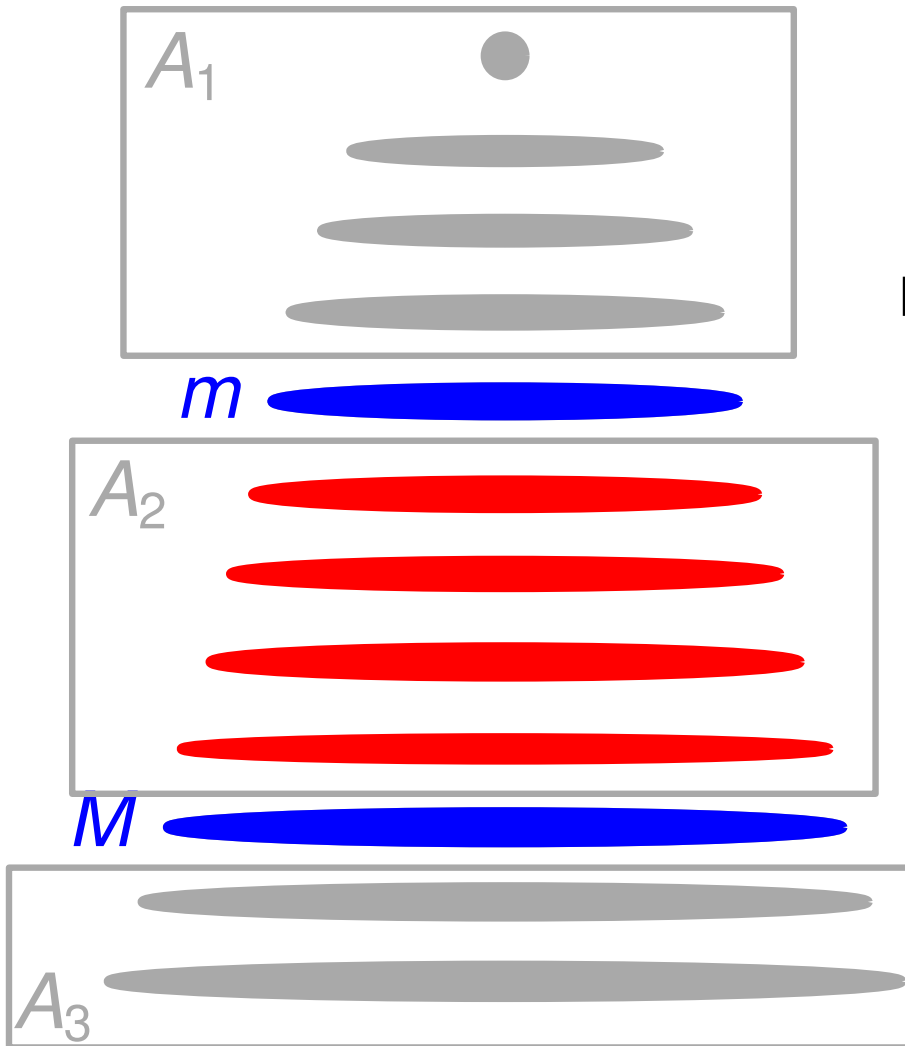


- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

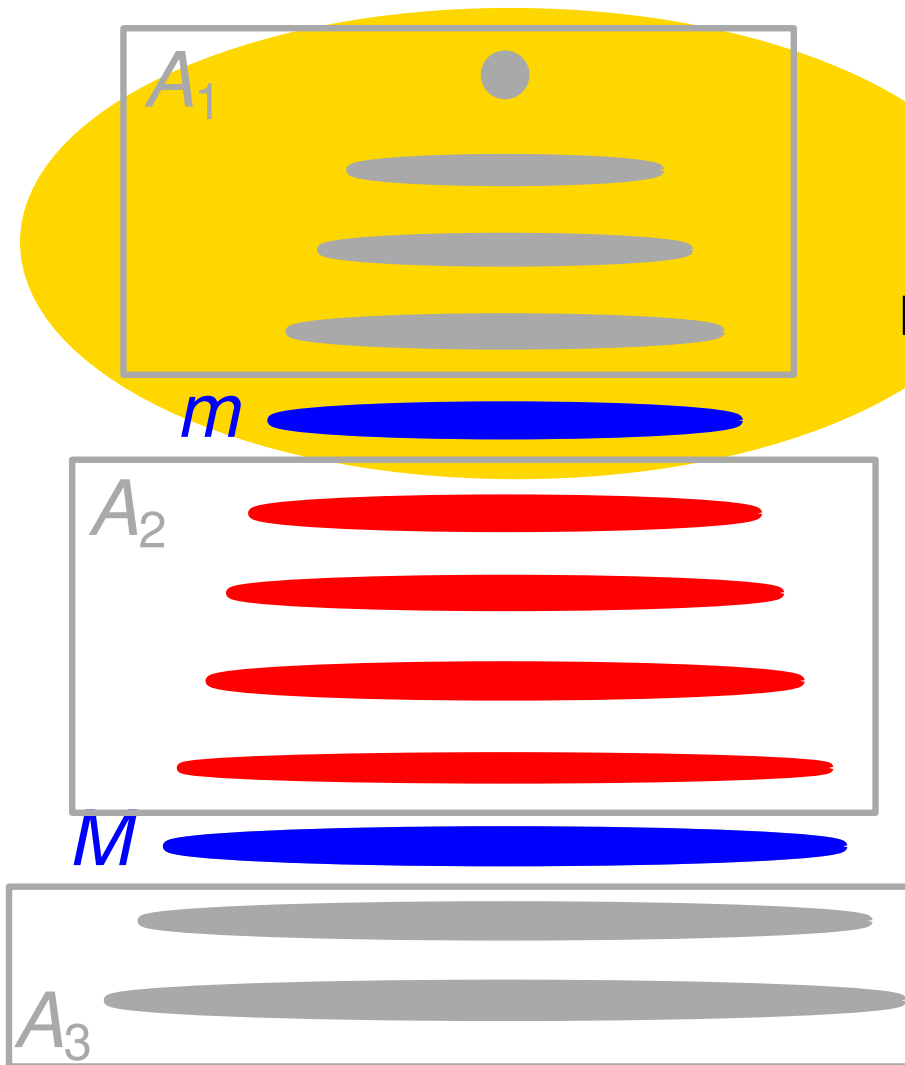
- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}$, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$, $|V_2| < \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

