Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Routenplanung

8. Vorlesung, Sommersemester 2018

Valentin Buchhold | 14. Mai 2018

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Kürzeste Wege in Straßennetzwerken

Beschleunigungstechniken (Fortsetzung)

Thema: Graphpartitionierung

- Exkurs: dünn besetzte Gleichungssysteme
- Wiederholung: Inertial Flow
- PUNCH
- FlowCutter

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Exkurs: dünn besetzte Gleichungssysteme

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

- Lösen großer linearer Gleichungssysteme hat viele Anwendungen
- Schnelles Lösen ist wichtig
- Algorithmus von Gauß in $O(n^3)$, wobei n die Anzahl der Variablen ist
  - Oft zu langsam

- Oft sind Gleichungssysteme dünnbesetzt
  - d. h. viele Koeffizienten sind 0
- Idee: Speichere 0-Koeffizienten nicht ab
- Aber: Wie 0-Koeffizienten während des Lösens erhalten?

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Nullen im oberen Dreieck

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gaußelimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Keine Nullen übrig $\rightarrow$:(

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Karlsruher Institut für Technologie

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alle 4 Nullen erhalten $\rightarrow$:)

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

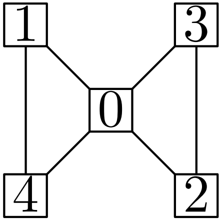
Warum funktioniert das?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

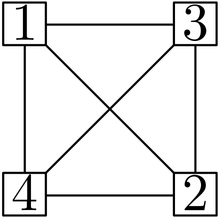
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

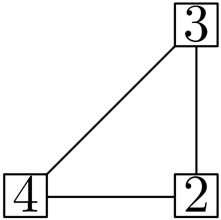


Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\
0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$



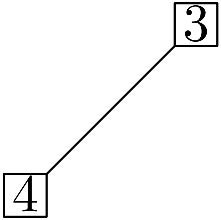
Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion

Jeder Shortcut zerstört eine Null

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$



Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

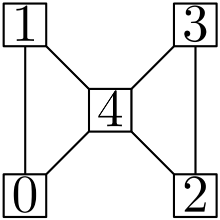
$\boxed{4}$

Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

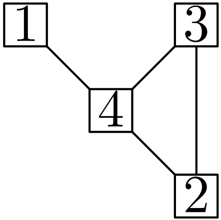


Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



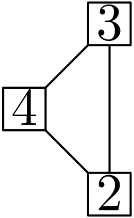
Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



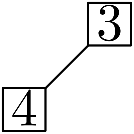
Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Karlsruher Institut für Technologie

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag, der nicht Null ist, entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$

Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

Graphpartitionierung

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

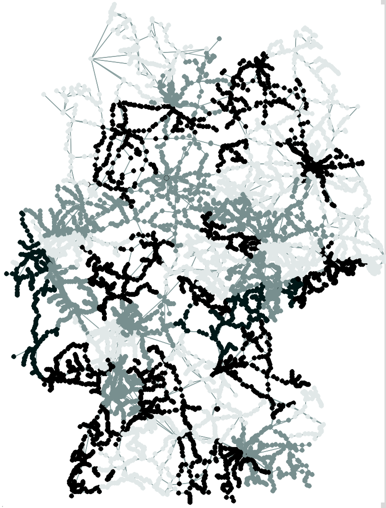
Partitionierung

Anforderungen:

- ausbalanciert
- wenige Randknoten
- zusammenhängend

Black-Box Partitionierer:

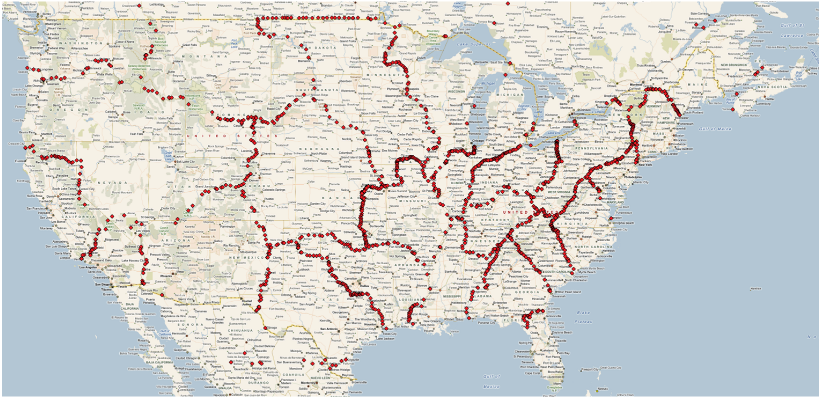
- benutzen keine Einbettung
- oft: teilen rekursiv Graphen in k Teile mit kleinem Schnitt
- lassen sich auf eine Vielzahl Graphklassen anwenden
- heute: spezielle Straßengraph-Partitionierer



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Graph Partitionierung

- Informell: teile Graphen in lose verbundene Regionen (Zellen).



Graph Partitionierung

- Formale Definition:
  - Eingabe: ungerichteter Graph $G = (V, E)$
  - Ausgabe: Partition von V in Zellen $V_1, V_2, \dots, V_k$
  - Ziel: minimale Anzahl Kanten zwischen Zellen
- Standard Variante: $|V_i| \leq U$ für festes U:
  - Anzahl Zellen kann variieren ($\geq \lceil n/U \rceil$).
- Balancierte Variante: k Zellen und Unausgeglichenheit ϵ:
  - genau k Zellen (können nicht zusammenhängend sein), Größe $\leq (1 + \epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Graph Partitionierung

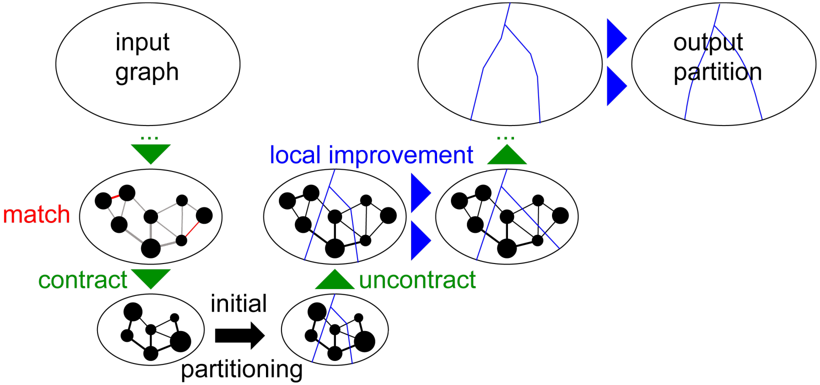
- Formale Definition:
  - Eingabe: ungerichteter Graph $G = (V, E)$
  - Ausgabe: Partition von V in Zellen $V_1, V_2, \dots, V_k$
  - Ziel: minimale Anzahl Kanten zwischen Zellen
- Standard Variante: $|V_i| \leq U$ für festes U:
  - Anzahl Zellen kann variieren ($\geq \lceil n/U \rceil$).
- Balancierte Variante: k Zellen und Unausgeglichenheit ϵ:
  - genau k Zellen (können nicht zusammenhängend sein), Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

beides NP schwer $\Rightarrow$ benutze Heuristiken

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Black-Box Partitionierer

- METIS [KK99]
- SCOTCH [PR96]
- DiBaP [MMS09]
- Kappa [HSS10], KaSPar [OS10], Kaffpa [SS11], KaffpaE [SS12]



Schnitte: Definitionen

Schnitt

- Partition des Graphen in 2 Teile (V_1, V_2)
- Größe: Anzahl Schnittkanten ($|S|$)

Minimaler s-t Schnitt

- entferne minimale Anzahl Kanten, so dass s und t im Graphen nicht mehr verbunden sind
- kann in maximalen Fluss überführt werden
- in Polynomialzeit zu berechnen

Dünnster Schnitt

- Schnitt mit $|S|/\min\{|V_1|, |V_2|\}$ minimal
- NP schwer

Exact Graph Bisection

- Schnitt mit $|S|$ minimal und $|V_1|, |V_2| < \lceil |V|/2 \rceil$
- NP schwer

Wiederholung: Inertial Flow

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Inertial Flow

Idee:

- Nutze geographische Einbettung
- Basiert auf Max-Flow / Min-Cut
- Berechnet eine Bipartitionierung

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Inertial Flow

Karlsruher Institut für Technologie

Idee:

- Nutze geographische Einbettung
- Basiert auf Max-Flow / Min-Cut
- Berechnet eine Bipartitionierung

Algo:

- Für beide Diagonalen, die Horizontale und die Vertikale:
  - Projiziere Knoten auf Gerade
  - Orderne Knoten nach Position
  - Mache die bn ersten/letzten Knoten zur Quelle/Senke
    (Ein typischer Wert für b ist 0.25 - 0.45)
  - Berechne einen Min-Cut
- Nimm den besten der 4 berechneten Schnitte

Inertial Flow

k-Partitionierung

- Inertial Flow teilt den Graph in zwei Teile
- Um k Teile zu erhalten gibt es folgenden einfachen Algorithmus:
  - Solange man weniger als k Teile hat:
    - Zerteile das größte Teil in zwei Teile

PUNCH

Natural Cuts

Straßengraphen: dichte Regionen (Gitter) abwechselnd mit natürlichen Schnitten

Flüsse, Berge, Wüsten, Wälder, Parks, Grenzen, Autobahnen, ...

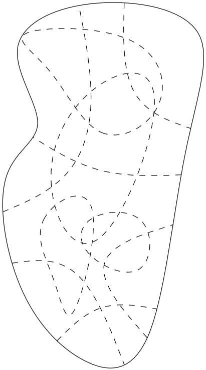
PUNCH: Partitioner Using Natural-Cut Heuristics

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Übersicht

1. Ausdünnung:
   entspricht “match + contract” auf Folie 13
   - finde natürliche Schnitte (auf richtiger Skala)
   - behalte Schnittkanten, kontrahiere alle anderen

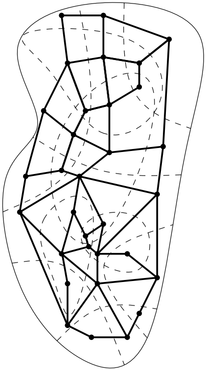
2. Zusammensetzen:
   - partitioniere (kleineren) kontrahierten Graph
     “initial partitioning”
   - greedy + lokale Suche [+ Kombinationen]
     “uncontract + local improvements”



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Übersicht

1. Ausdünnung:
   entspricht “match + contract” auf Folie 13
   - finde natürliche Schnitte (auf richtiger Skala)
   - behalte Schnittkanten, kontrahiere alle anderen
2. Zusammensetzen:
   - partitioniere (kleineren) kontrahierten Graph
     “initial partitioning”
   - greedy + lokale Suche [+ Kombinationen]
     “uncontract + local improvements”



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Finde natürliche Schnitte

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir brauchen dünne Schnitte zwischen dichten Regionen:
- Dünnster Schnitt?
  - Zu aufwendig.
- Berechne minimalen *s*-*t* Schnitt (für zufällige *s*, *t*)?
  - Meist trivial: Knotengrade sind klein.
- Wir brauchen was anderes:
  - *s*-*t* Schnitte zwischen Regionen

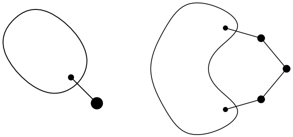
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Finde Natürliche Schnitte

1. Wähle ein Zentrum v.
2. Breitensuche der Größe U um v:
   - Erste $U/10$ Knoten: Kern
   - Verbliebene Knoten in der Queue: Ring
3. Finde minimum Kern/Ring Schnitt:
   - standard s–t minimaler Schnitt.
4. Wiederhole für verschiedene "zufällige" v:
   - bis jeder Knoten in ≥ 2 Kernen war

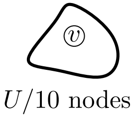
Berechene kleine Schnitte extra:

- identifiziere 1- and 2-Schnitte
- reduziert Straßengraph um Faktor 2
- beschleunigt Schnittfindung



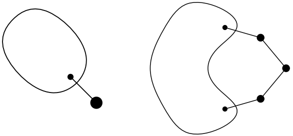
Finde Natürliche Schnitte

1. Wähle ein Zentrum v.
2. Breitensuche der Größe U um v:
   - Erste $U/10$ Knoten: Kern
   - Verbliebene Knoten in der Queue: Ring
3. Finde minimum Kern/Ring Schnitt:
   - standard s–t minimaler Schnitt.
4. Wiederhole für verschiedene "zufällige" v:
   - bis jeder Knoten in ≥ 2 Kernen war



Berechene kleine Schnitte extra:

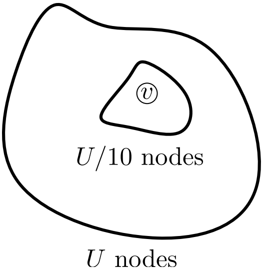
- identifiziere 1- and 2-Schnitte
- reduziert Straßengraph um Faktor 2
- beschleunigt Schnittfindung



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

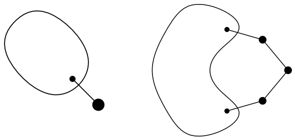
Finde Natürliche Schnitte

1. Wähle ein Zentrum v.
2. Breitensuche der Größe U um v:
   - Erste $U/10$ Knoten: Kern
   - Verbliebene Knoten in der Queue: Ring
3. Finde minimum Kern/Ring Schnitt:
   - standard s–t minimaler Schnitt.
4. Wiederhole für verschiedene "zufällige" v:
   - bis jeder Knoten in ≥ 2 Kernen war



Berechene kleine Schnitte extra:

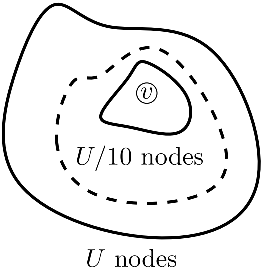
- identifiziere 1- and 2-Schnitte
- reduziert Straßengraph um Faktor 2
- beschleunigt Schnittfindung



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

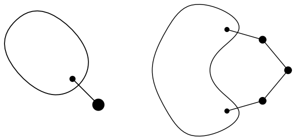
Finde Natürliche Schnitte

1. Wähle ein Zentrum v.
2. Breitensuche der Größe U um v:
   - Erste $U/10$ Knoten: Kern
   - Verbliebene Knoten in der Queue: Ring
3. Finde minimum Kern/Ring Schnitt:
   - standard s–t minimaler Schnitt.
4. Wiederhole für verschiedene "zufällige" v:
   - bis jeder Knoten in ≥ 2 Kernen war



Berechene kleine Schnitte extra:

- identifiziere 1- and 2-Schnitte
- reduziert Straßengraph um Faktor 2
- beschleunigt Schnittfindung

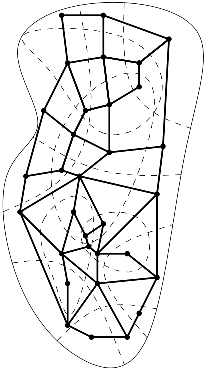


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Eigenschaften der Ausdünung

1. viele Kanten werden nie geschnitten
2. Schnittkanten partitionieren den Graphen in Fragmente
3. Fragmentgröße $\leq U$ (meist viel kleiner)

- Generiere Fragmentgraph:
  - Fragment $\rightarrow$ gewichteter Knoten
  - benachbarte Fragmente $\rightarrow$ gewichtete Kante



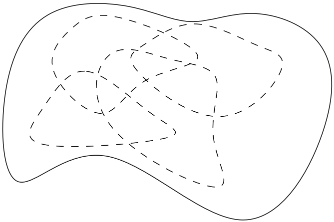
U	**fragments**	**frag size**
4 096	605 864	30
65 536	104 410	173
1 048 576	10 045	1 793

(Europe: 18M nodes)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktionsphase

