

Algorithmen für Planare Graphen

Übung am 30.05.2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



3. Übungsblatt

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Knoten v von G entweder
- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
 - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Knoten v von G entweder
- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
 - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.
- b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G . Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞ .

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Knoten v von G entweder
 - die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
 - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.
- b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?
- c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.

Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

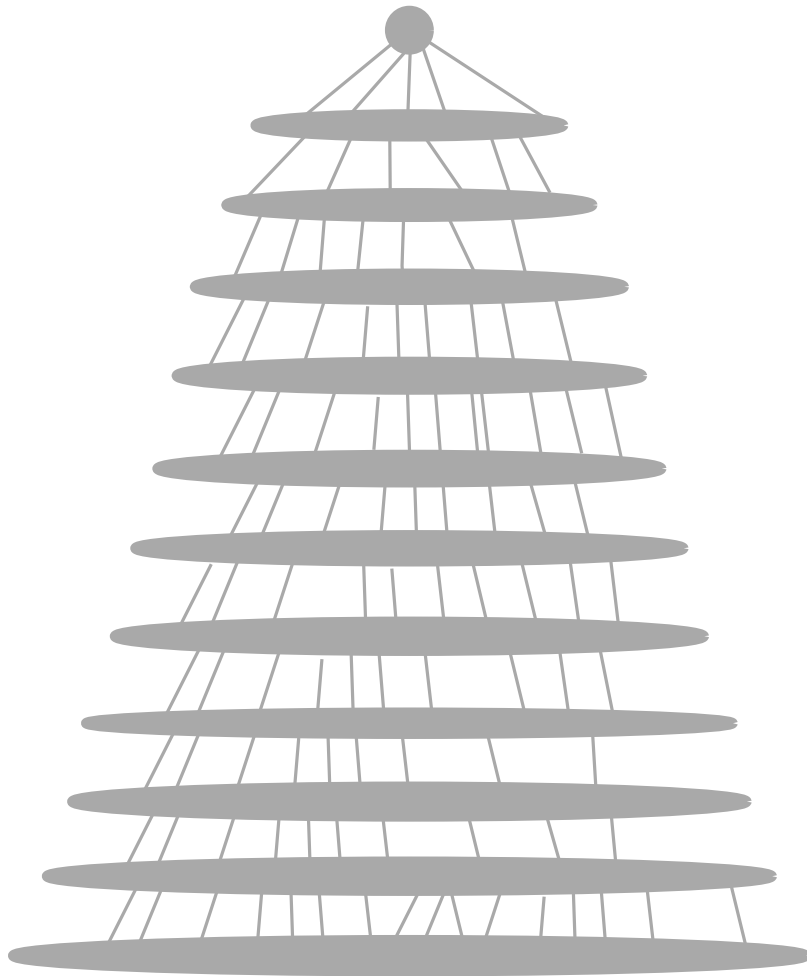
**Lipton & Tarjan
1977**

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

Beweis des Planar-Separator-Theorem

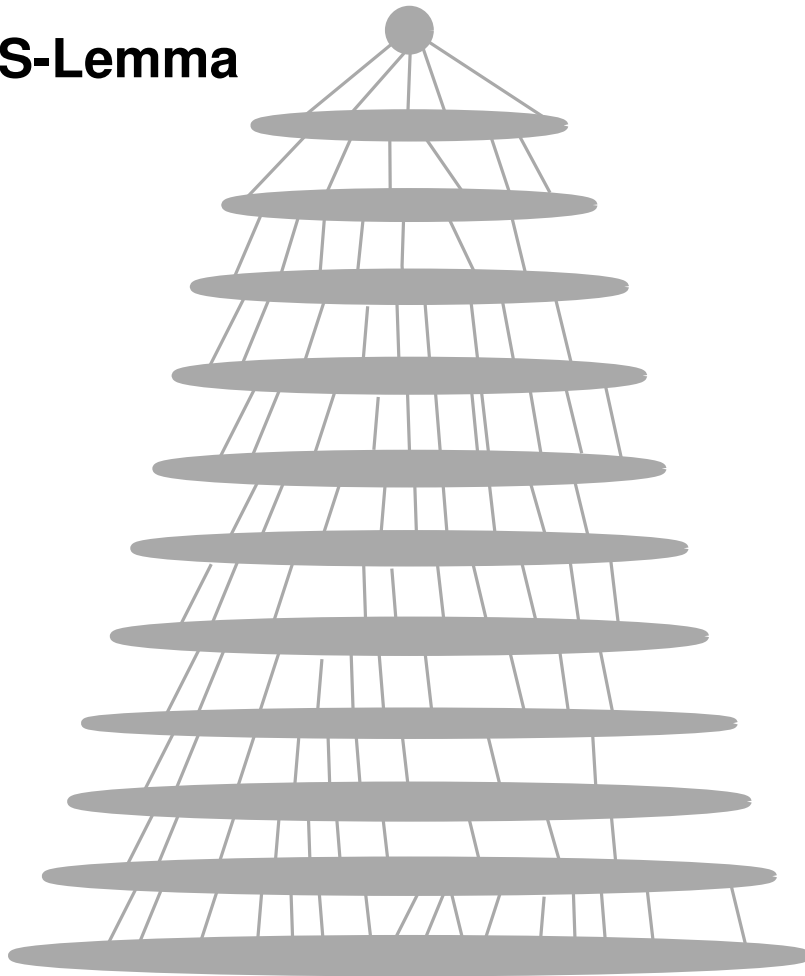
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

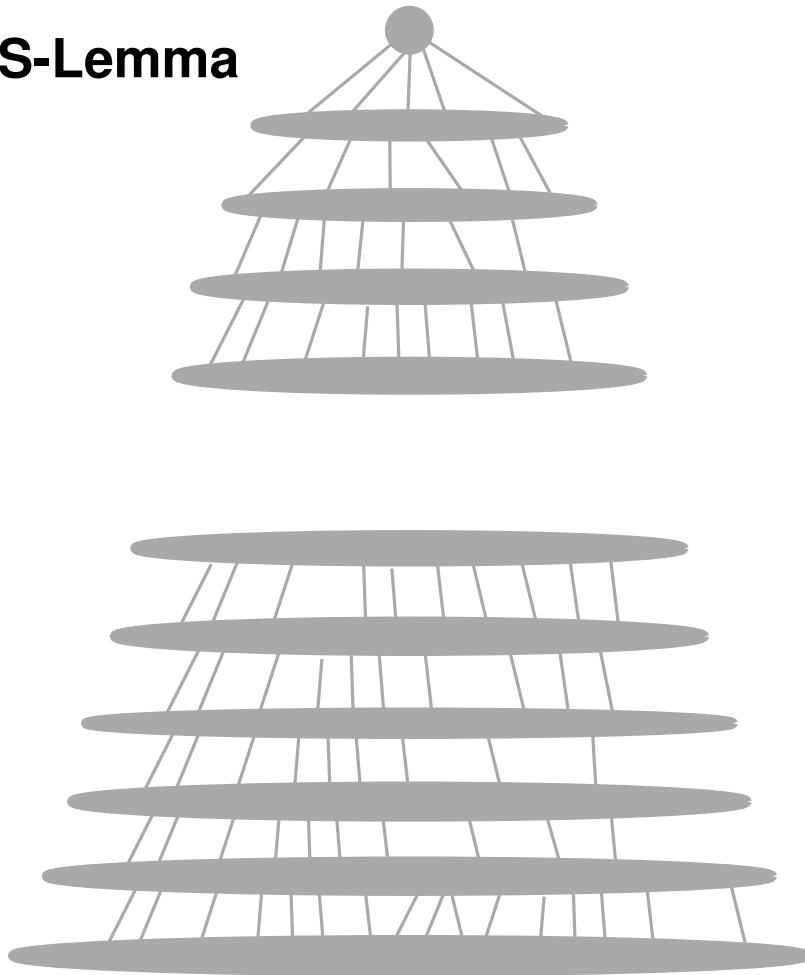
BFS-Lemma



Beweis des Planar-Separator-Theorem

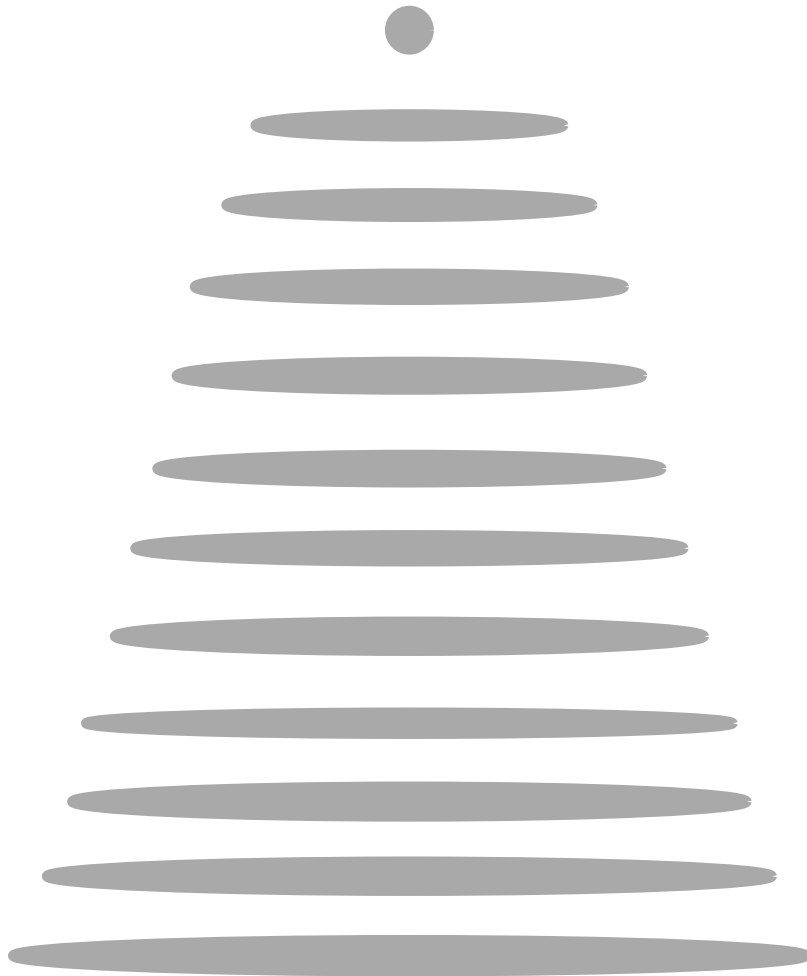
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

BFS-Lemma



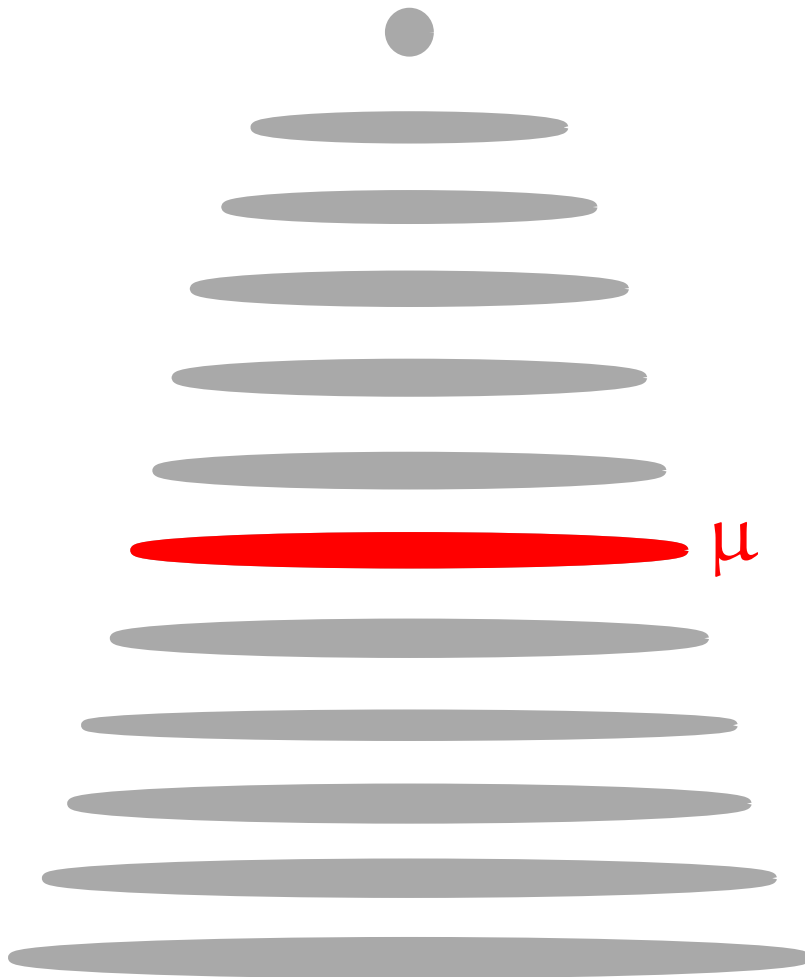
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



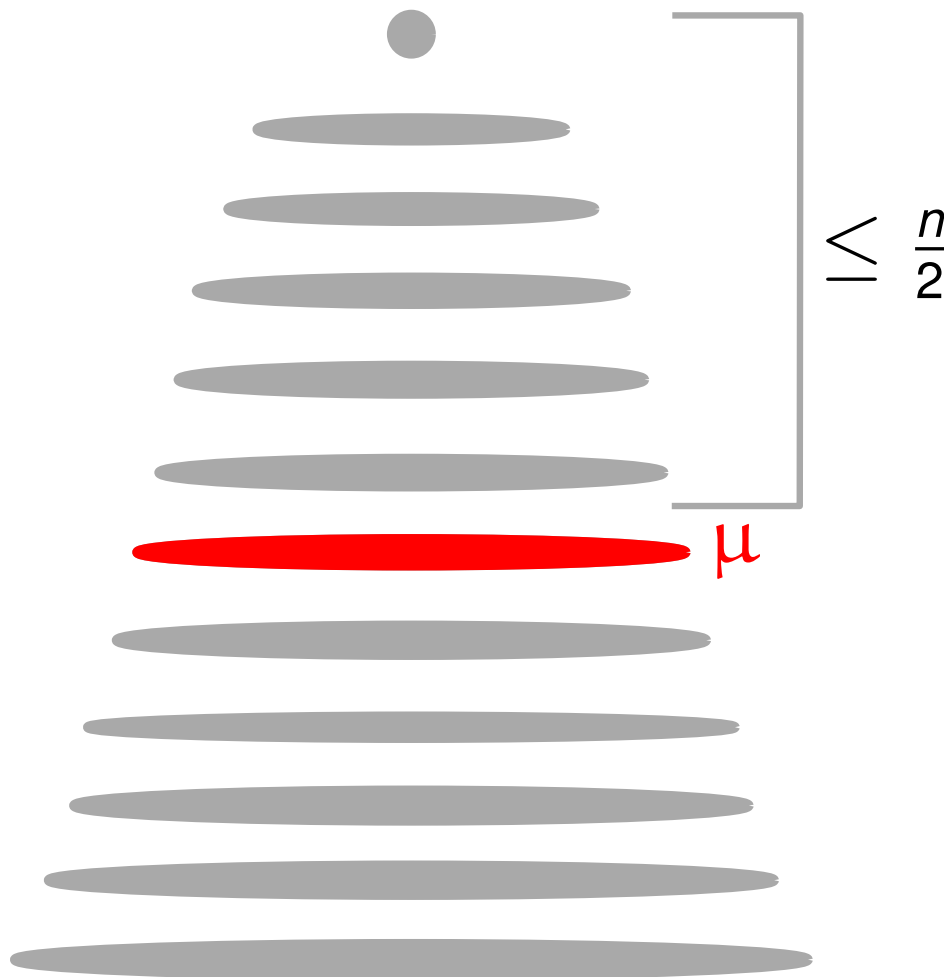
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