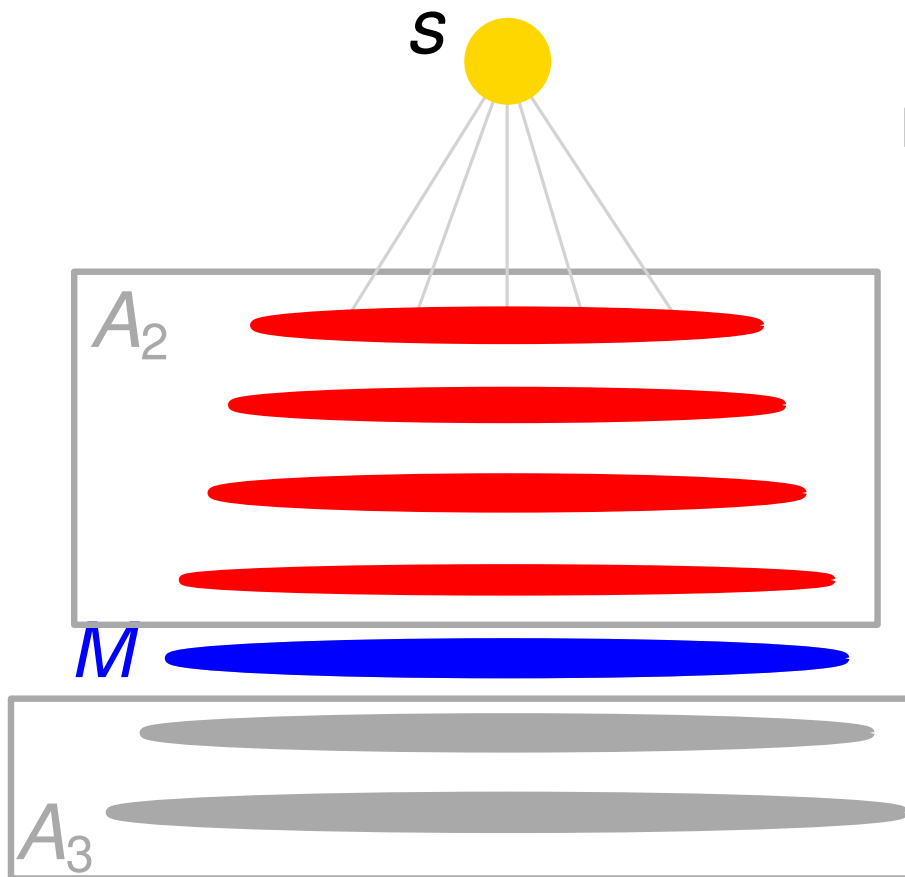


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

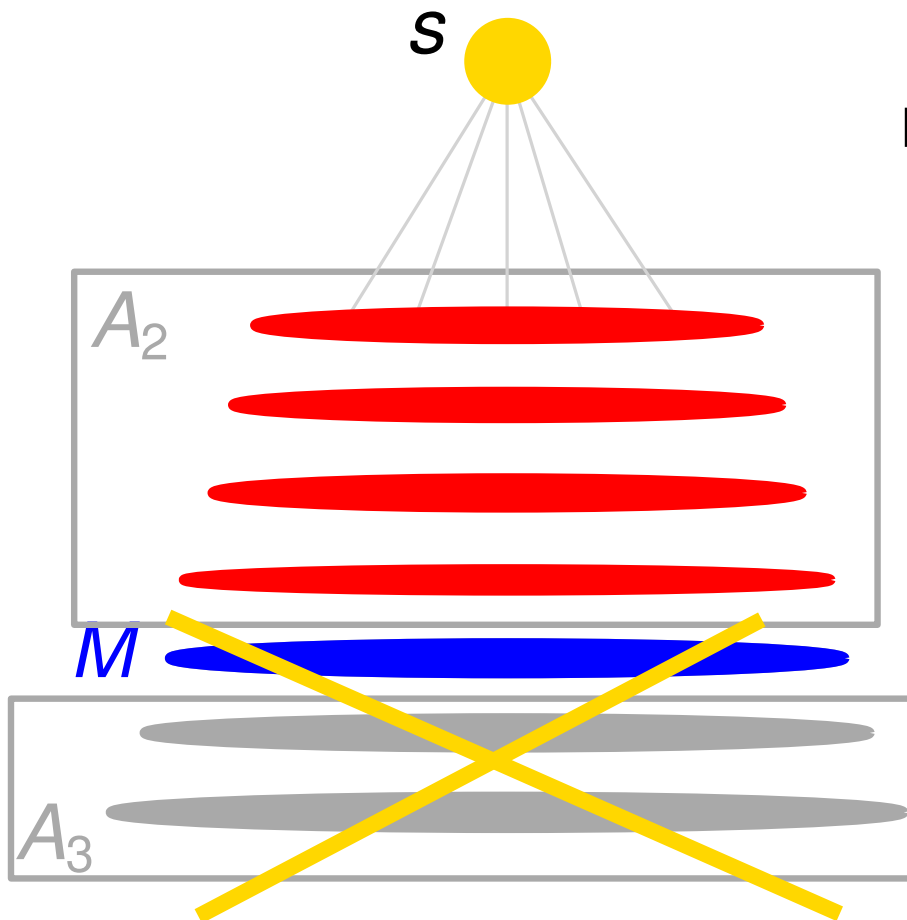
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