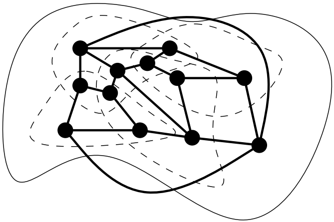
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

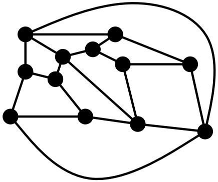
Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
    - starte mit isolierten Fragmenten;



Konstruktionsphase

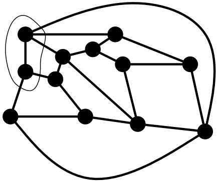
- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit isolierten Fragmenten;
  - kombiniere adjazente Zellen;



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

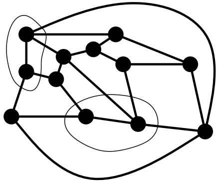
Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit isolierten Fragmenten;
  - kombiniere adjazente Zellen;



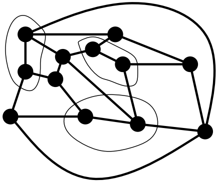
Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit isolierten Fragmenten;
  - kombiniere adjazente Zellen;



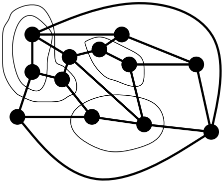
Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
    - starte mit isolierten Fragmenten;
    - kombiniere adjazente Zellen;



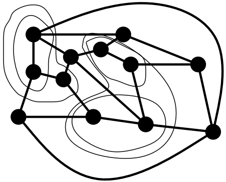
Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit isolierten Fragmenten;
  - kombiniere adjazente Zellen;



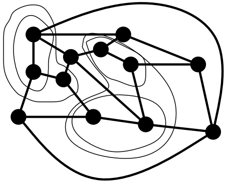
Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit isolierten Fragmenten;
  - kombiniere adjazente Zellen;
  - stoppe wenn maximal.



Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit isolierten Fragmenten;
  - kombiniere adjazente Zellen;
  - stoppe wenn maximal.

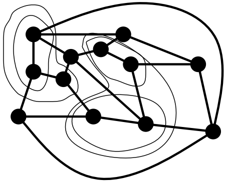


- Zufällig greedy:
  - füge Fragmente zusammen, die stärker verbunden...
  - ...im Verhältnis zu ihrer Größe (= # Knoten, die sie repräsentieren).

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Konstruktionsphase

- Fragmentgröße deutlich unterhalb von U, Schnitt unnötig groß
- Finde bessere Partition durch Zusammenfassen von Fragmenten
- Algorithmus:
  - starte mit isolierten Fragmenten;
  - kombiniere adjazente Zellen;
  - stoppe wenn maximal.



- Zufällig greedy:
  - füge Fragmente zusammen, die stärker verbunden...
  - ...im Verhältnis zu ihrer Größe (= # Knoten, die sie repräsentieren).

Ergebnis okay, aber es geht besser.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Lokale Suche

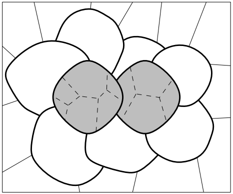
(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Lokale Suche

(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.

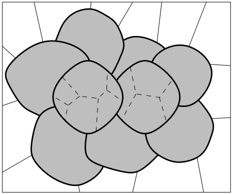


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Lokale Suche

(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.



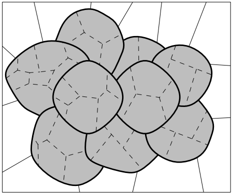
- Variante benutzt auch Nachbarzellen:
  - mehr Flexibilität;
  - beste Ergebnisse (Standard).

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Lokale Suche

(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.

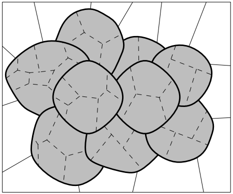


- Variante benutzt auch Nachbarzellen:
  - mehr Flexibilität;
  - beste Ergebnisse (Standard).
- Nachbarzellen können auch in Fragmente zerteilt werden:
  - Subprobleme zu groß;
  - schlechtere Ergebnisse.

Lokale Suche

(Lokale Reoptimierung auf teilweise entpacktem Graphen)

- Für paarweise benachbarte Zellen:
  - Zerteilung in Fragmente;
  - lass konstruktiven, randomisierten Algorithmus auf Subproblem laufen;
  - behalte Lösung wenn besser.



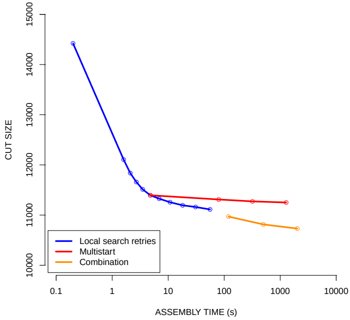
- Variante benutzt auch Nachbarzellen:
  - mehr Flexibilität;
  - beste Ergebnisse (Standard).
- Nachbarzellen können auch in Fragmente zerteilt werden:
  - Subprobleme zu groß;
  - schlechtere Ergebnisse.

Evaluiere jedes Subproblem mehrmals (mit Zufall).

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Weitere Verbesserungen

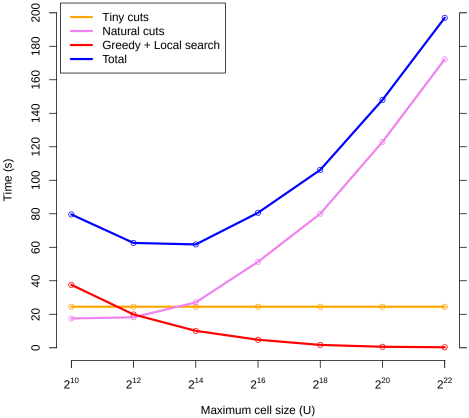
- Mehrfacher Test für jedes Paar
  - lokale Suche hat Zufallskomponenten
- Multistart:
  - konstruktiv + lokale Suche;
  - behalte beste Lösung.
- Kombination:
  - kombiniere manche Lösungen;
  - merge + lokale Suche.



(Europe, U = 2^{16})

längere Laufzeit → bessere Lösungen

Laufzeit



Europe (18M vertices), 12 cores

Flaschenhälse: Aufbau für kleine U, Ausdünnung für große U

Qualität

U	A	B	$B/\sqrt{U}$	$B/\sqrt[3]{U}$
1 024	895	16.8	0.52	1.66
4 096	3 602	27.6	0.43	1.73
16 384	14 437	45.6	0.36	1.80
65 536	57 376	72.7	0.28	1.80
262 144	222 626	103.7	0.20	1.62
1 048 576	826 166	134.3	0.13	1.32
4 194 304	3 105 245	127.9	0.06	0.79

(Europe, 16 retries, no multistart/combination)

U: maximal erlaubte Zellengröße

A: durchschn. Zellengröße der Lösungen

B: durchschn. Randknoten pro Zelle

Straßengraphen haben sehr kleine Separatoren

Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

1. benutze Standard-PUNCH
   mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen,
   verteile den Rest (Multistart)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

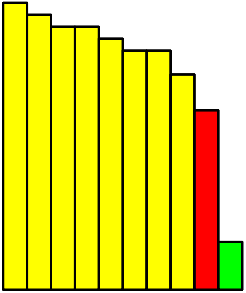
Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

1. benutze Standard-PUNCH mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

1. benutze Standard-PUNCH mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

1. benutze Standard-PUNCH
   mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen,
   verteile den Rest (Multistart)

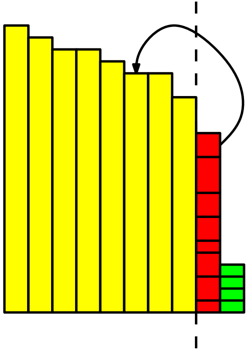
Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

1. benutze Standard-PUNCH mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen, verteile den Rest (Multistart)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

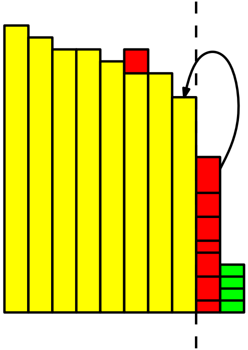
Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

1. benutze Standard-PUNCH
   mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen,
   verteile den Rest (Multistart)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

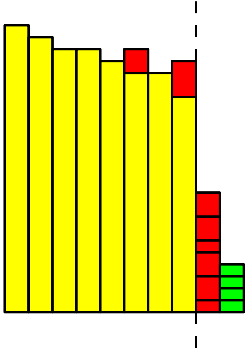
Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

1. benutze Standard-PUNCH
   mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen,
   verteile den Rest (Multistart)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

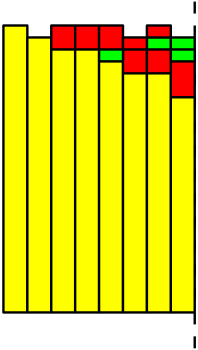
Balancierte Partitionen

Andere Verfahren lösen balancierte Variante:

- finde k Zellen mit Größe $\leq (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$.