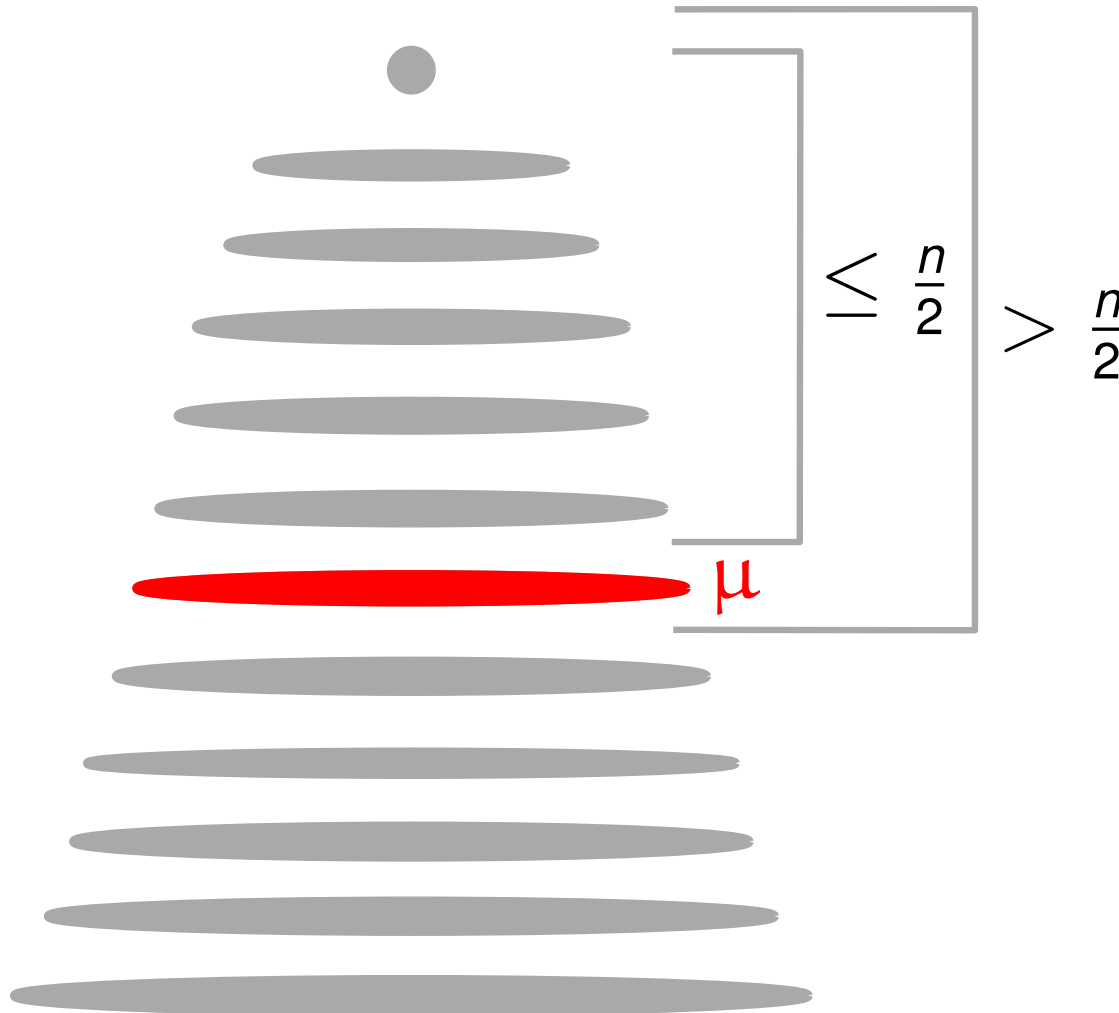
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



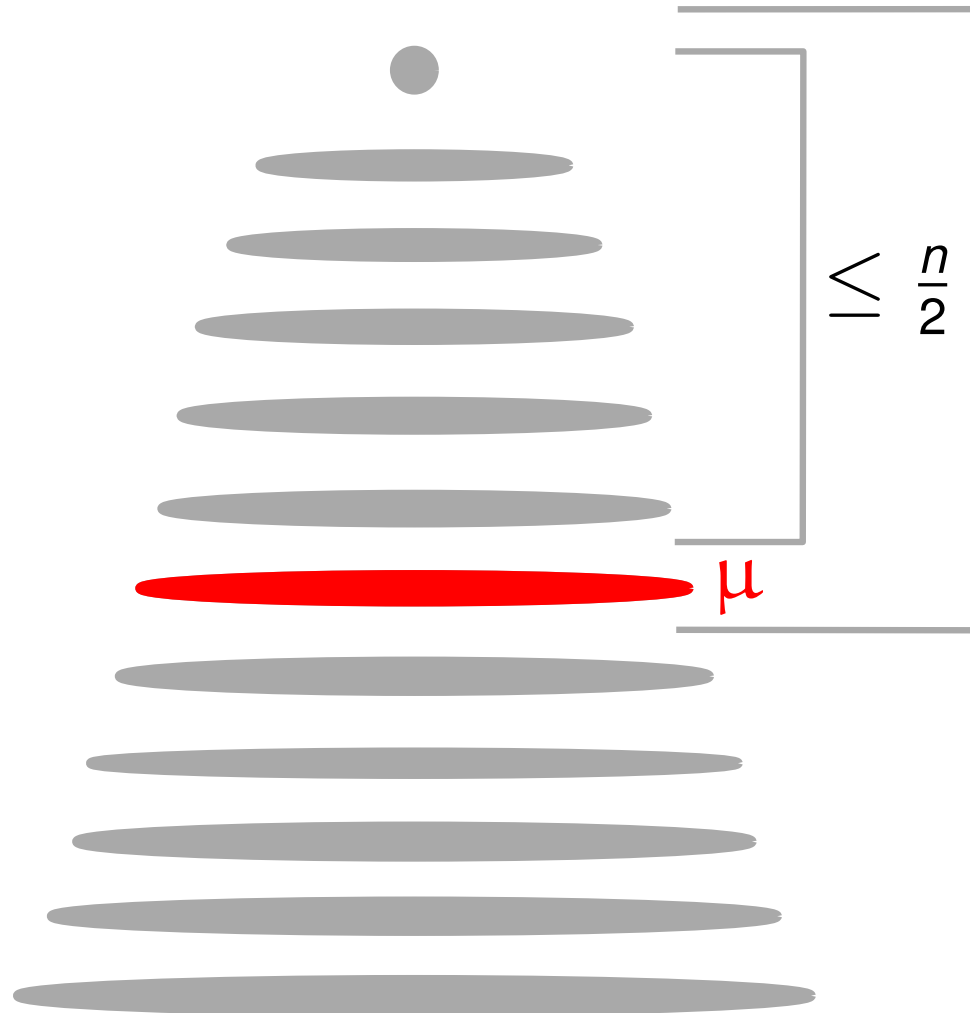
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

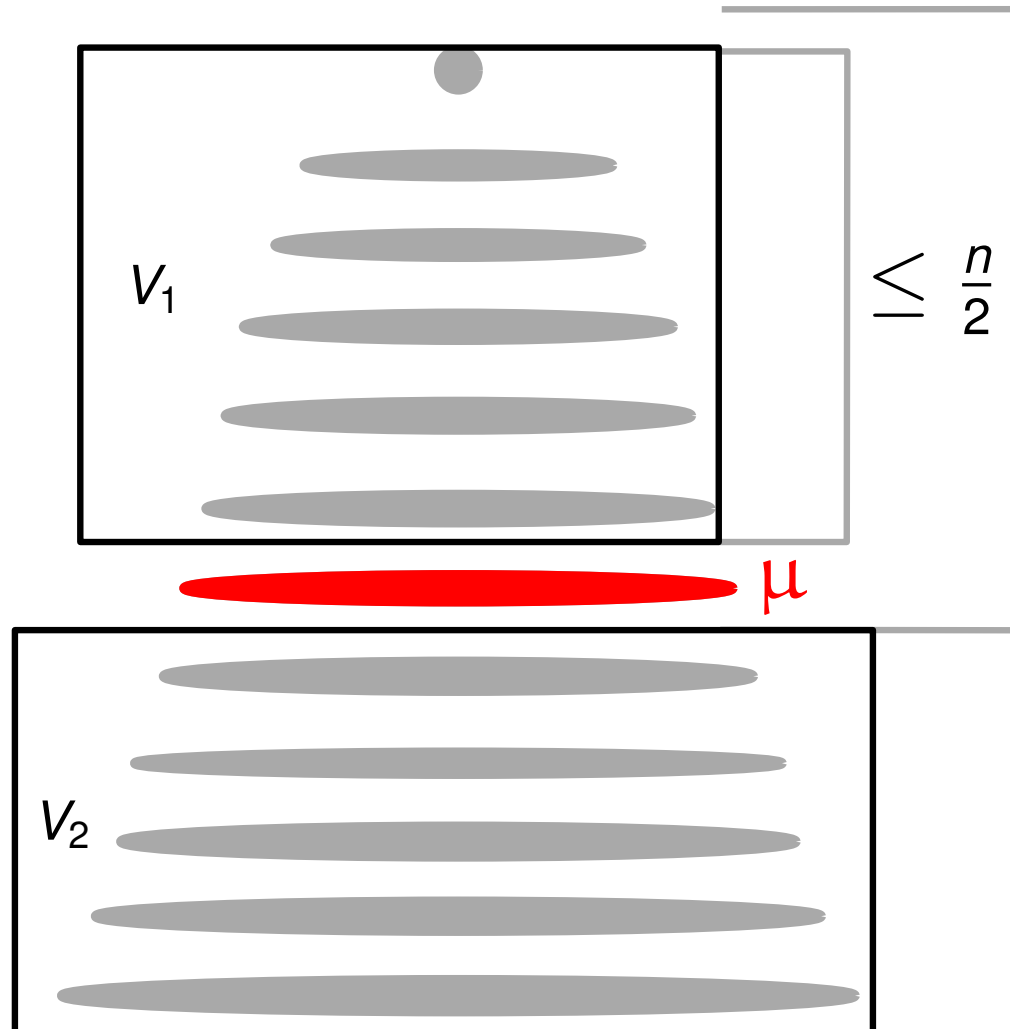
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$ - Fertig!

Beweis des Planar-Separator-Theorem

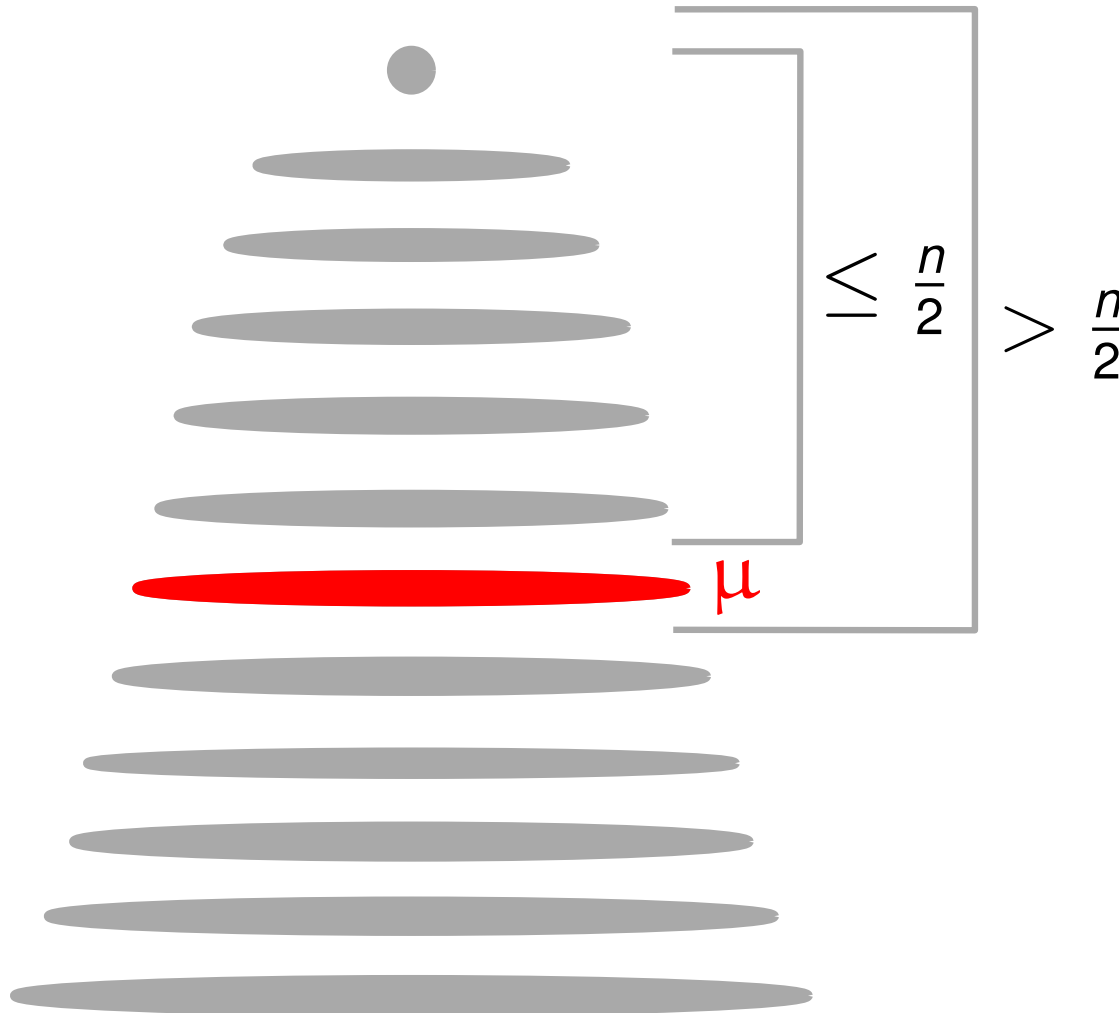
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$ - Fertig!
- Level μ ist Separator S