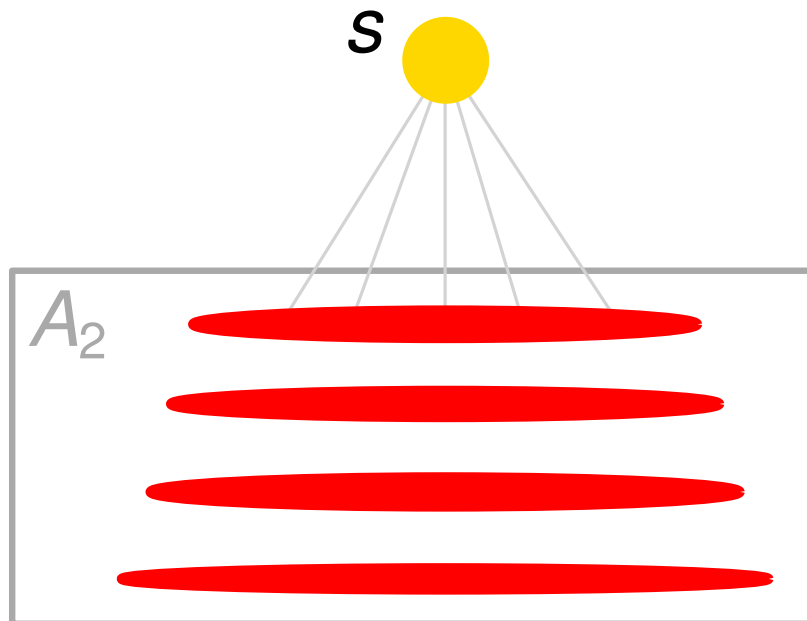
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$,
 $|level\ m| < \sqrt{n}$, $|level\ M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

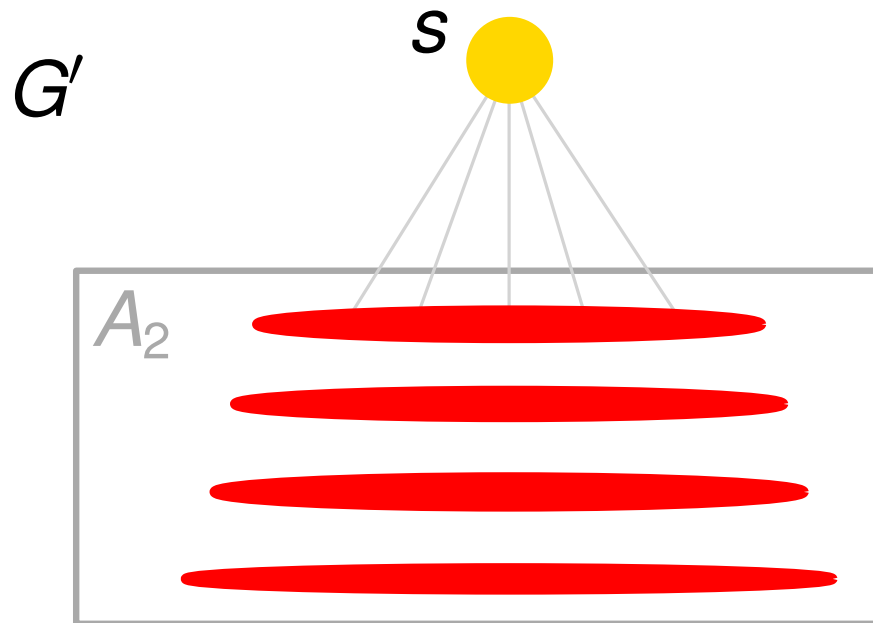
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



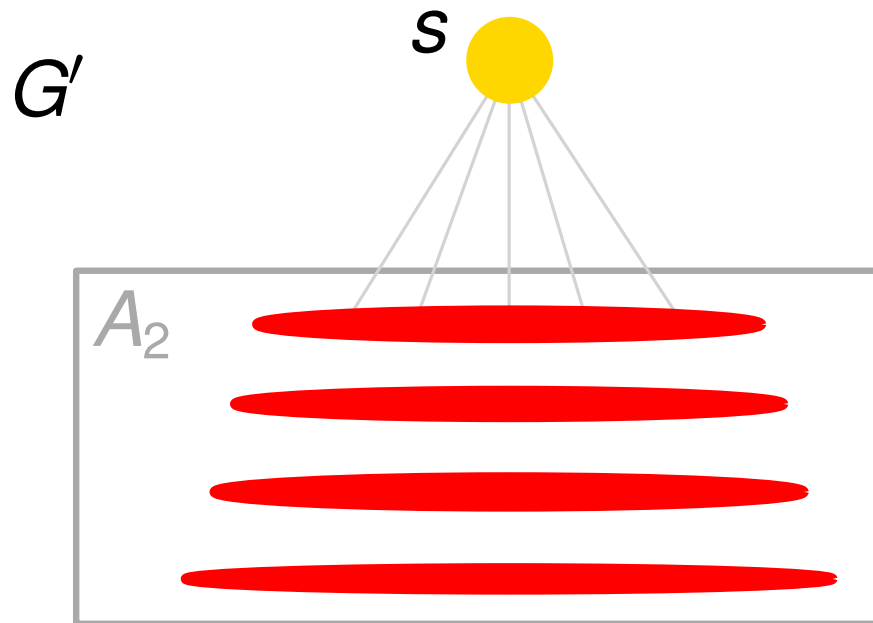
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

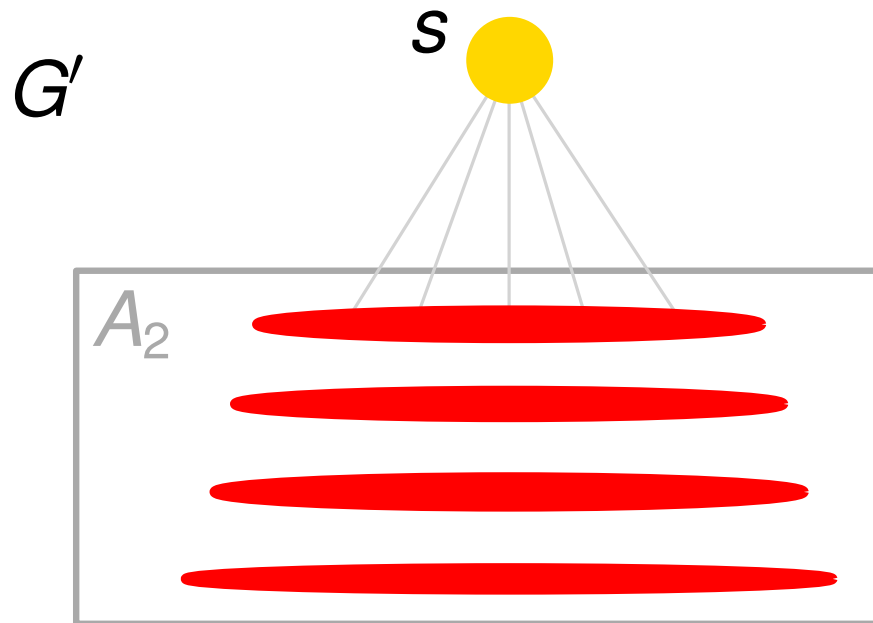


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'