Erweiterung von PUNCH:

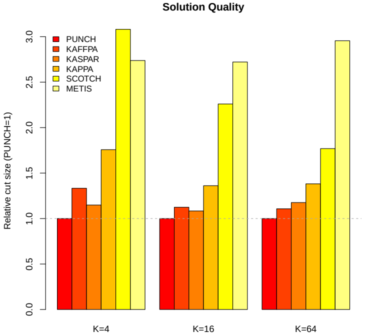
1. benutze Standard-PUNCH
mit $U = (1+\epsilon)\lceil n/k \rceil$;
2. wähle k Basis Zellen,
verteile den Rest (Multistart)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

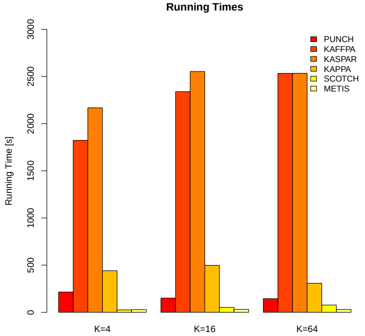
Balancierte Partitionen

PUNCH: bessere Lösungen...



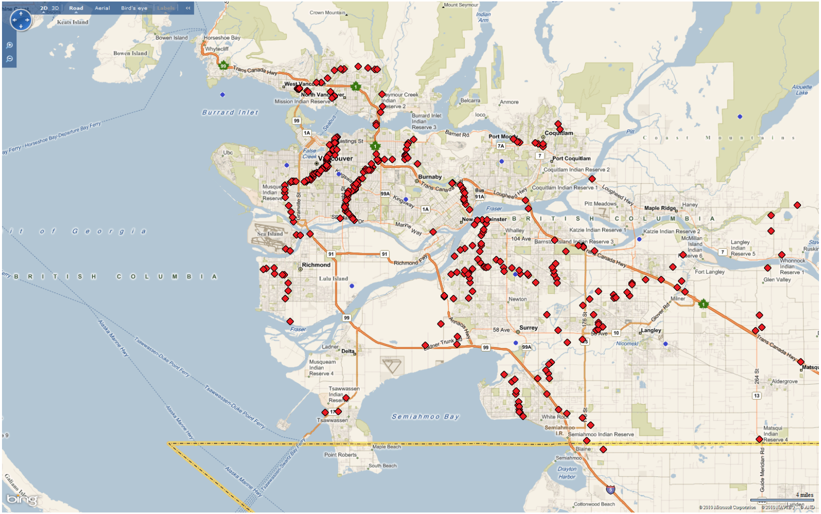
(Europe, $\epsilon = 0.03$)

...in vernünftiger Zeit.

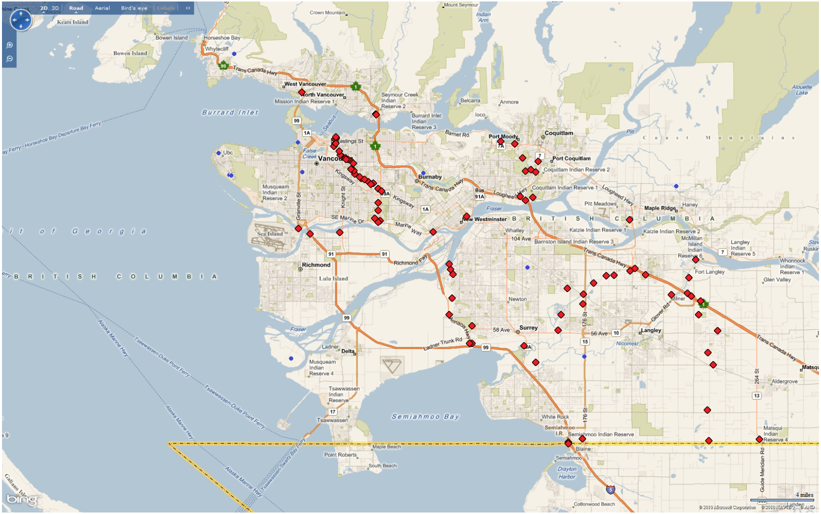


(Europe, $\epsilon = 0.03$)

Vancouver mit METIS

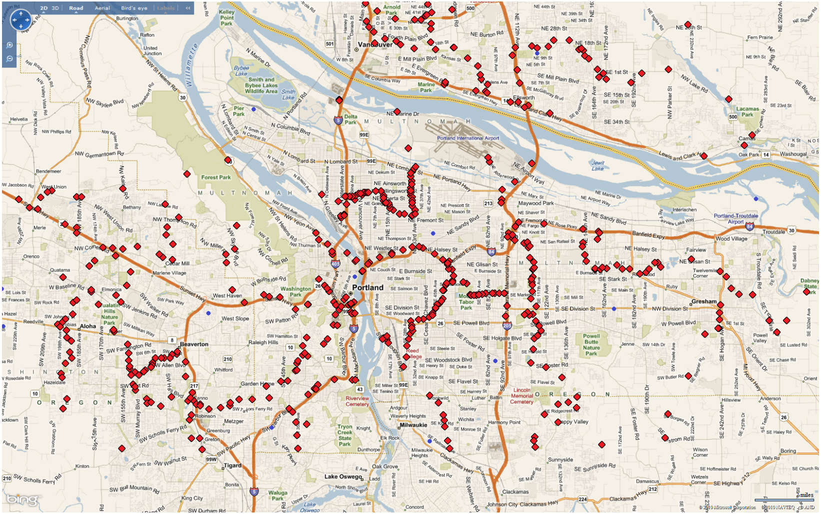


Vancouver mit PUNCH



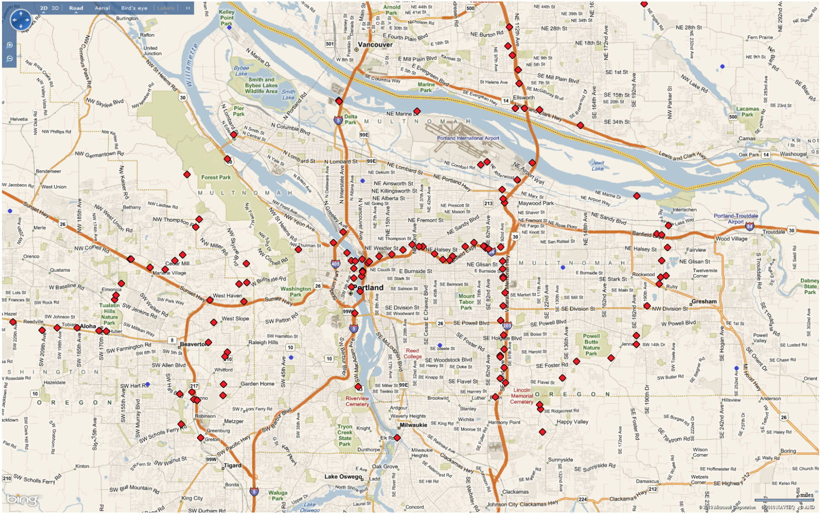
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Portland mit METIS