Beweis des Planar-Separator-Theorem

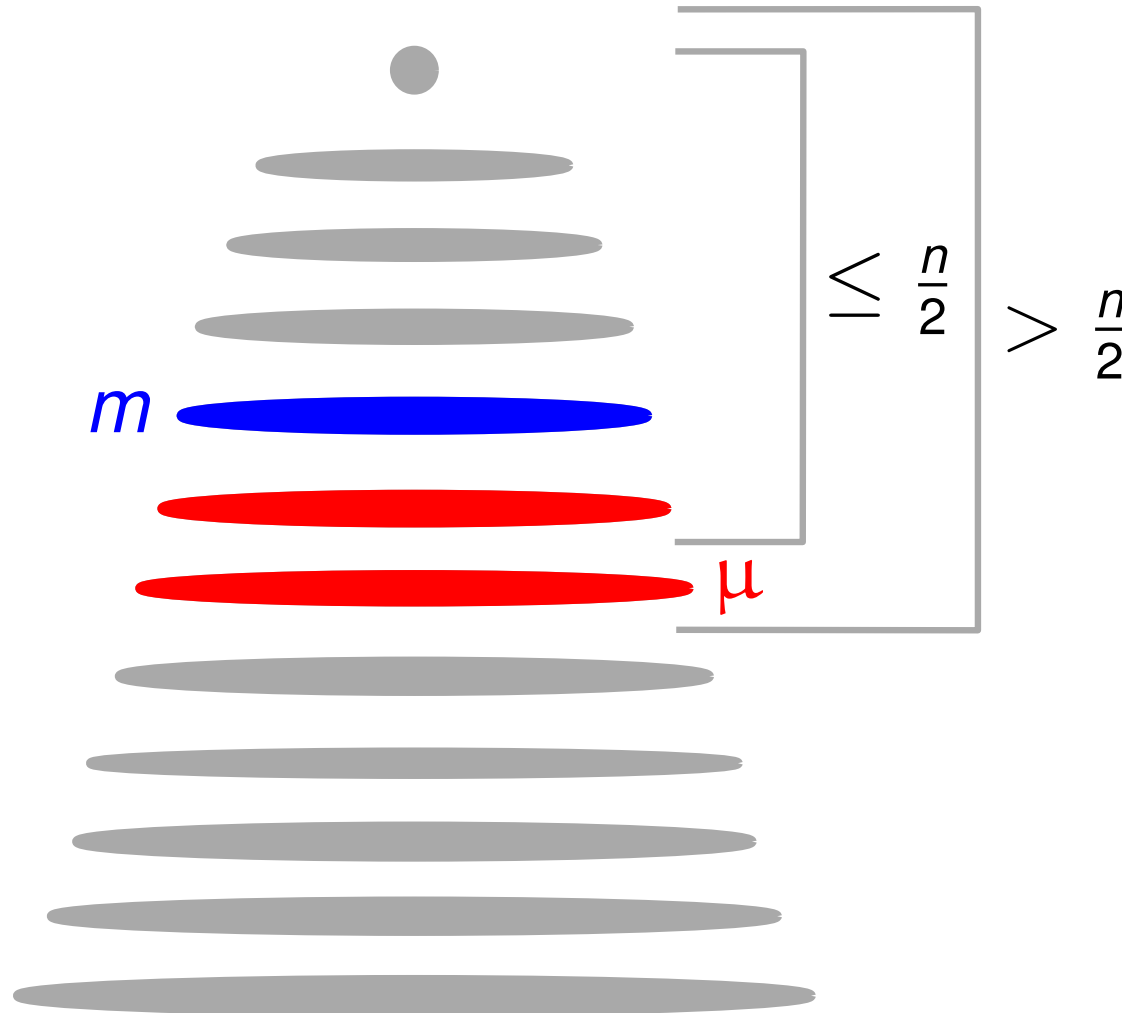
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

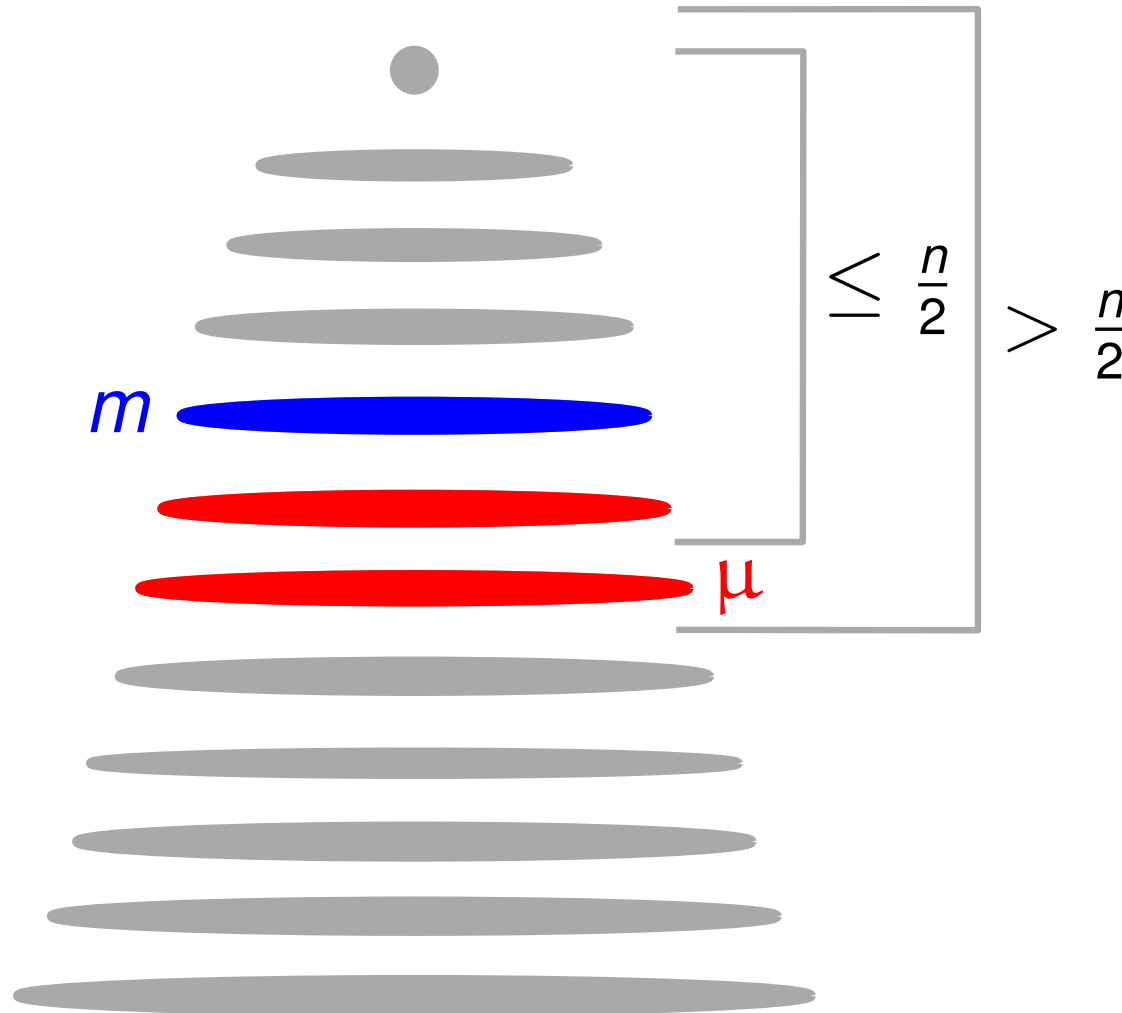
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

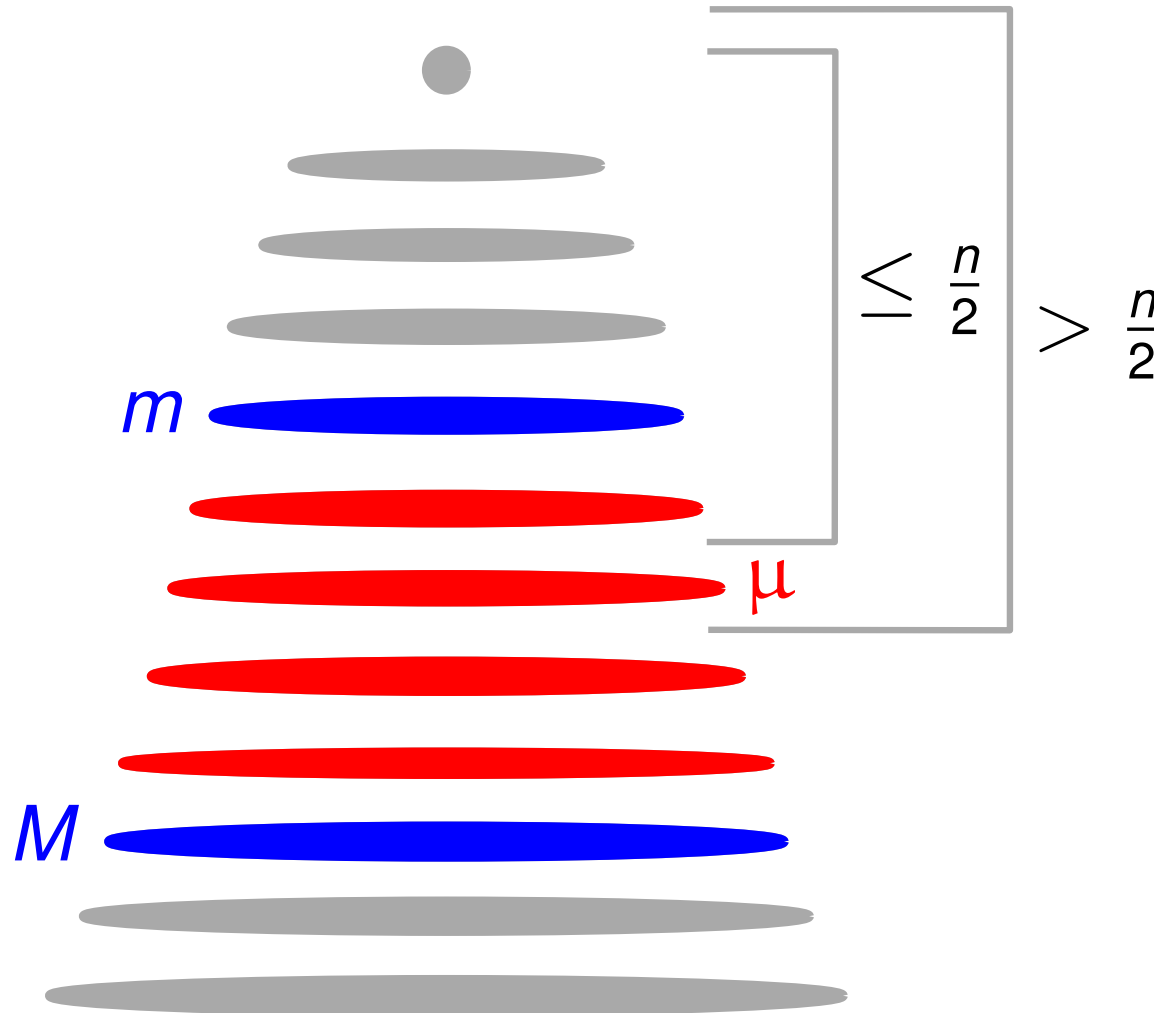
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

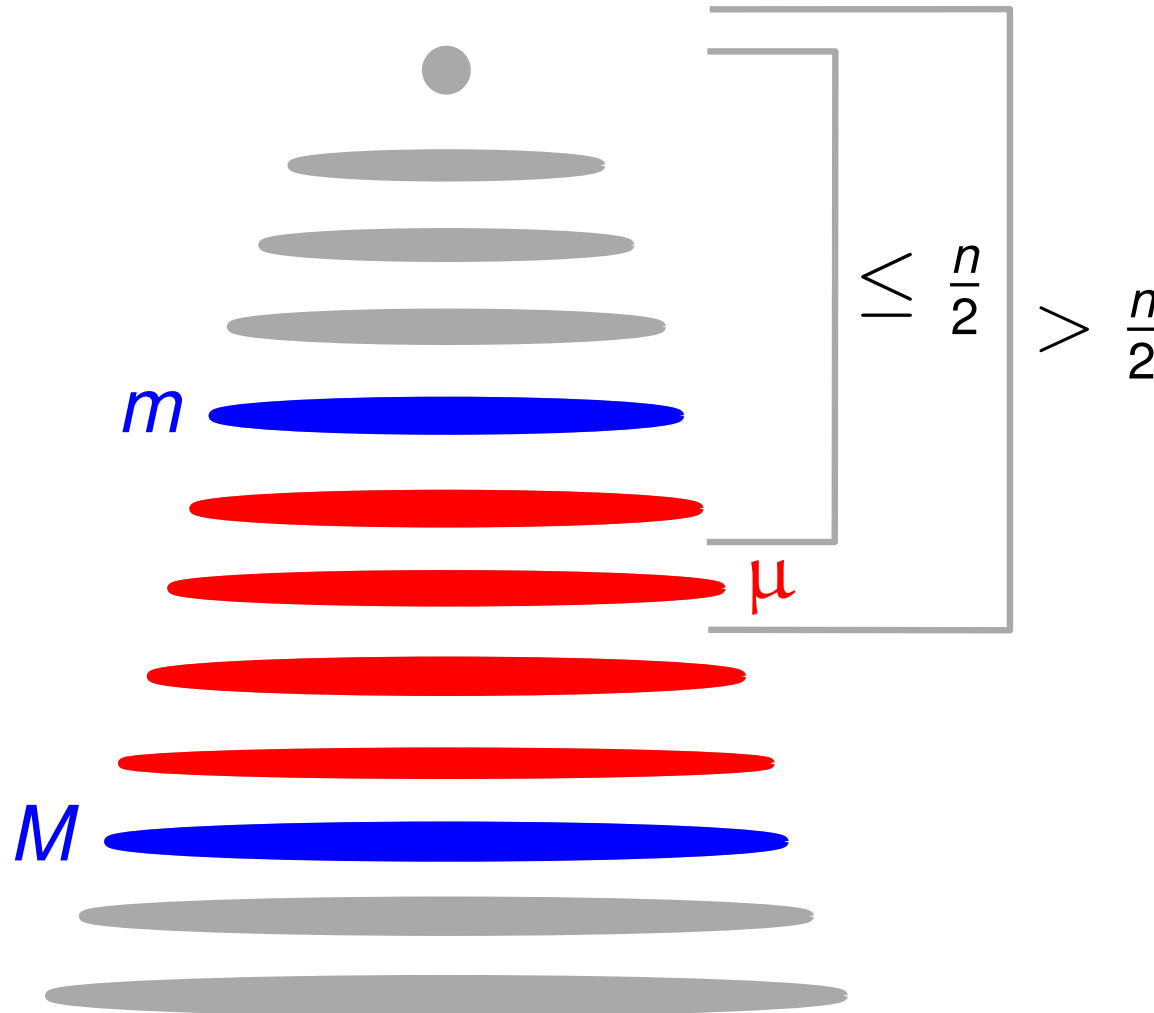
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