Beweis des Planar-Separator-Theorem

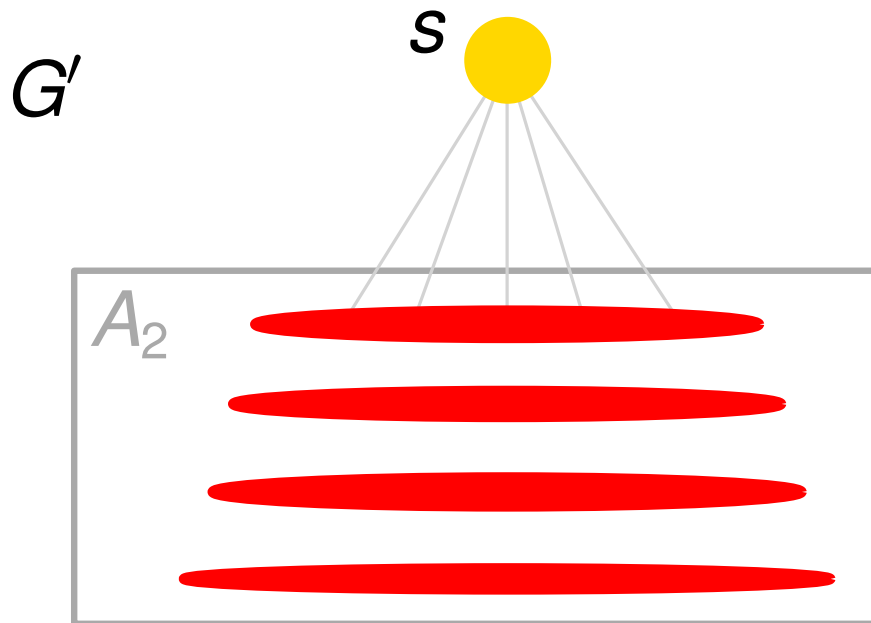


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels

Beweis des Planar-Separator-Theorem

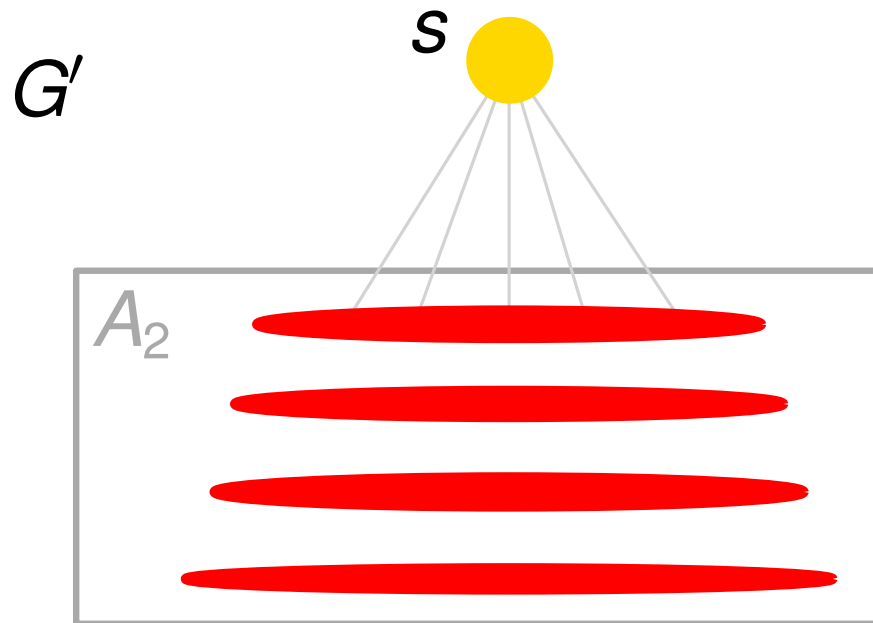


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$,

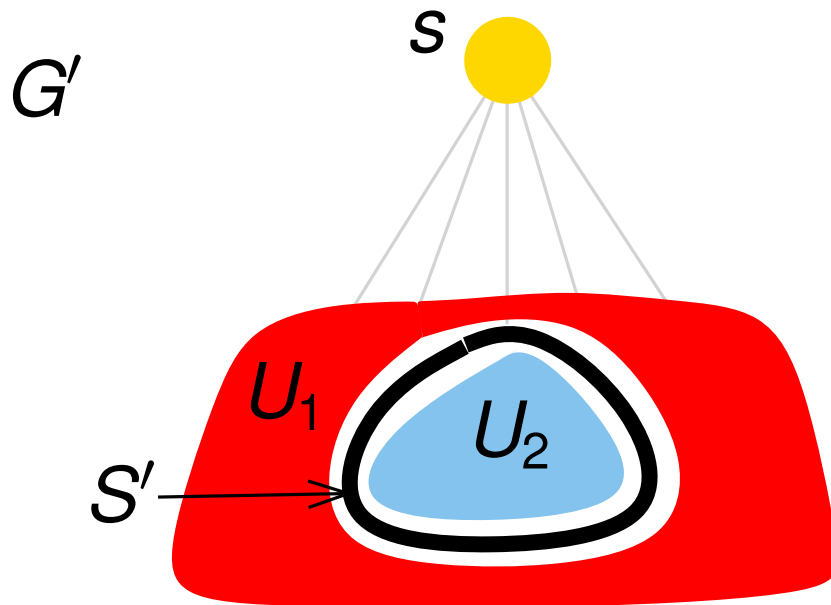
Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$



- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S', U_1, U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

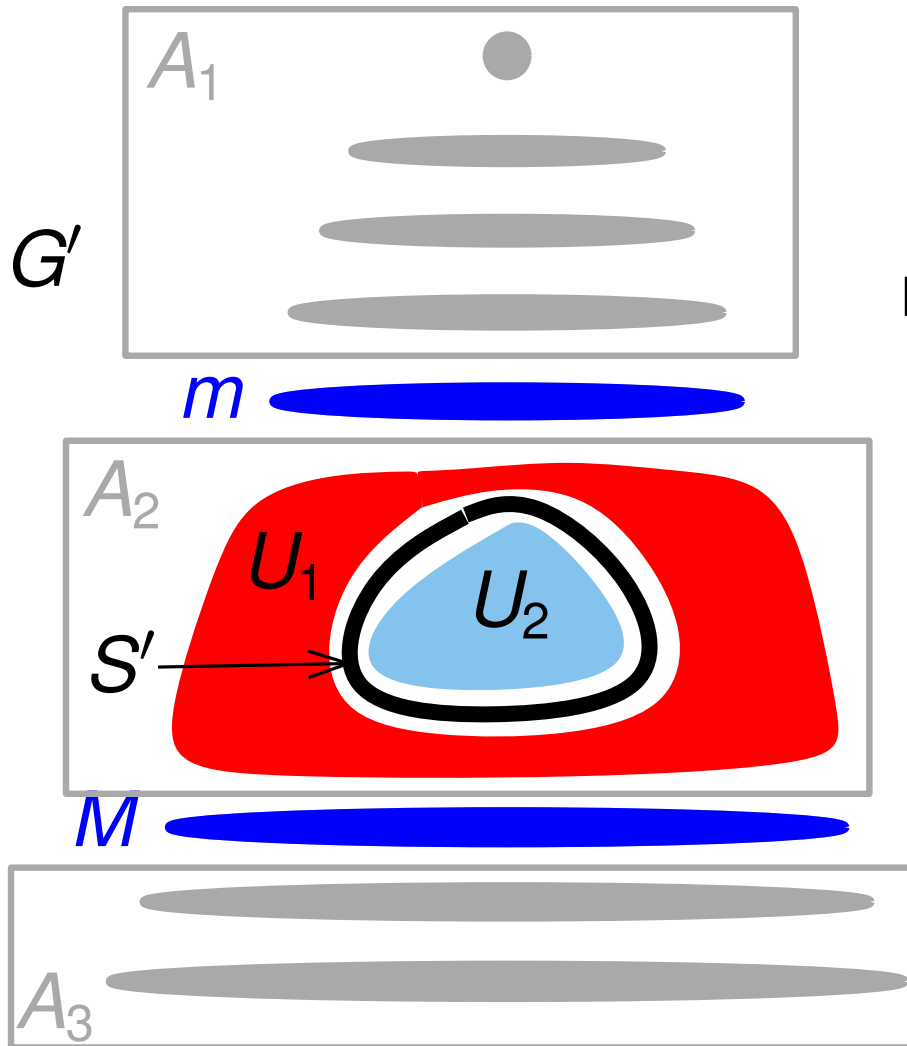


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

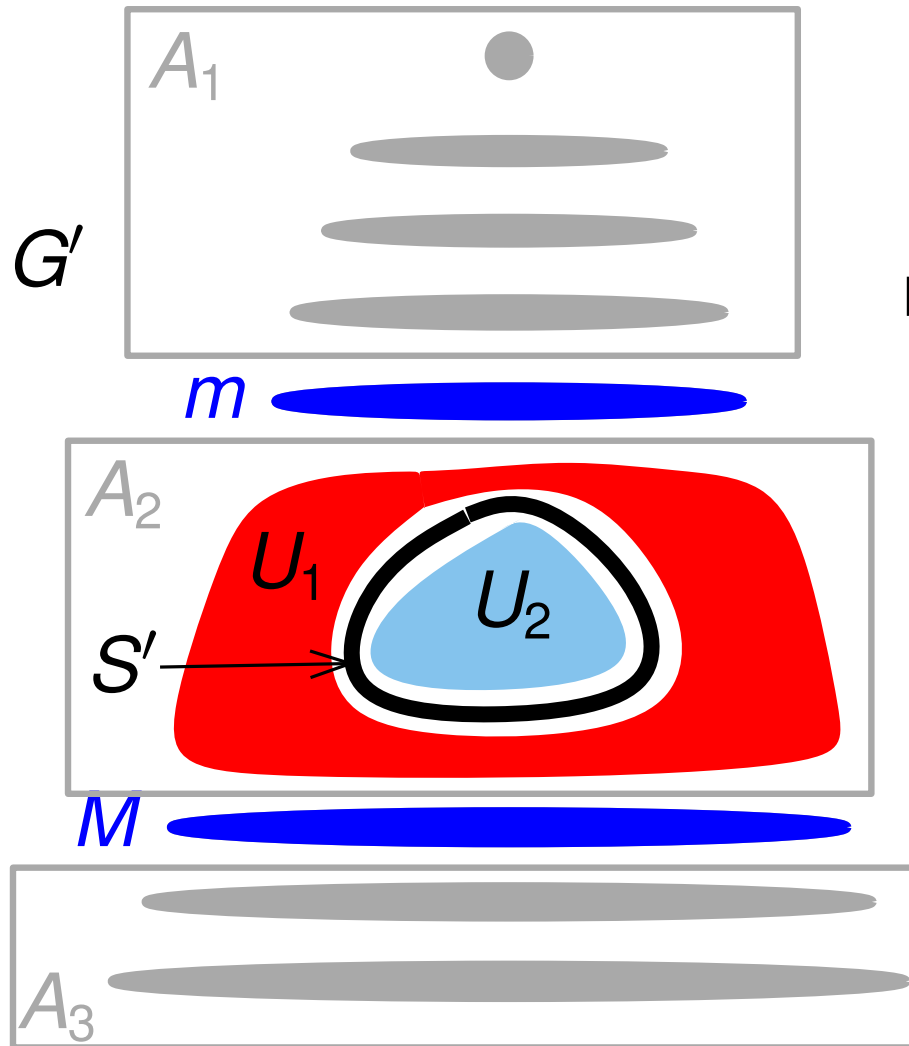