Portland mit PUNCH

Karlsruher Institut für Technologie

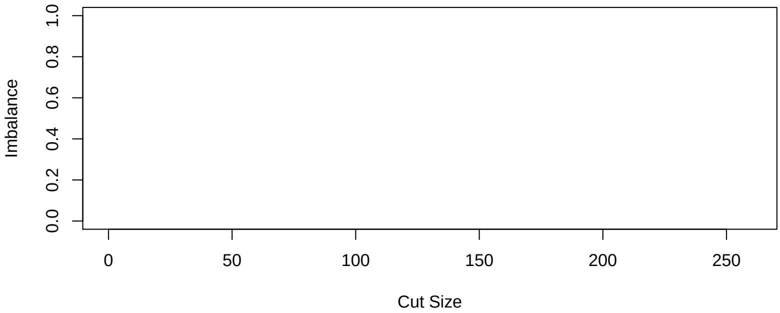


Bemerkungen

- reduziert Randknoten gegenüber METIS um mehr als Faktor 2
- Beschleunigung von Arc-Flags Vorberechnung um Faktor 2
- auch multi-level Partitionen berechnenbar
  top-down liefert beste Ergebnisse
- dabei Vorteile gegenüber METIS sogar größer
- Wie weit vom Optimum entfernt?
- Wird für die Bing Routing Engine benutzt.

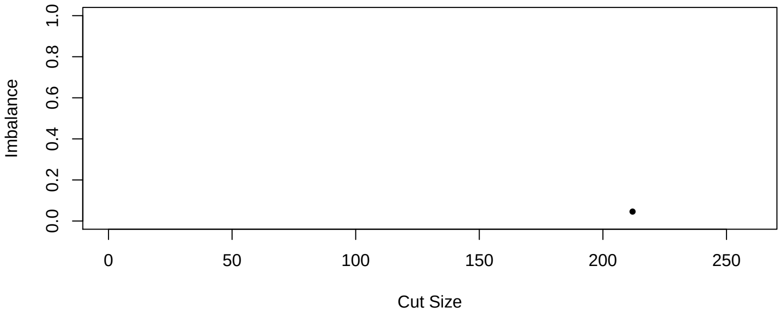
FlowCutter

“Good” Cuts



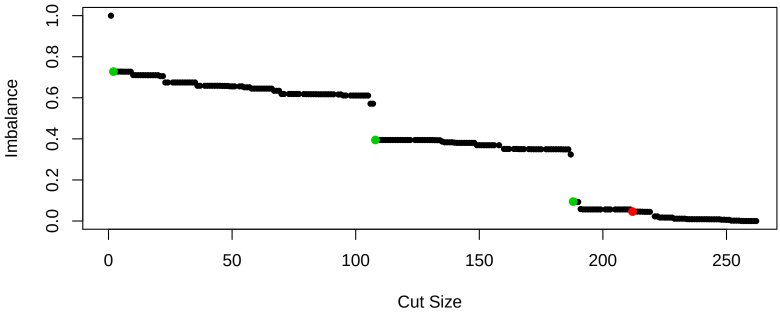
- imbalance = 0 $\rightarrow$ perfect balance
- imbalance = 1 $\rightarrow$ everything on one side

“Good” Cuts



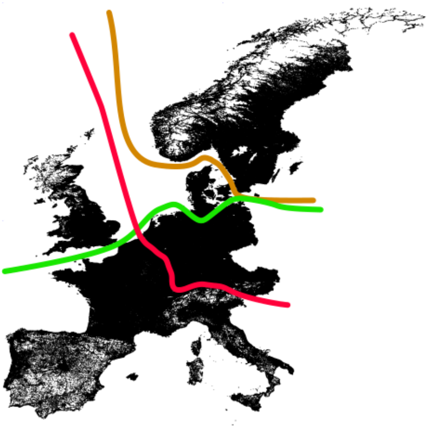
- $18 \cdot 10^6$ node Europe graph
- Result for maximum imbalance 5%
- Is this a good cut?
  (Maybe yes, as $212 \lll 18 \cdot 10^6$?)

"Good" Cuts



- Green cuts have a better trade-off
- Pareto-front needed to select good cut

“Good” Cuts Illustrated



FlowCutter

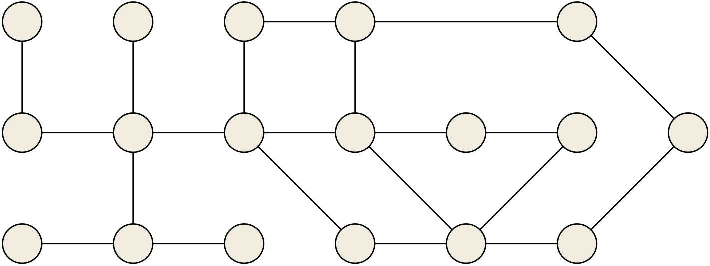
FlowCutter

- Core algorithm is heuristic for the balanced *st*-cut problem
- With connected sides
- Algorithm optimizes imbalance and size in the Pareto-sense

Idea

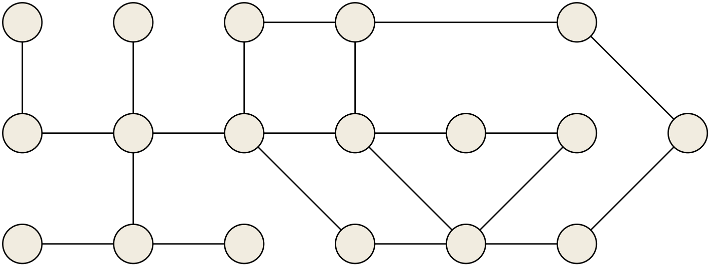
- Iteratively add source and target nodes to modify the min-cuts

Core FlowCutter



Core FlowCutter

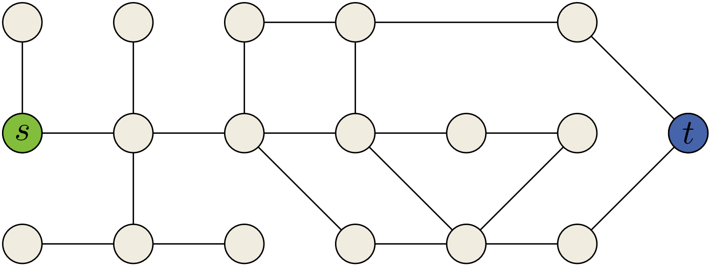
KIT Karlsruher Institut für Technologie



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

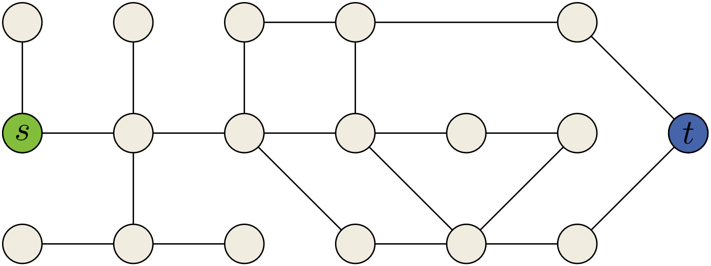
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



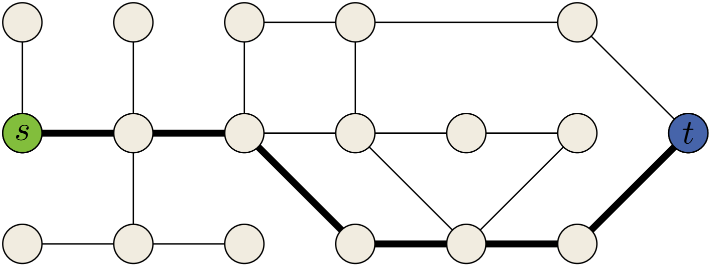
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