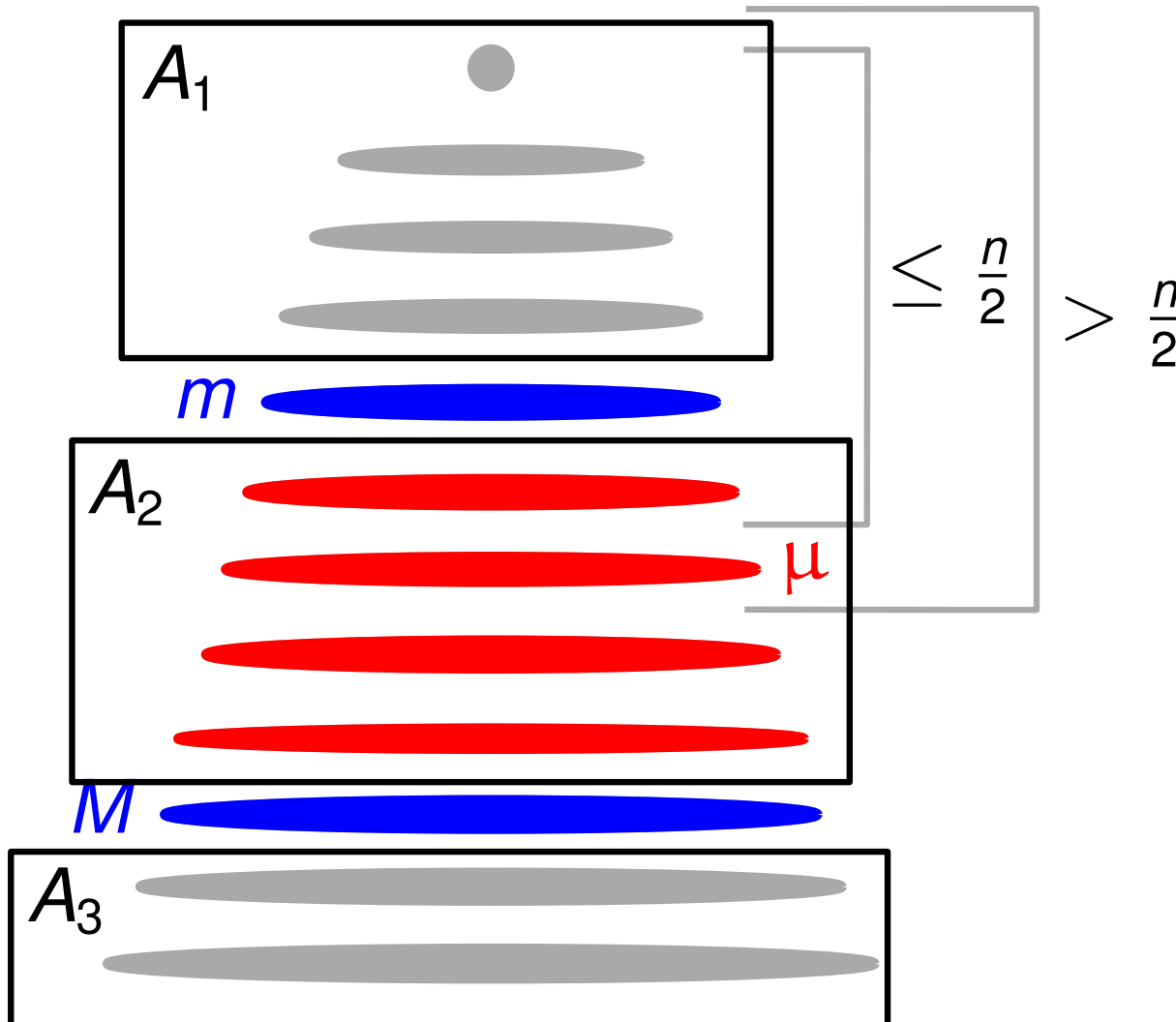
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

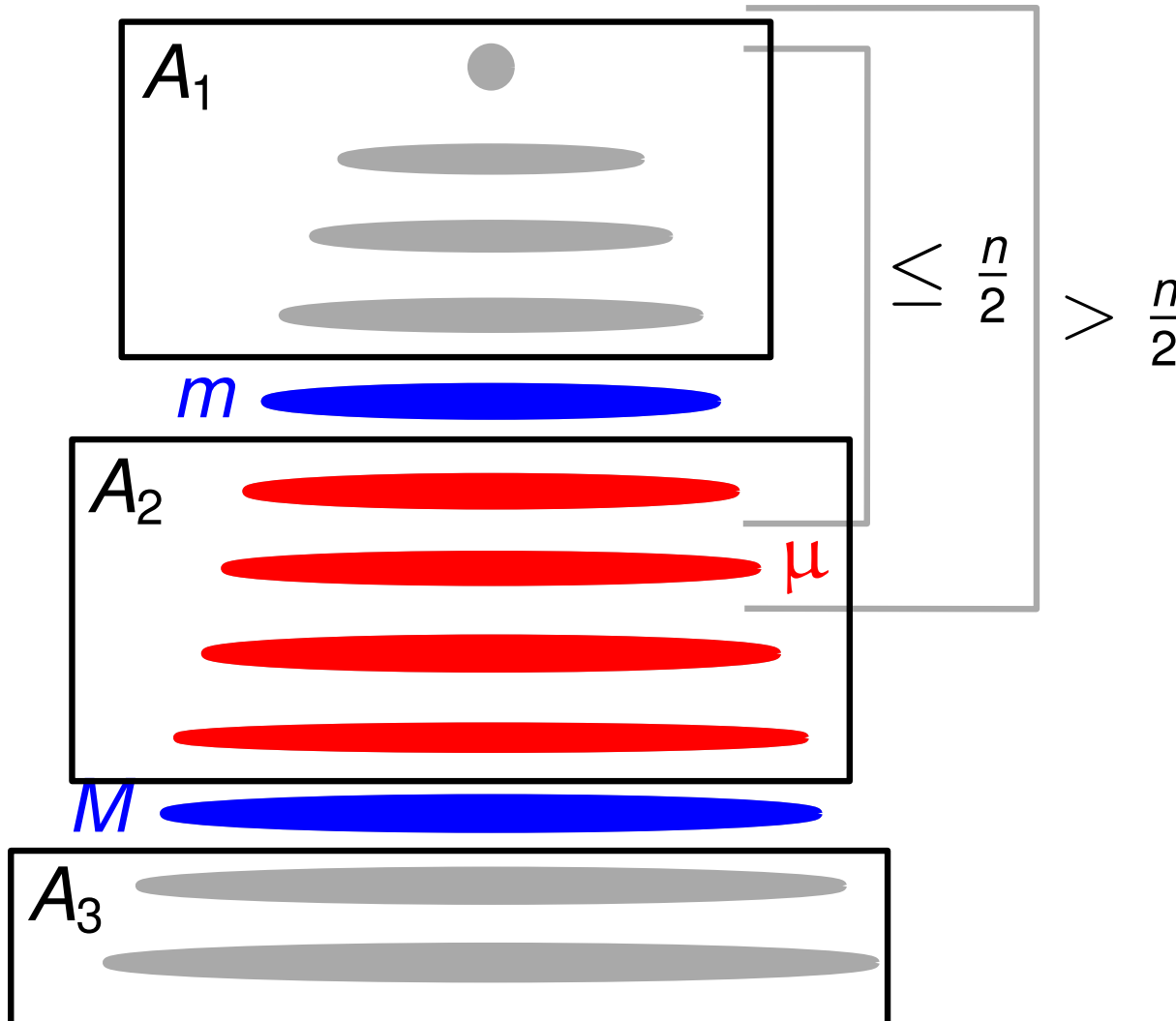
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

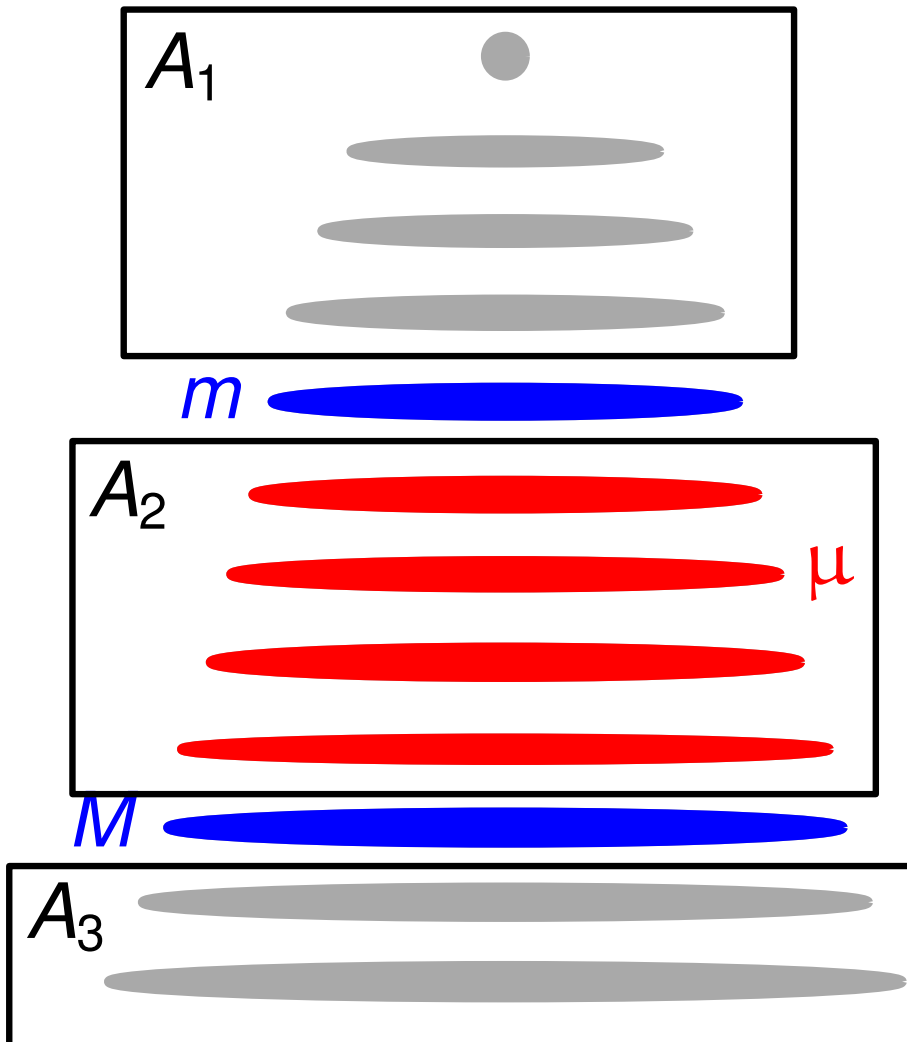
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

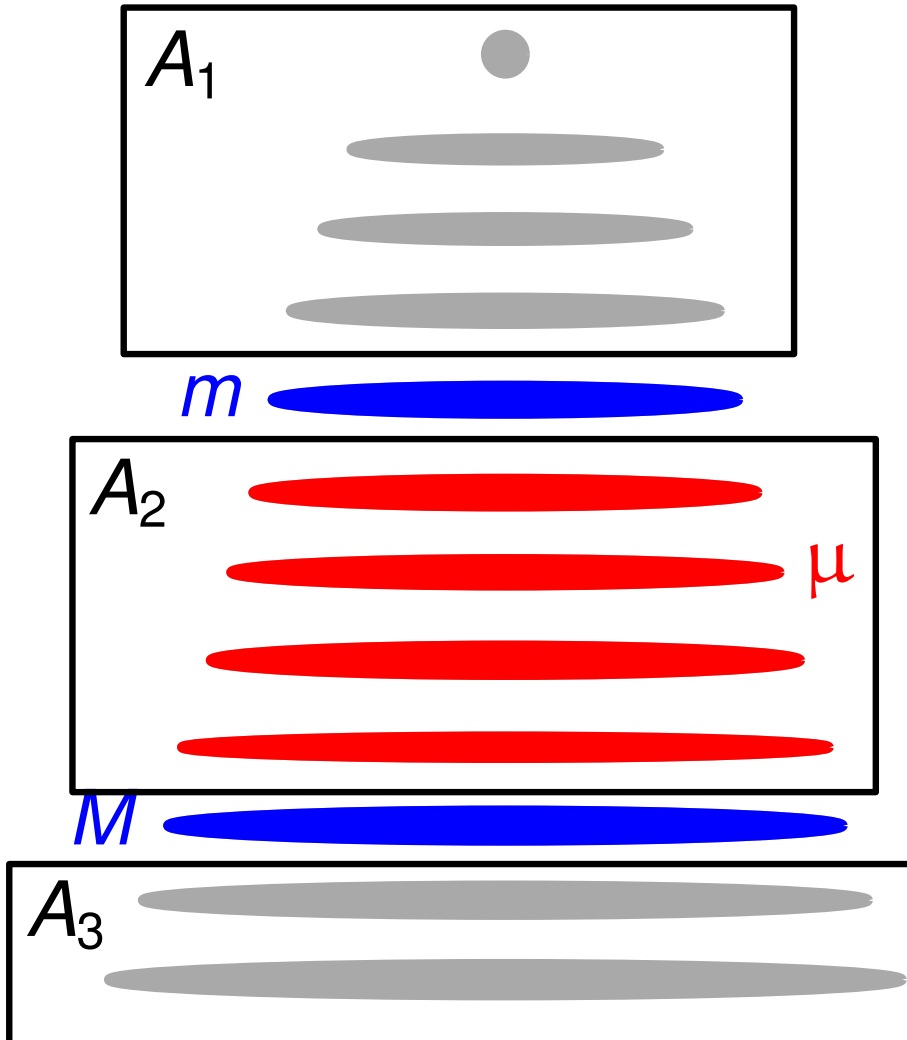
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