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

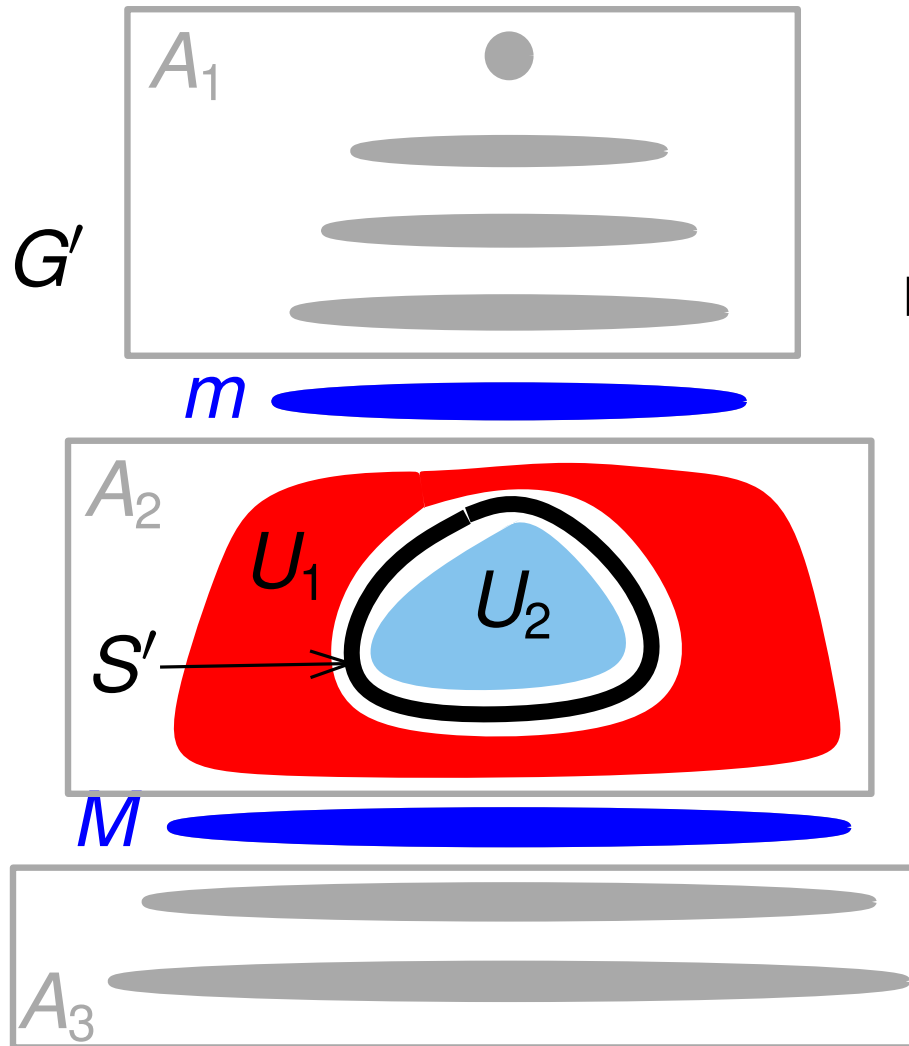


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$

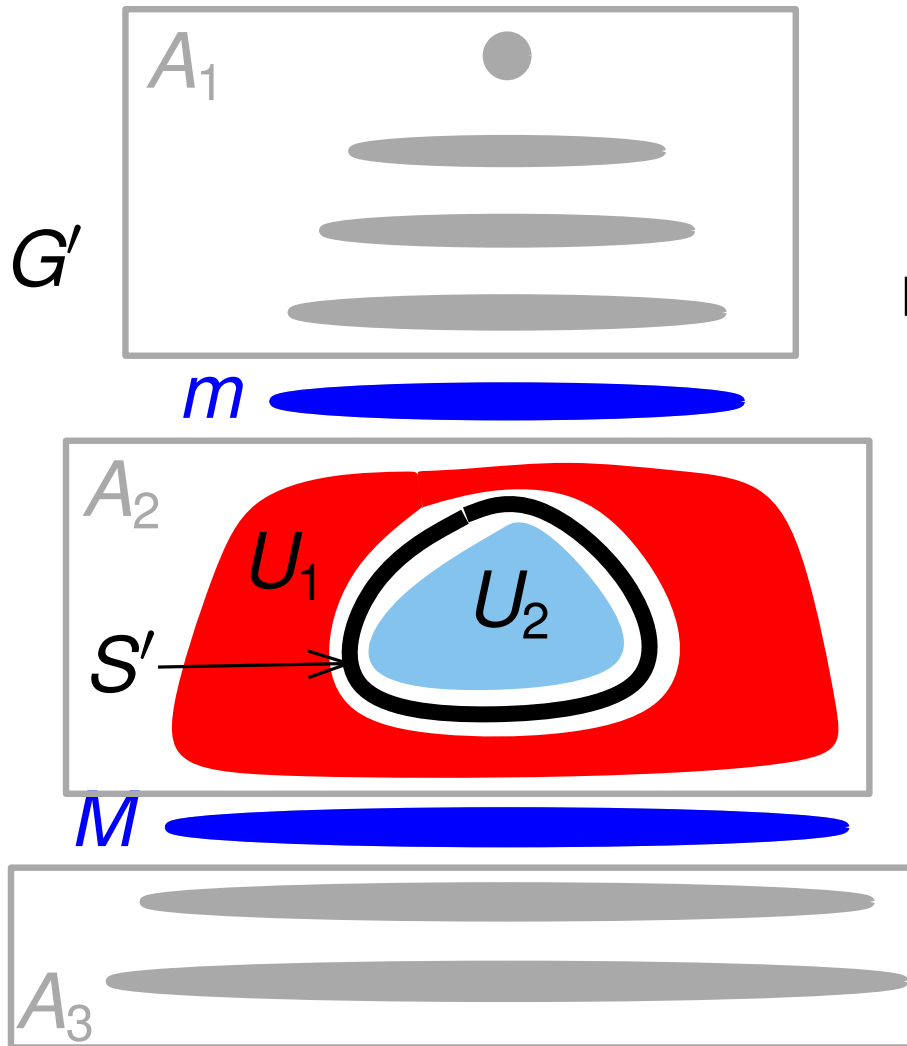
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