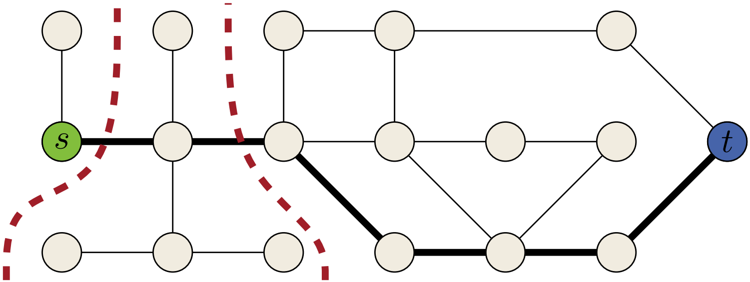
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



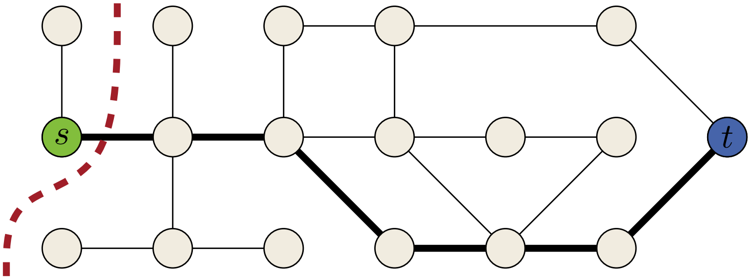
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



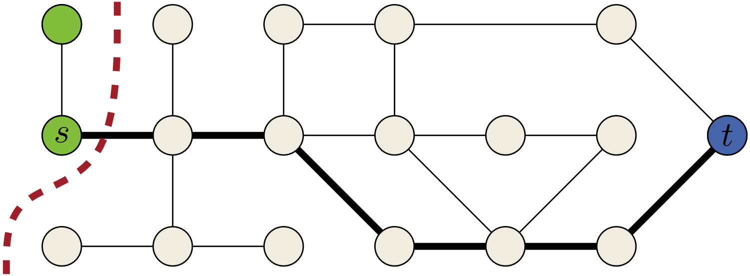
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

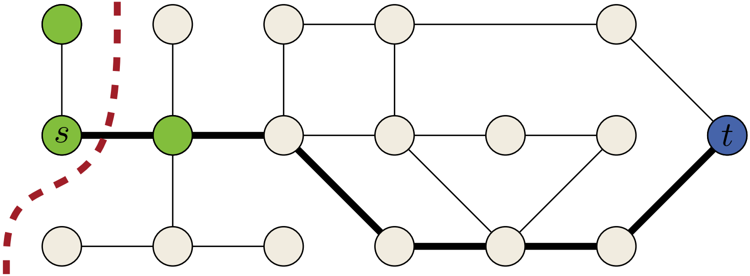
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

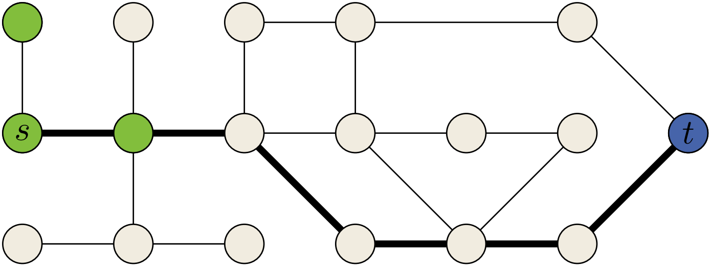
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



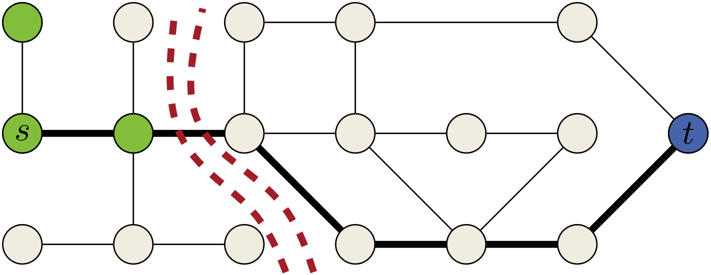
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



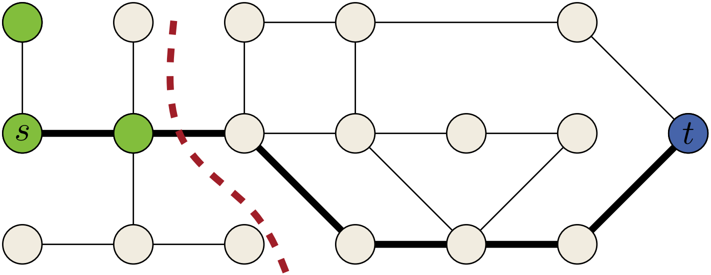
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

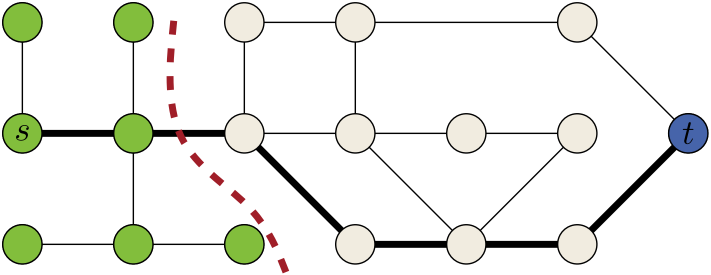
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

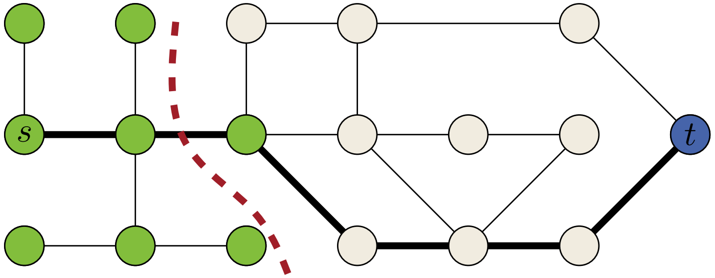
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



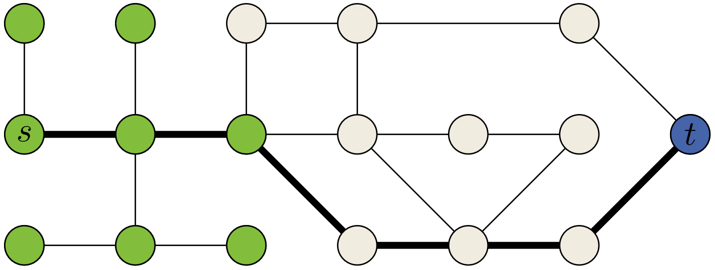
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



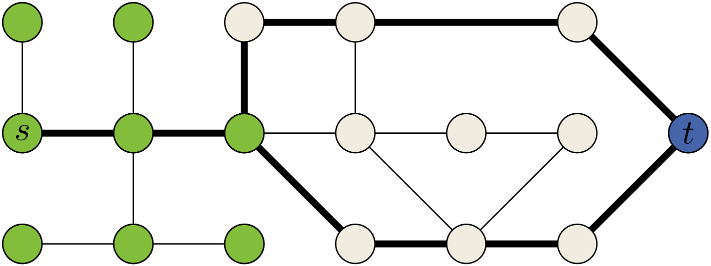
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



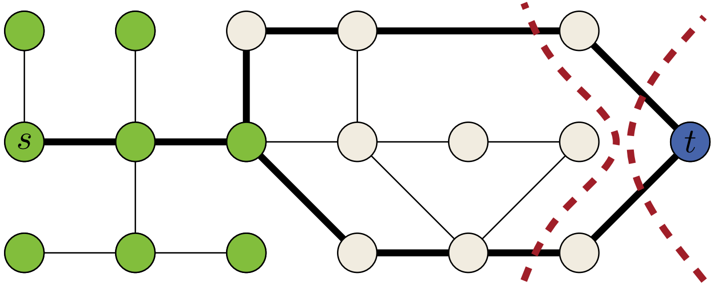
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