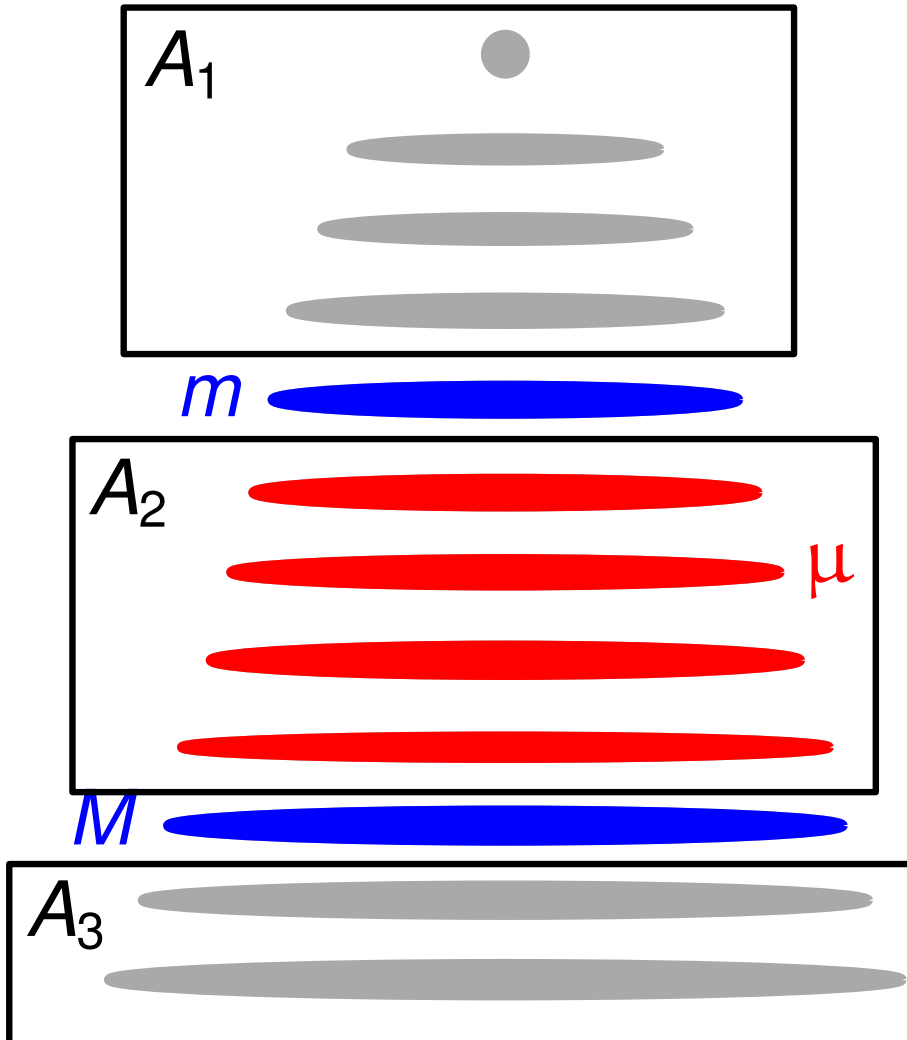


- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



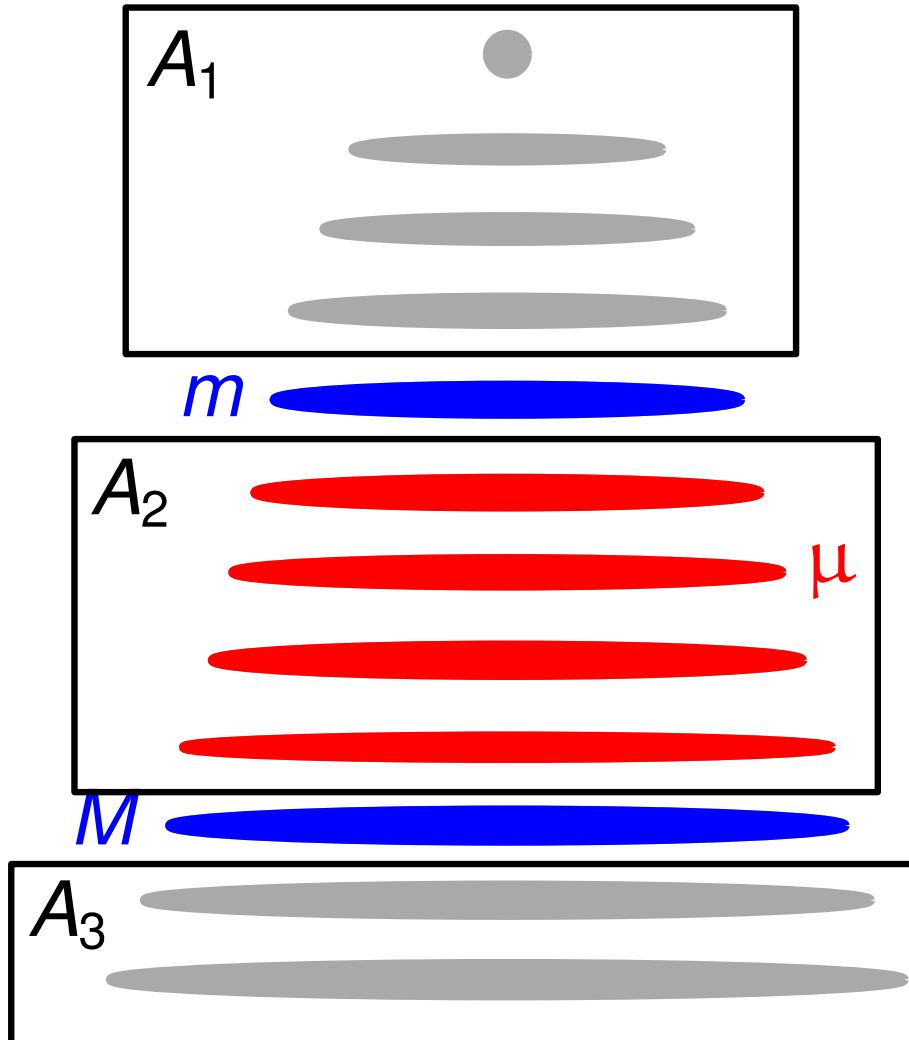
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



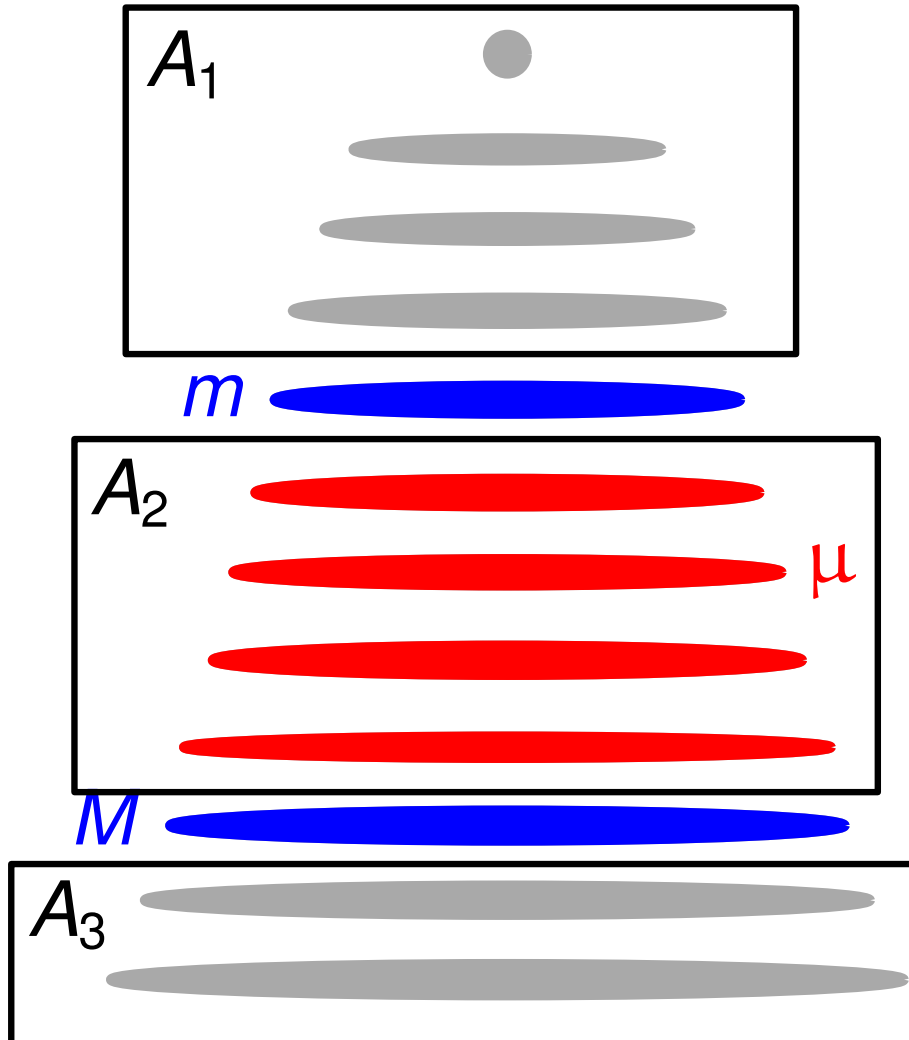
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



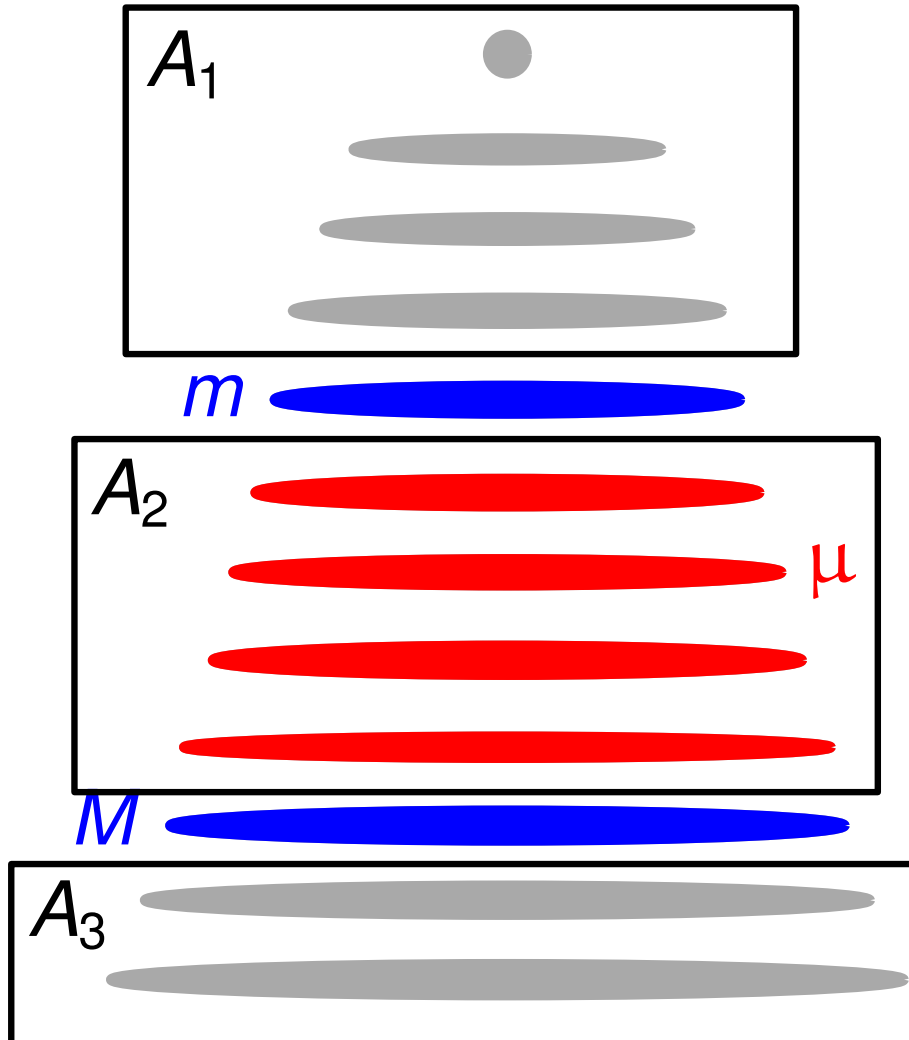
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



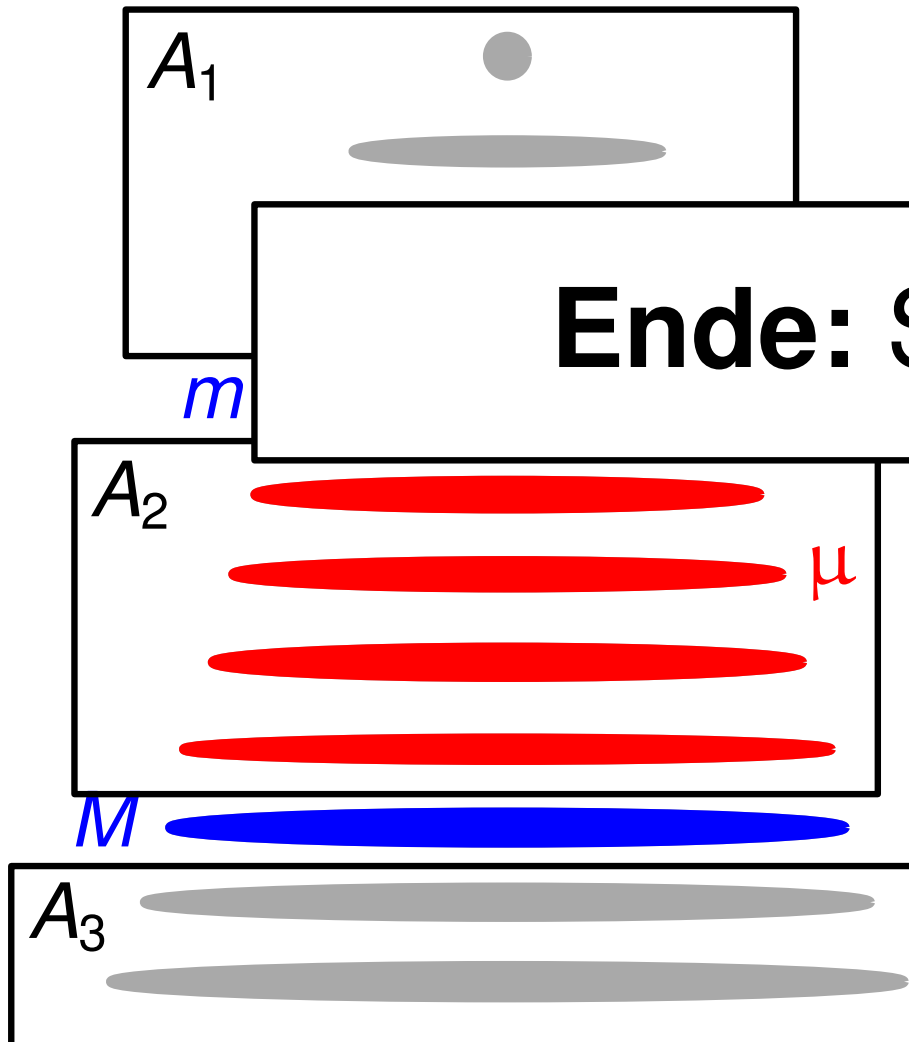
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}$, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$, $|V_2| < \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