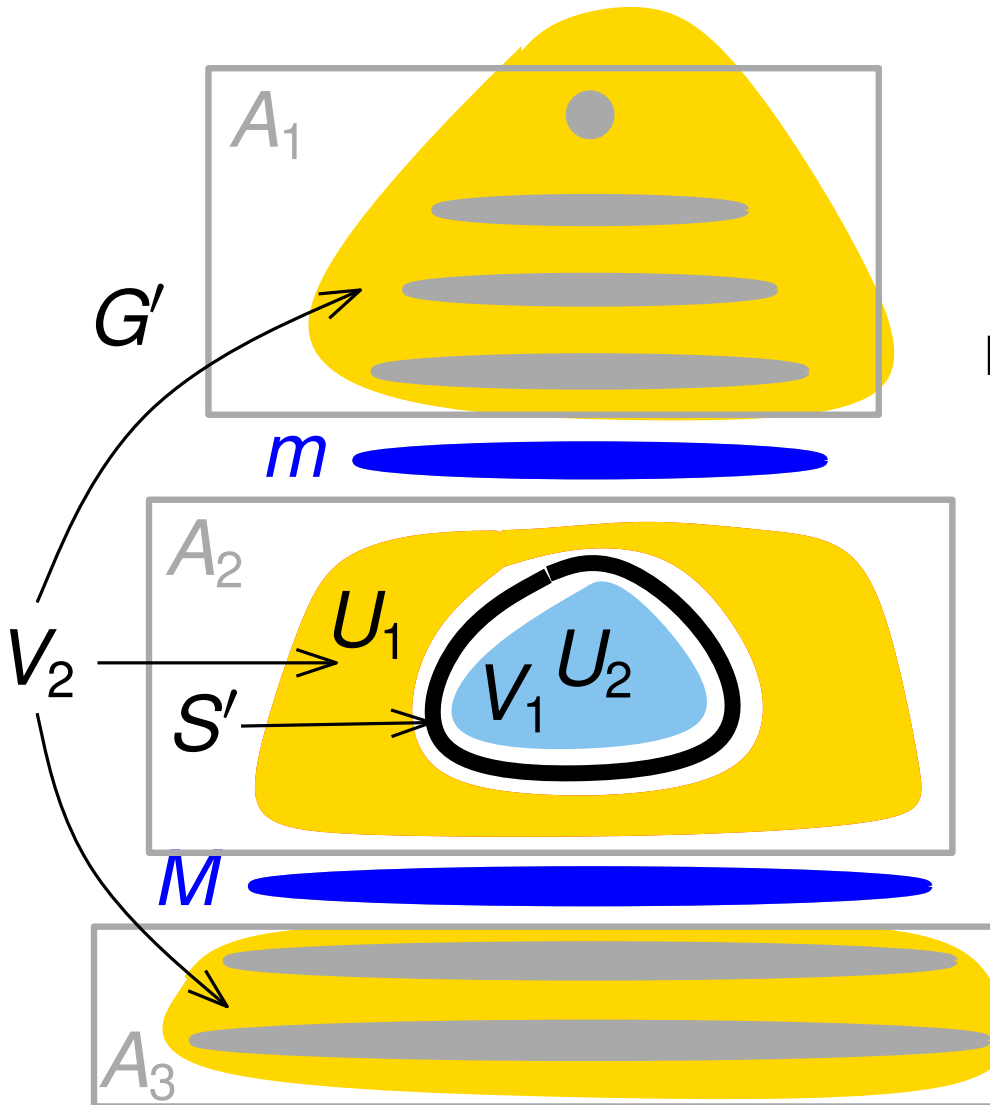
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



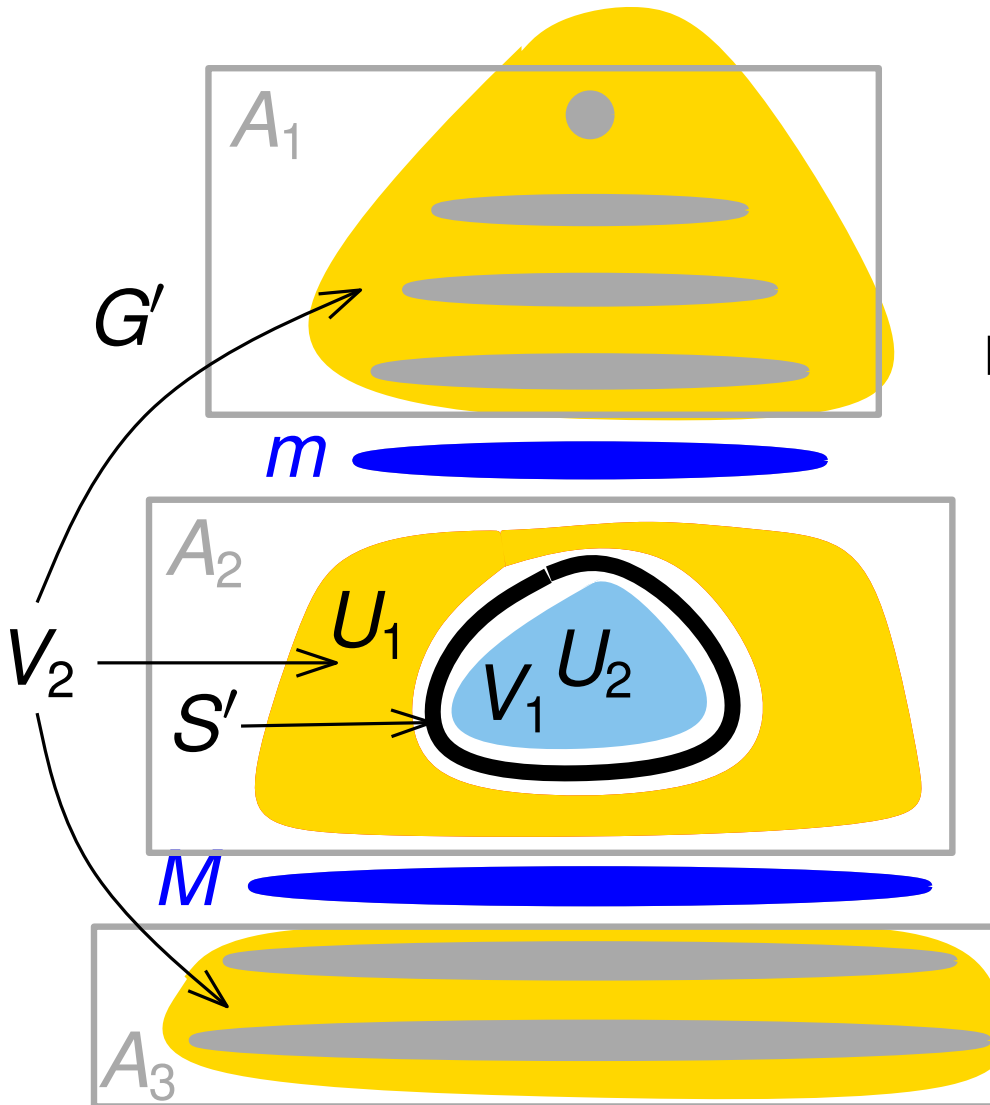
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem