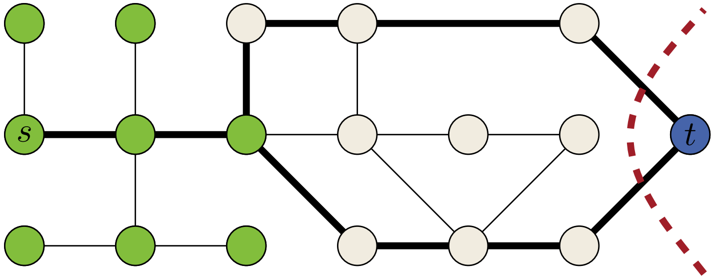
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



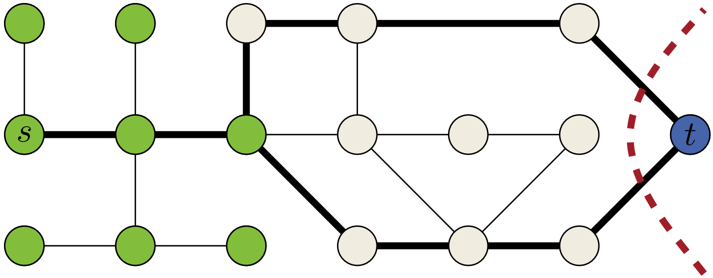
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

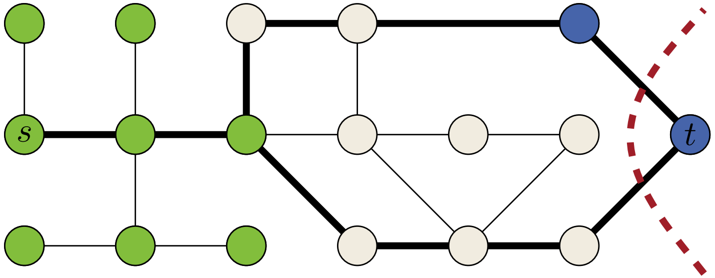
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

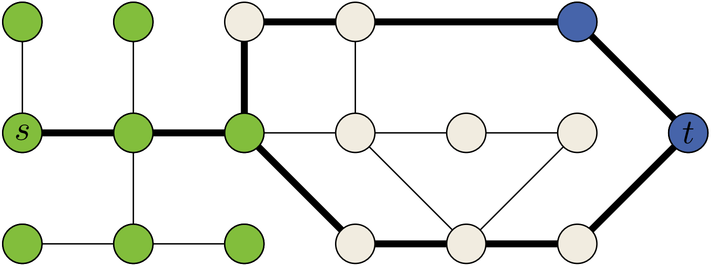
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



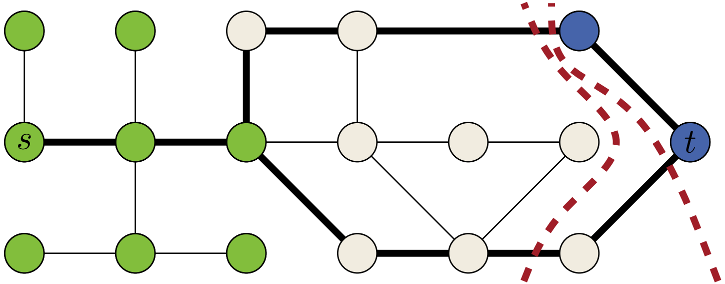
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

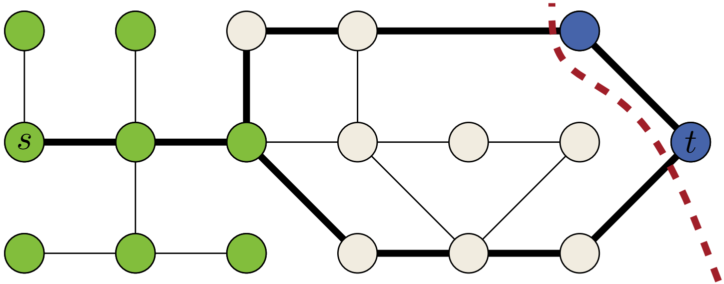
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

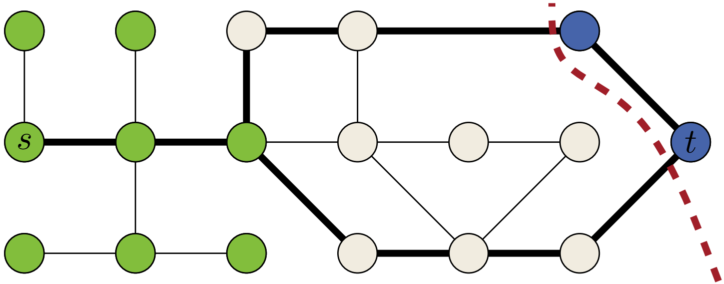
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



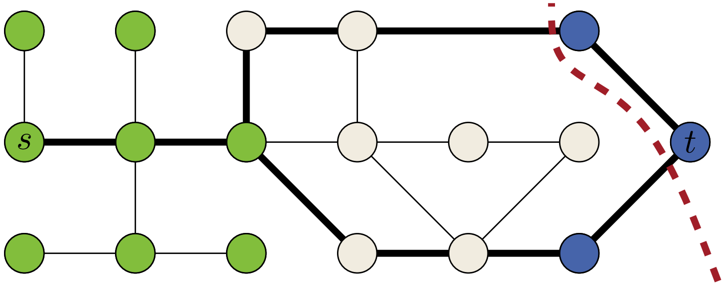
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



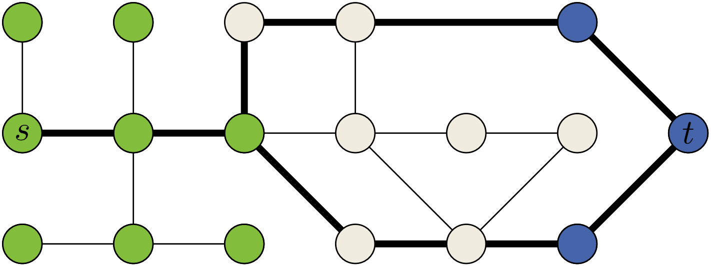
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

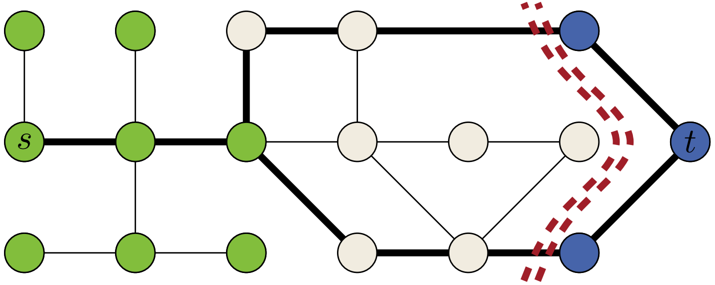
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

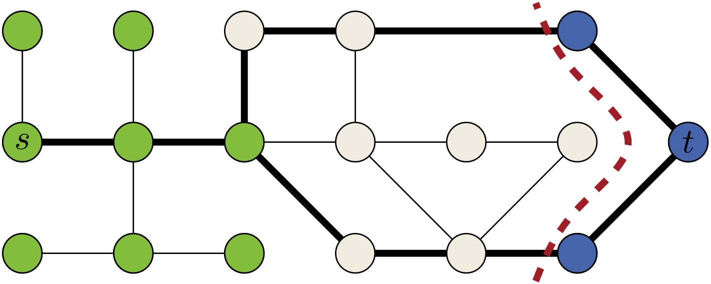
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