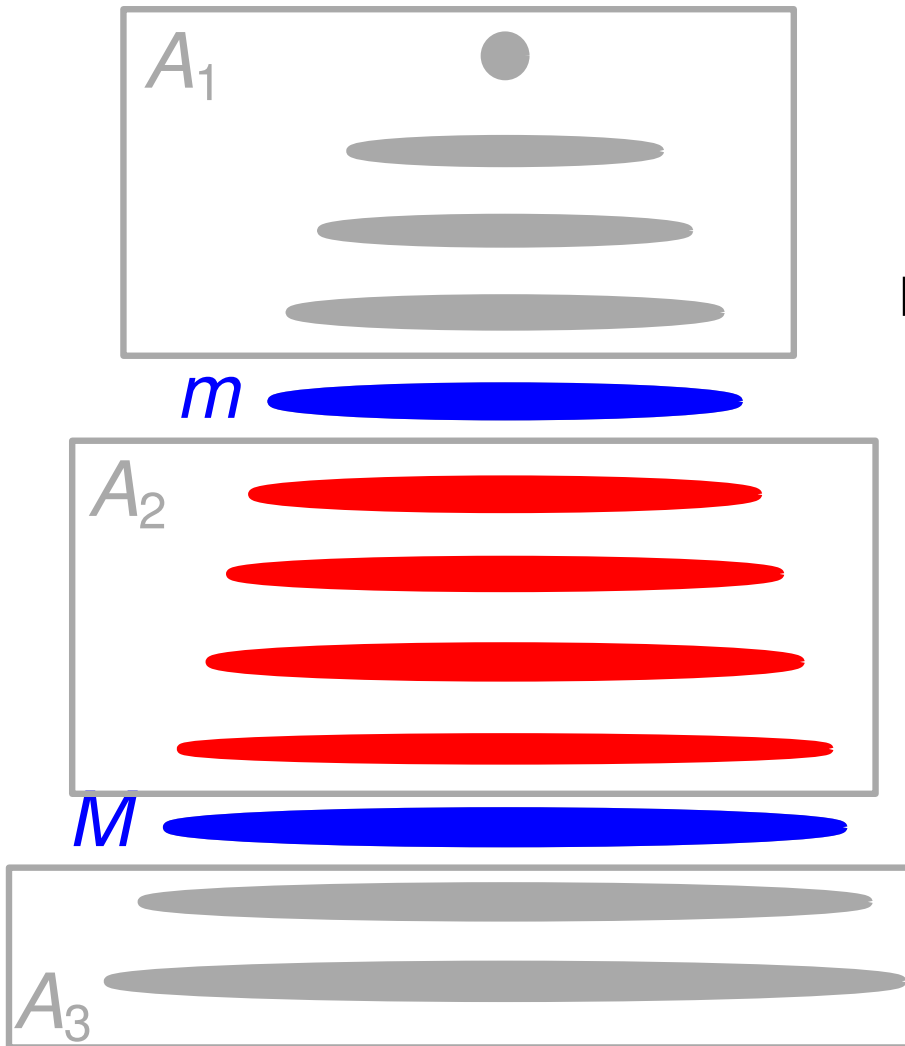
$$< \sqrt{n}$$

$$|A_3| \leq \frac{n}{2}$$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

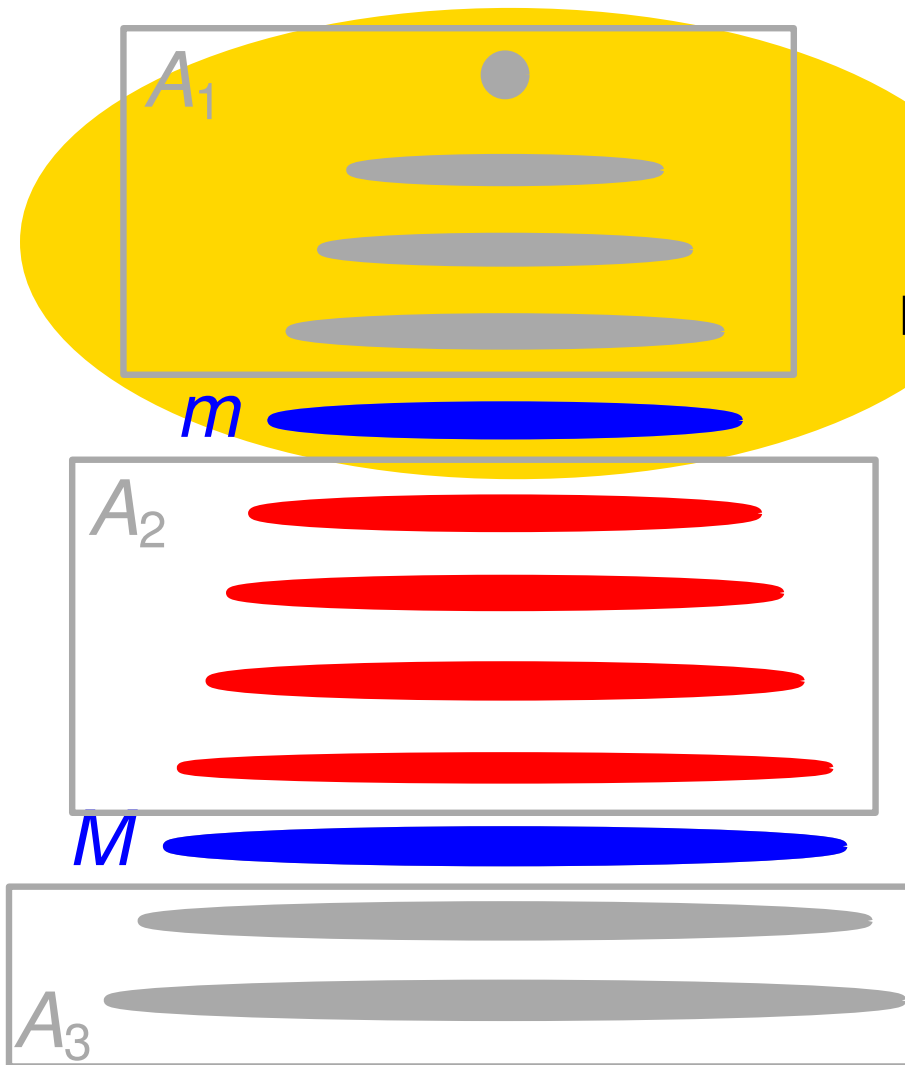
- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}$, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$, $|V_2| < \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

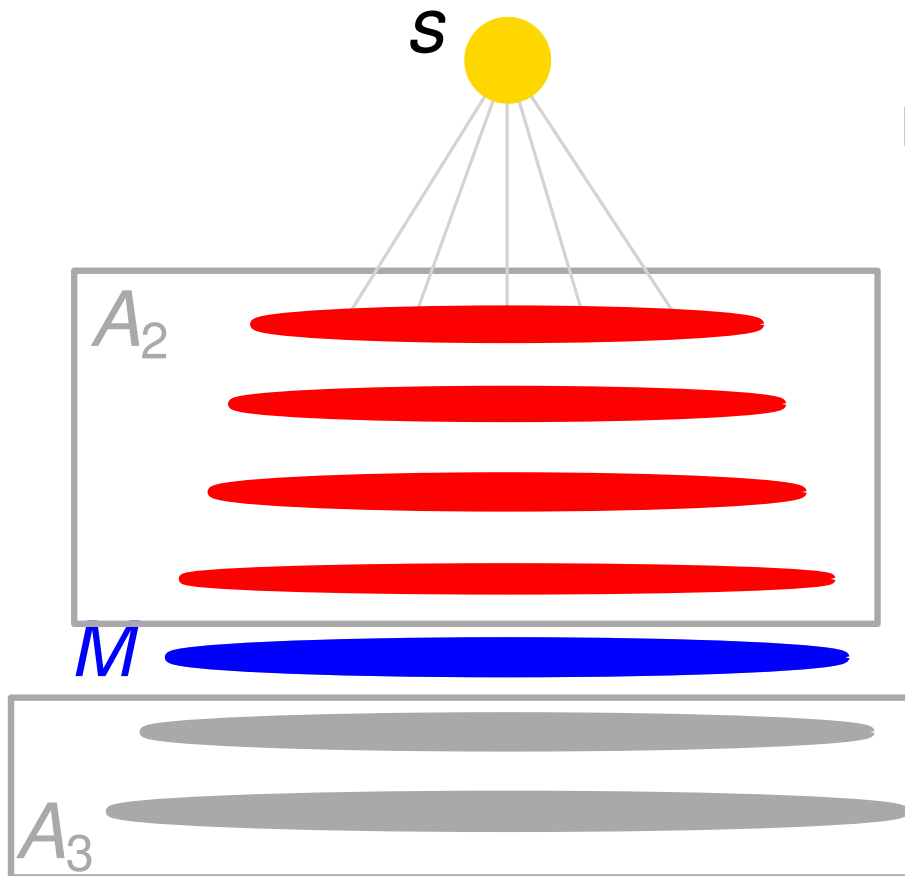


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$,
 $|level\ m| < \sqrt{n}$, $|level\ M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

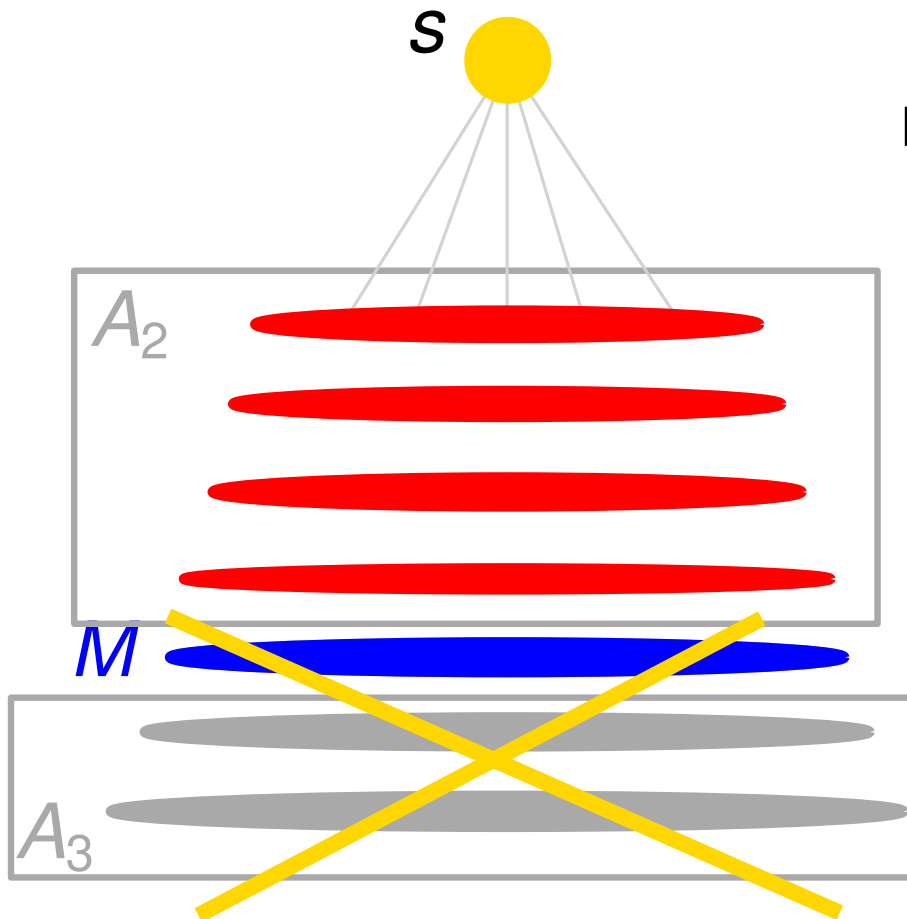
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

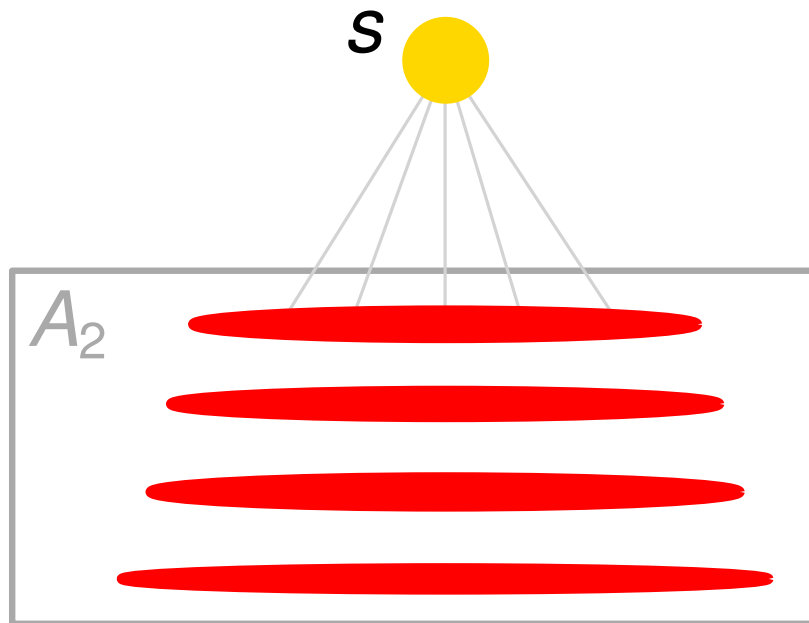
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$,
 $|level\ m| < \sqrt{n}$, $|level\ M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

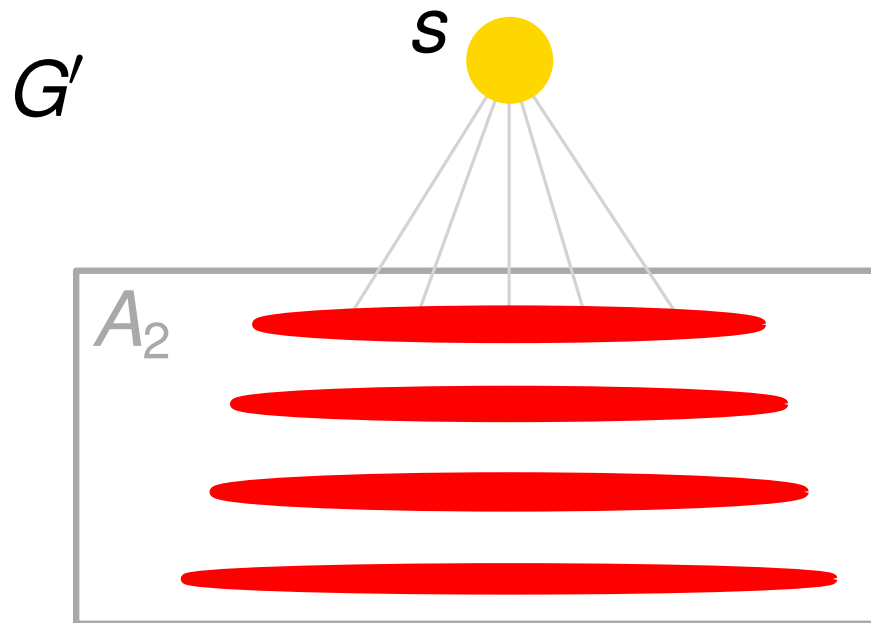
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



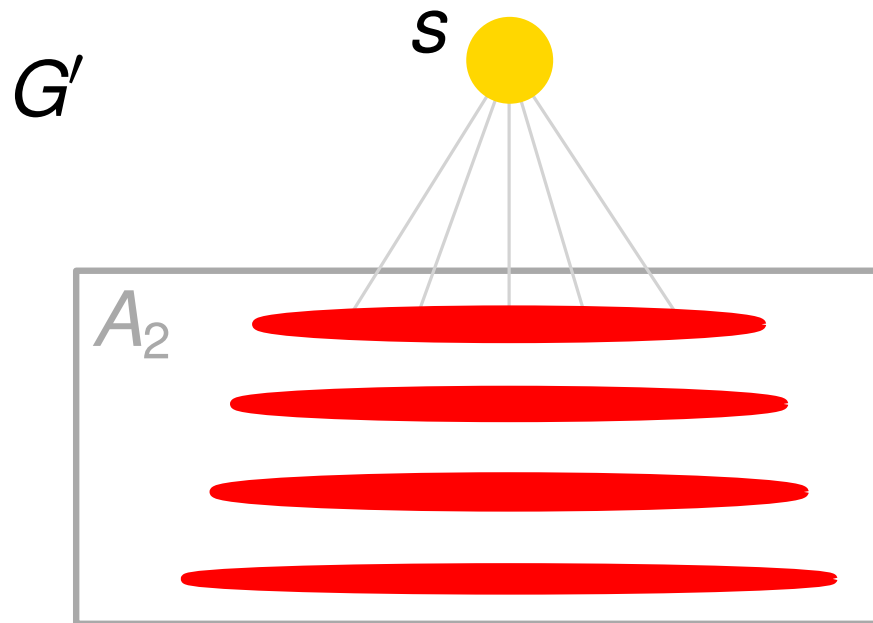
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