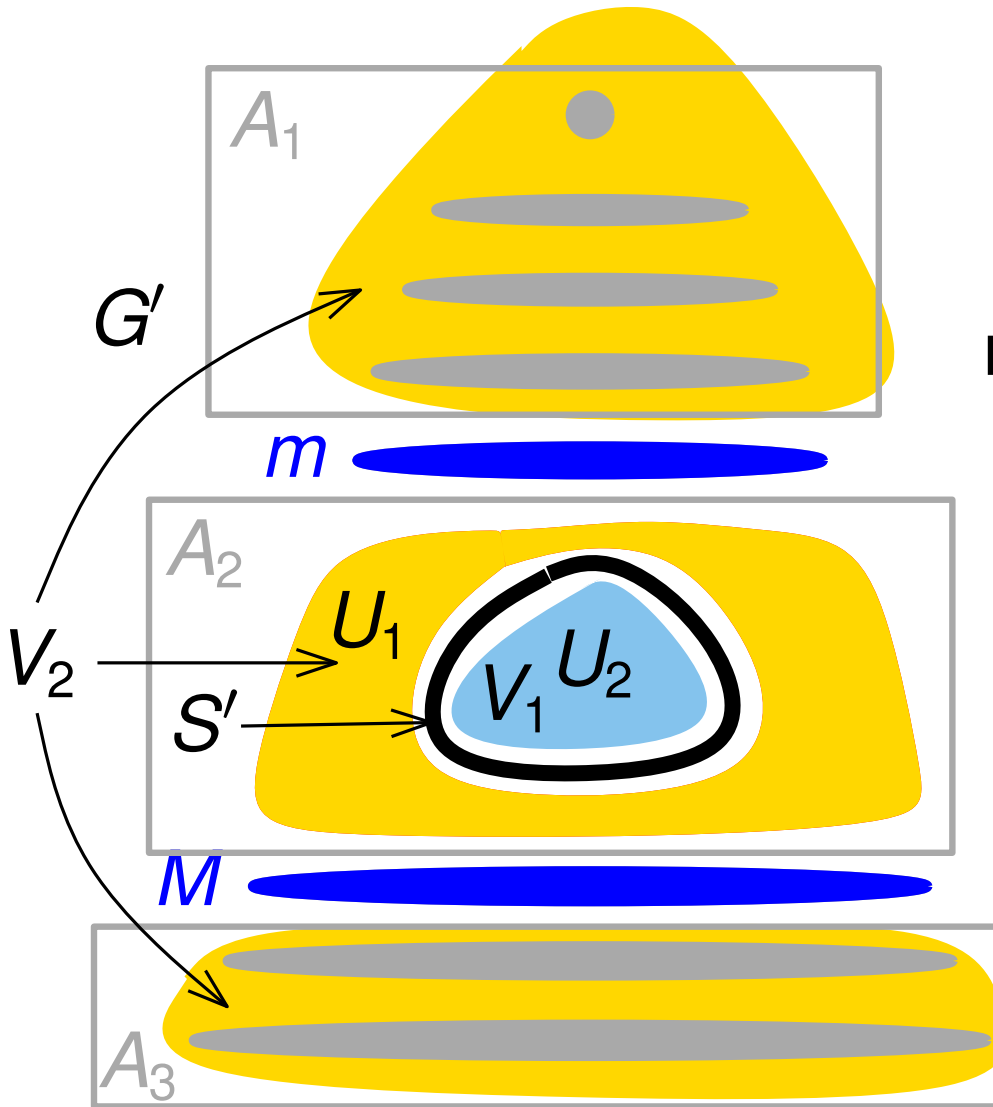


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
- Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
- $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
- Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
- $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$,
 $|V_2| = n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2}|A_2| < \frac{2}{3}n$

Aufgabe 3

a) **Zeigen oder widerlegen Sie:**

- In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$.
- Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?

b) **Zeigen oder widerlegen Sie:** In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit $S = S_m \cup S_M$ einen gültigen Separator findet.

Aufgabe 4

Gegeben:

- Zusammenhängender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ

Aussage: Es gibt einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ besteht mit

- $|V_1| \leq \frac{2}{3}n, |V_2| \leq \frac{2}{3}n,$
- $V_1 \cup V_2 = V$ und
- $E_1 \cup E_2 = E \setminus S.$

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Knoten v von G entweder
- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
 - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Knoten v von G entweder
- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
 - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.
- b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Knoten v von G entweder
 - die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
 - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.
- b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?
- c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.