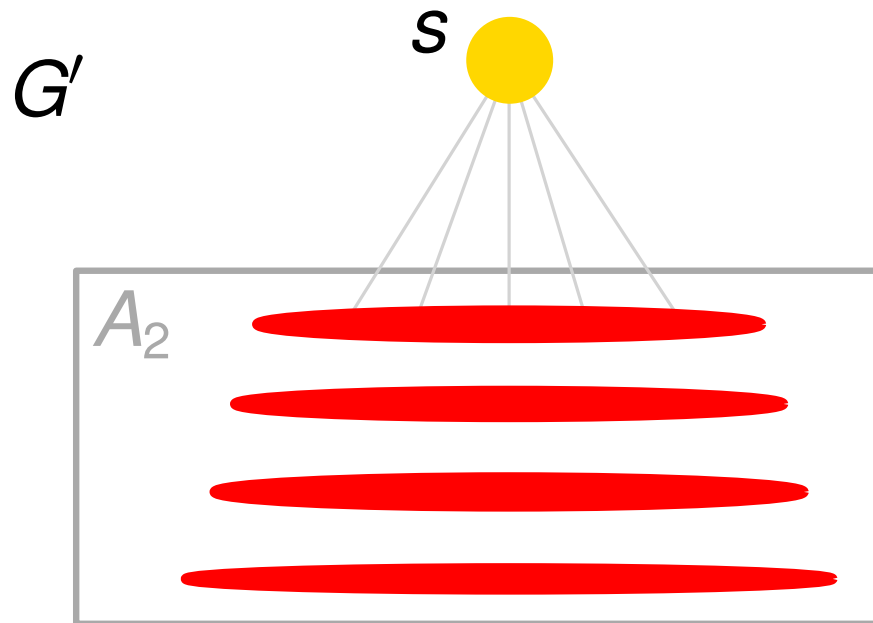


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'

Beweis des Planar-Separator-Theorem

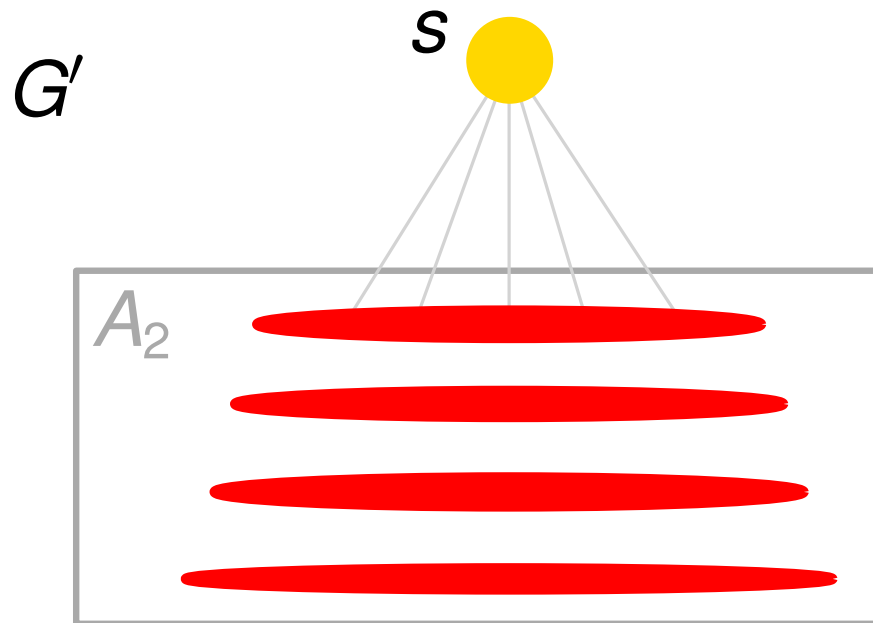


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels

Beweis des Planar-Separator-Theorem

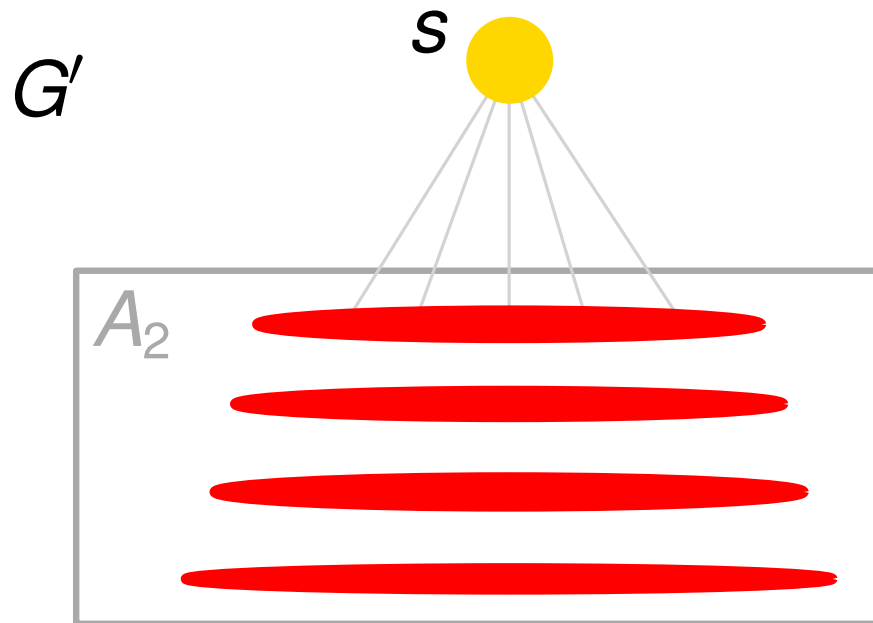


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,

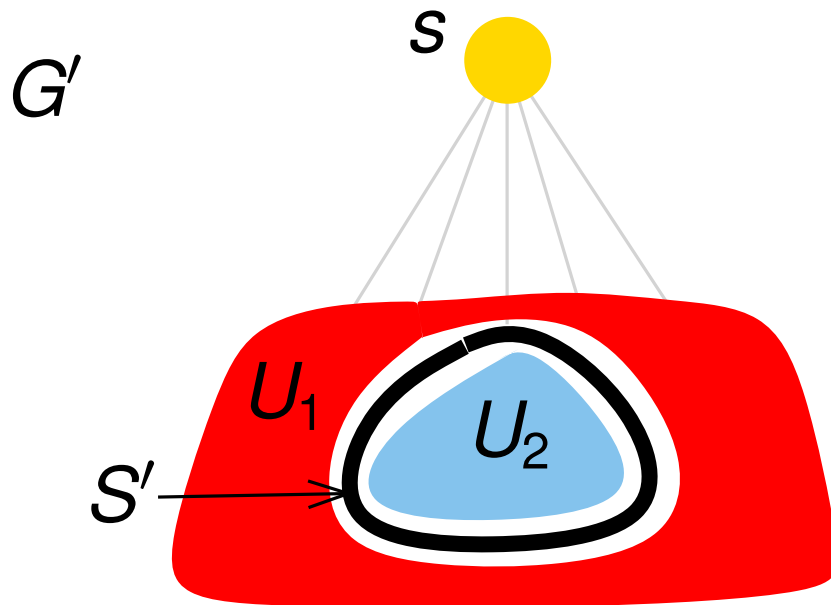
Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$



- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S', U_1, U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

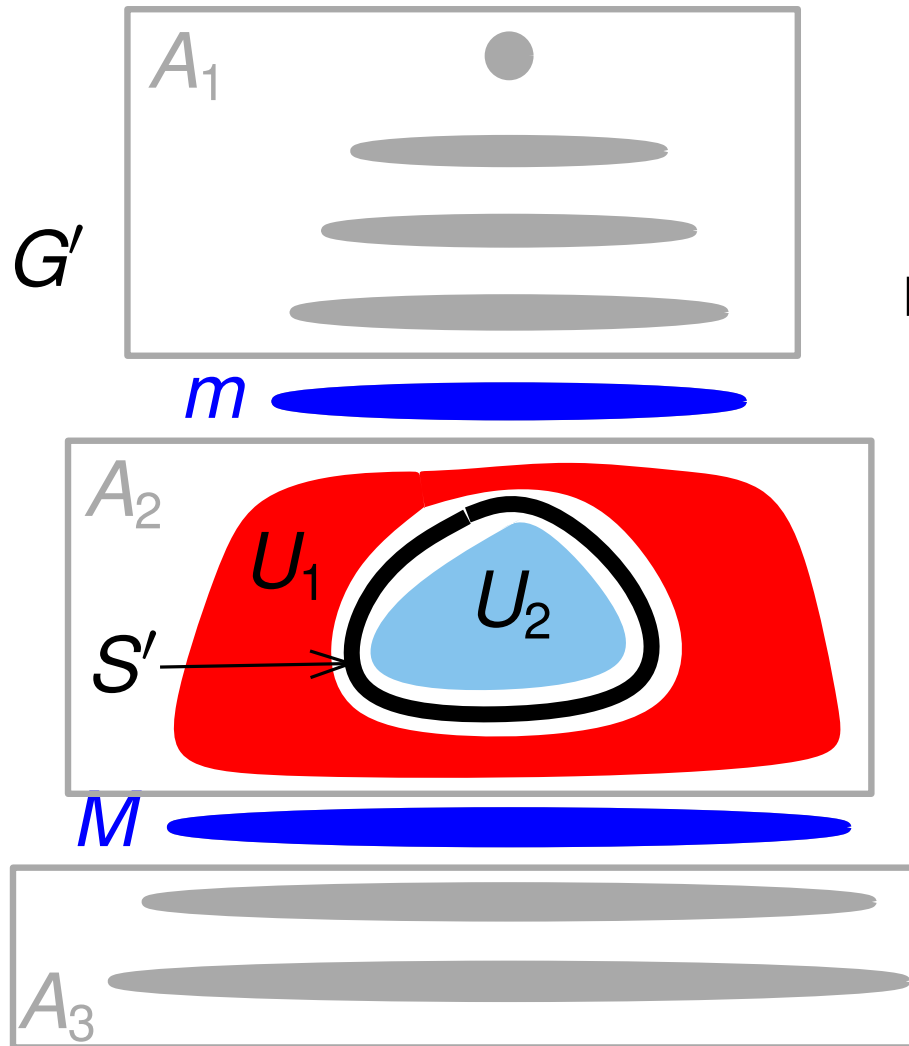


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

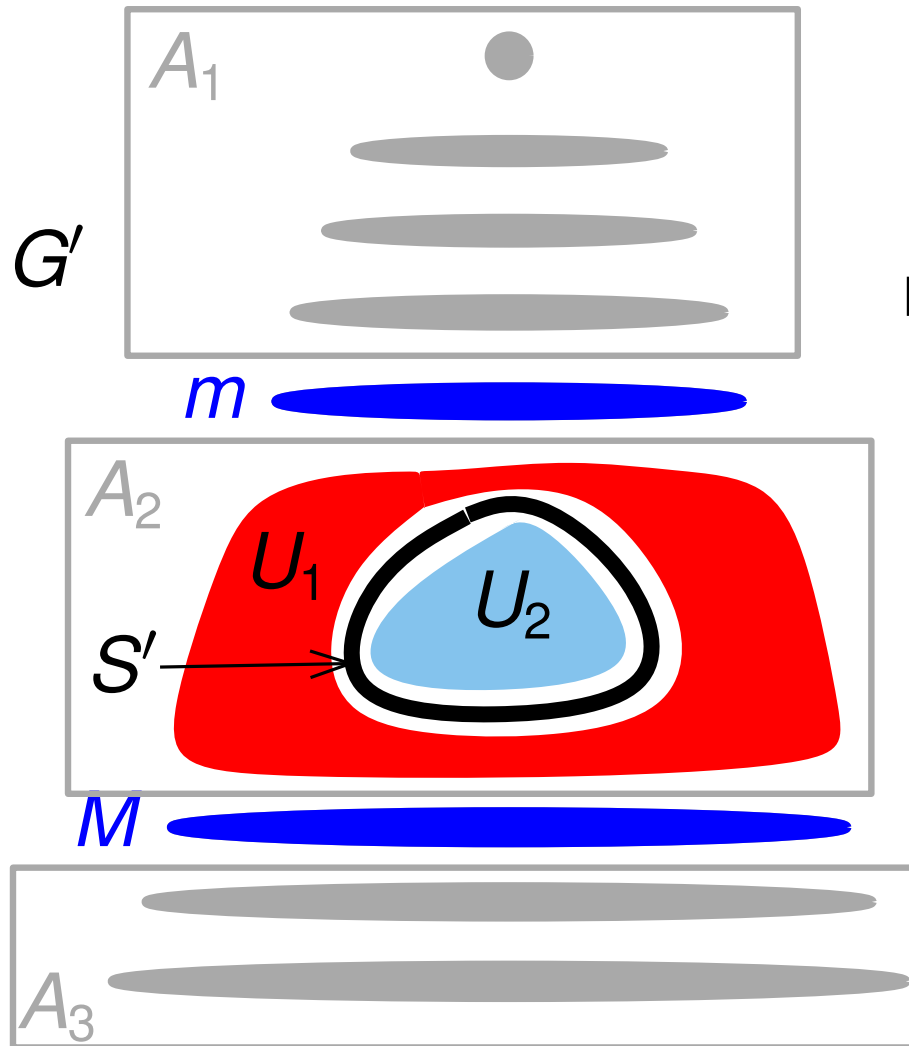


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

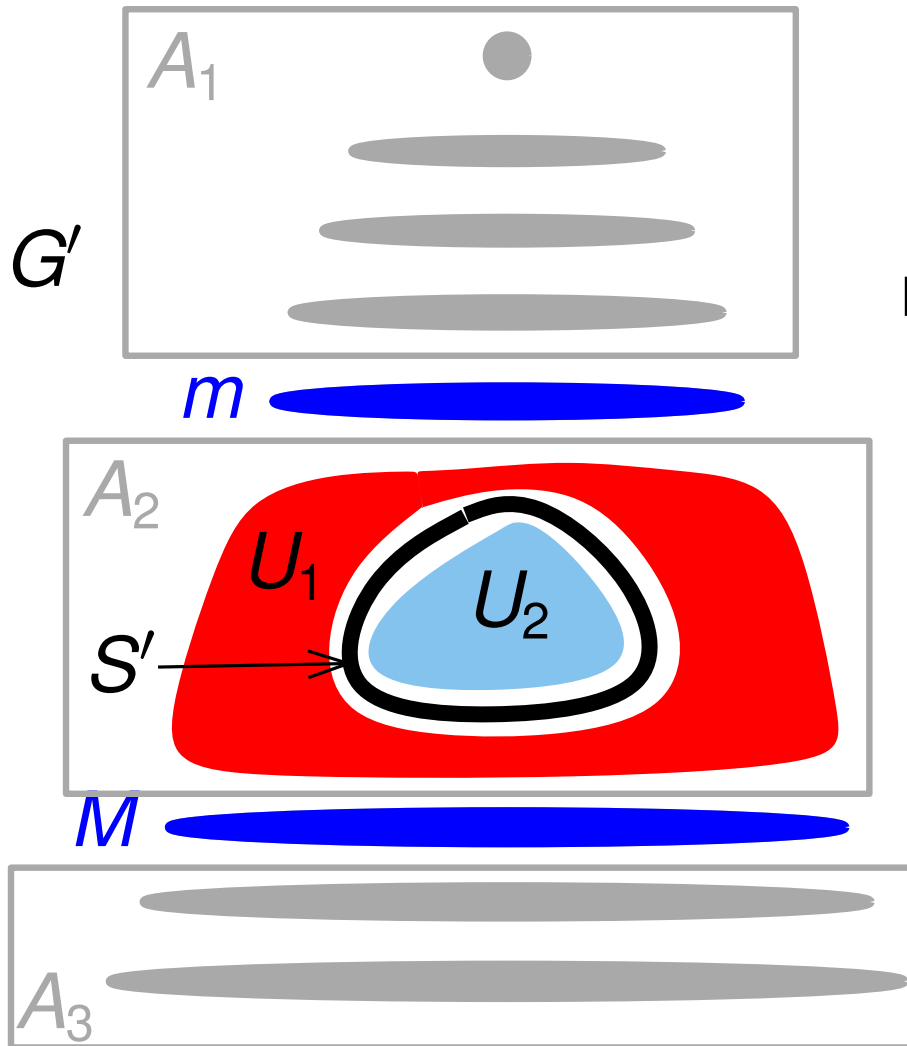


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$

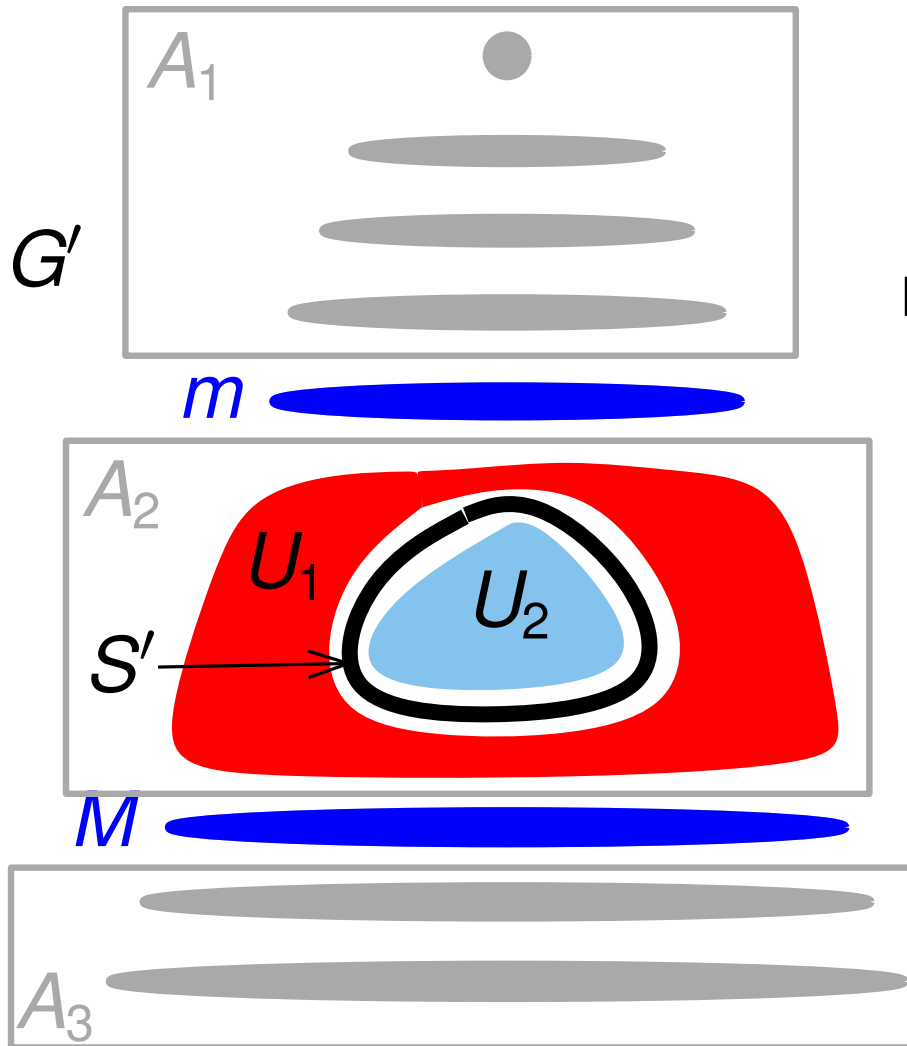
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

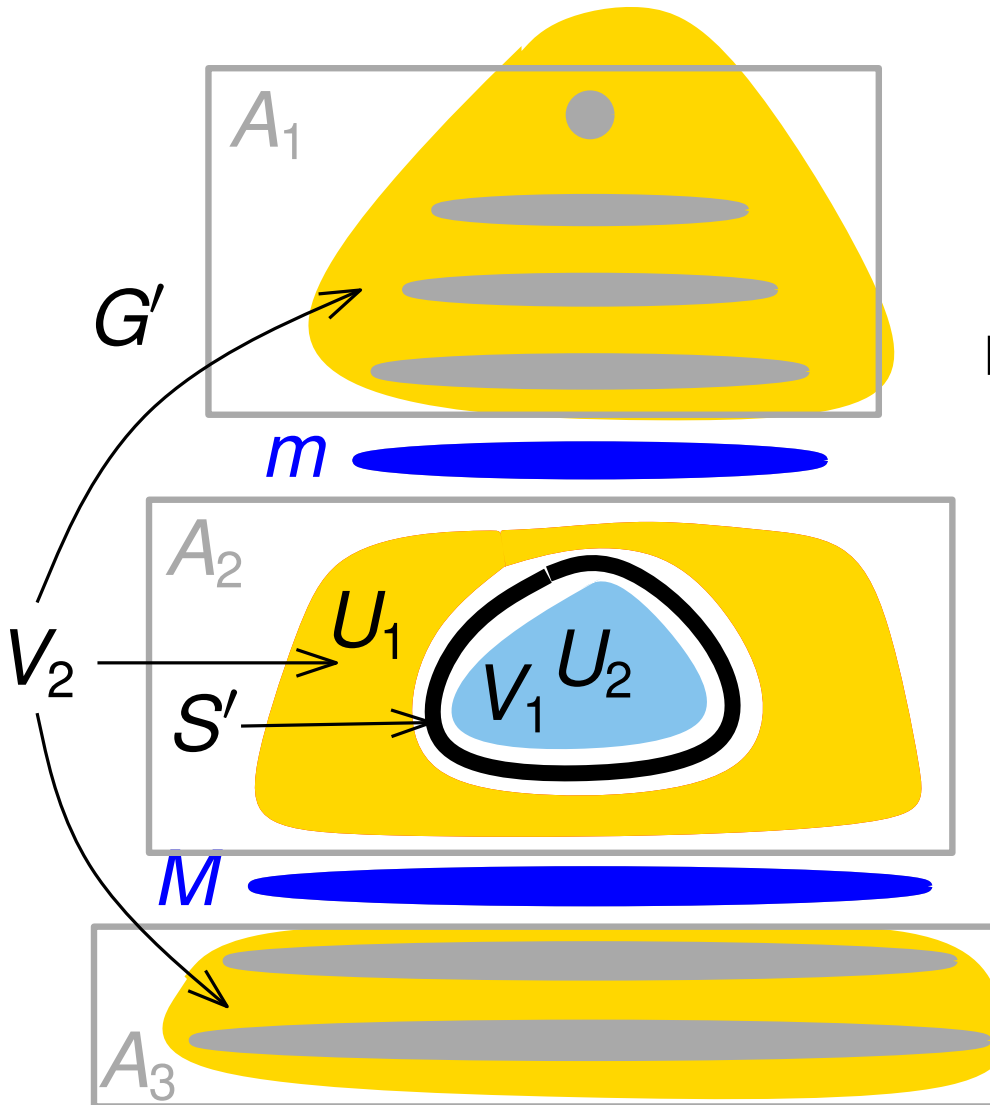
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



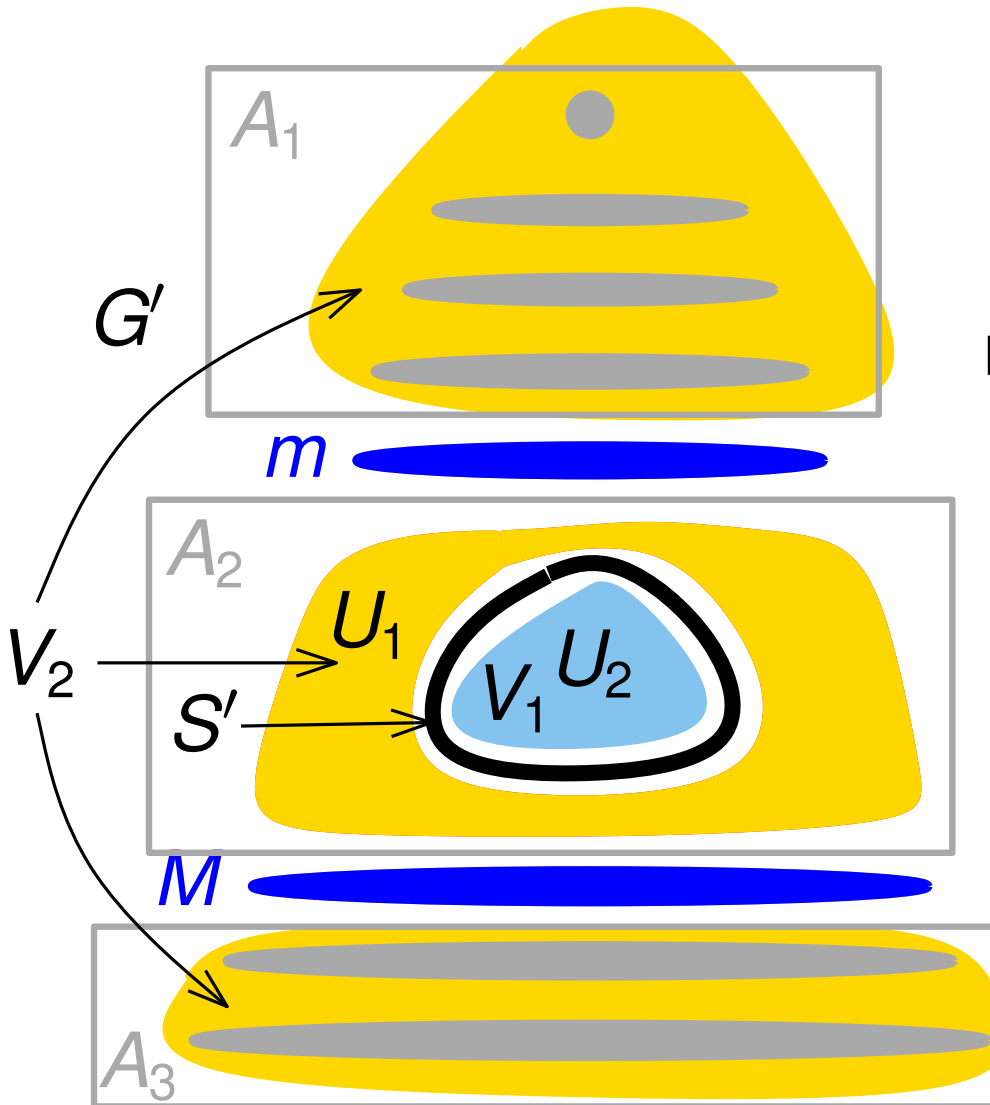
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem

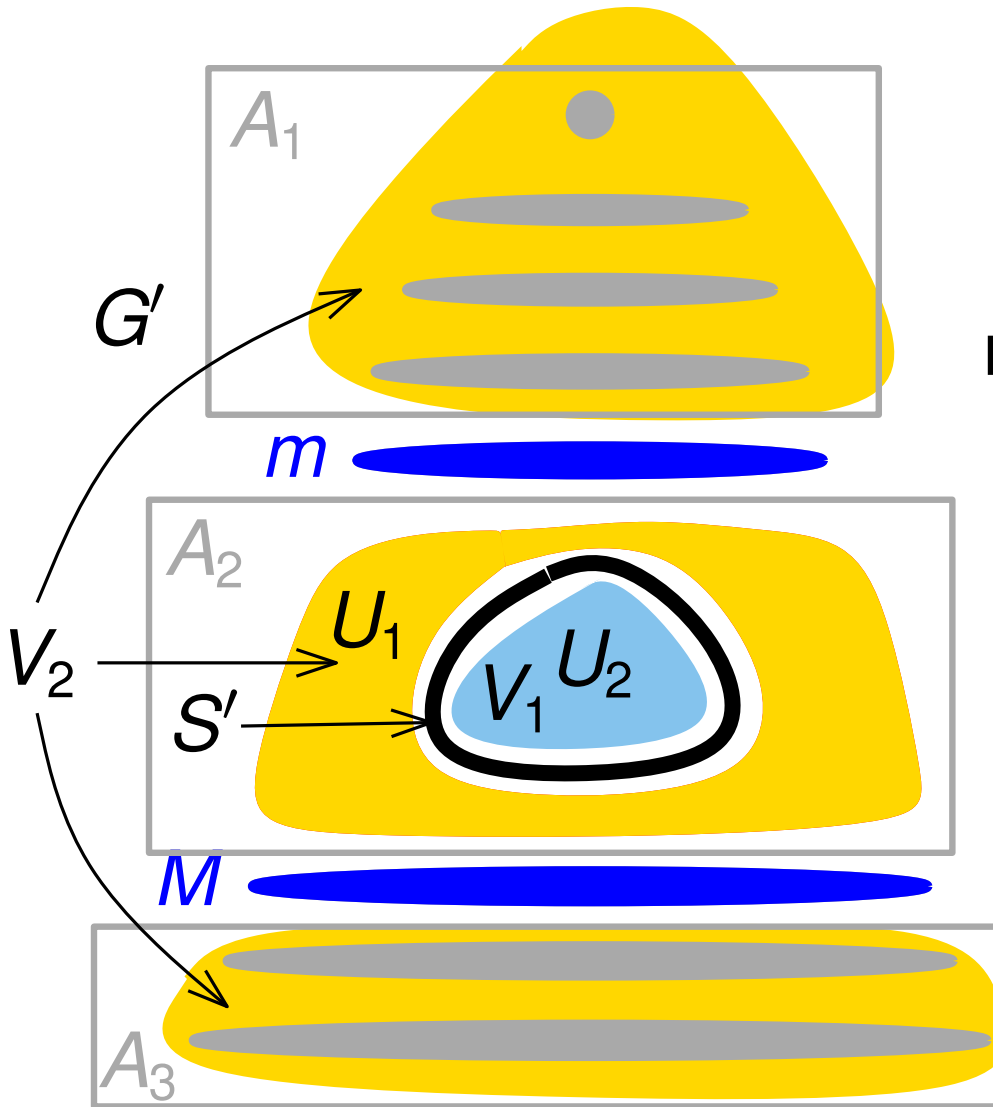


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
- Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
- $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
- Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
- $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$,
 $|V_2| = n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2}|A_2| < \frac{2}{3}n$

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph G^* . Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^*, (E \setminus E')^*)$ von G^* unzusammenhängend ist.
2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^* = (V^*, E^*)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^*, (E \setminus E')^*)$ ein aufspannender Baum von G^* ist.

Aufgabe 2

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten

2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

Aufgabe 3

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten)
3. Q_n
4. K_n
5. $K_{n,m}$

Aufgabe 4

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können.

Das heißt, gegeben zwei Knoten u und v von G , kann die Frage ob die Kante $\{u, v\}$ in G ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.

Hinweis: Richten Sie die Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.