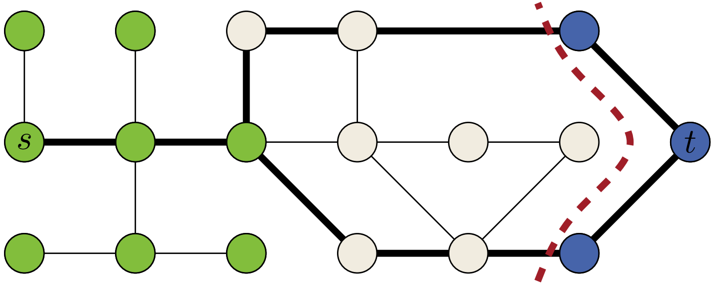
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

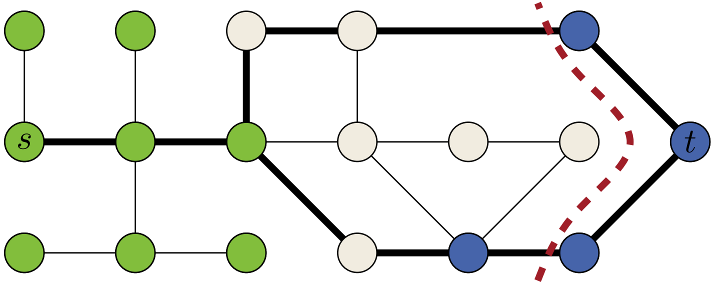
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

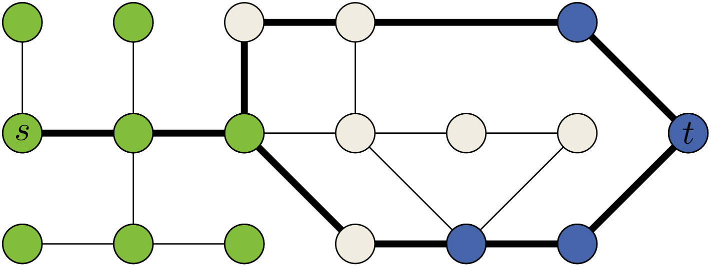
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

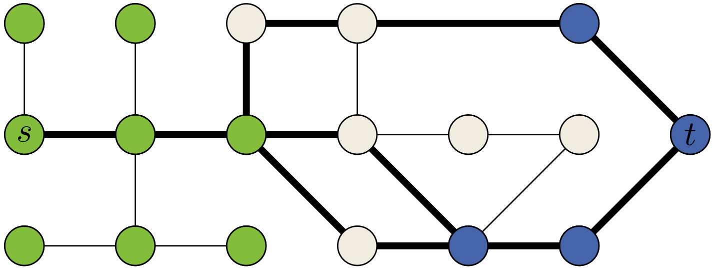
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

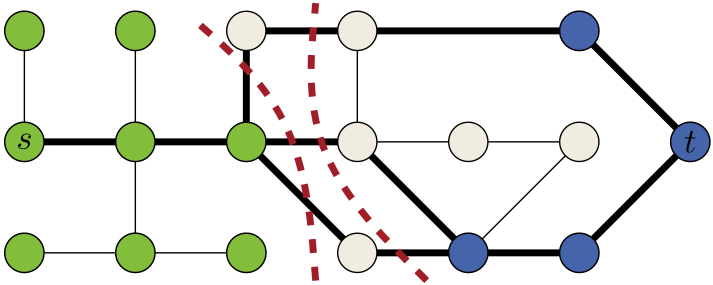
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



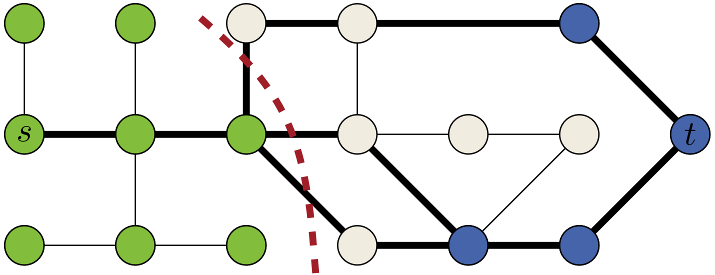
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

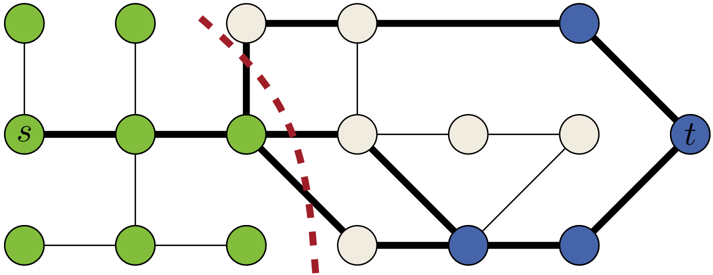
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

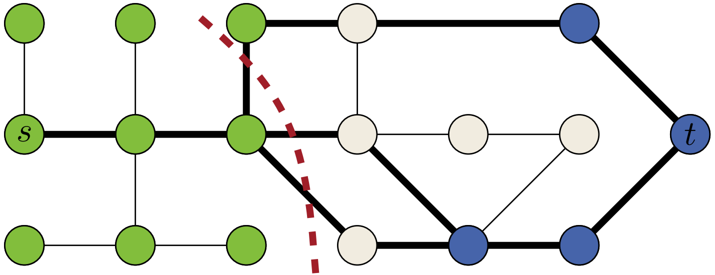
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

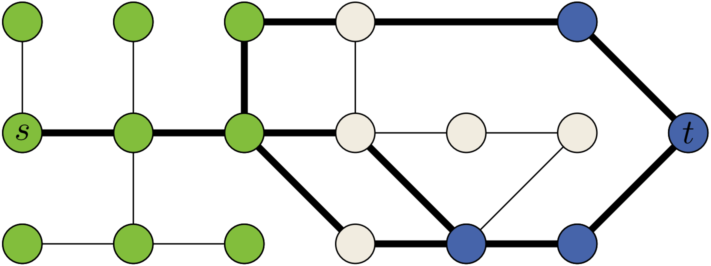
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

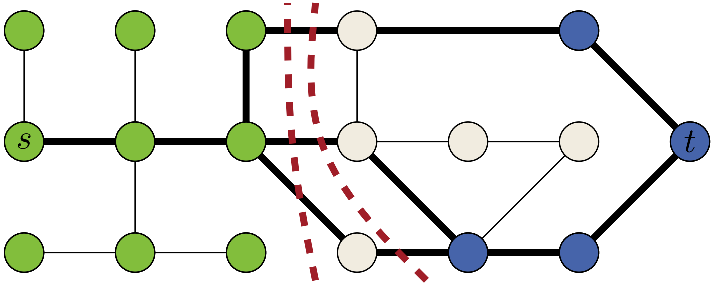
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

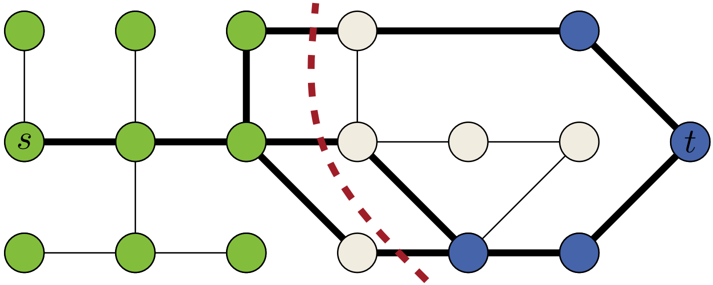
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

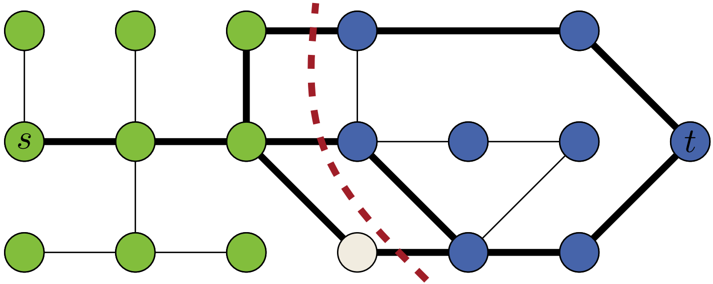
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

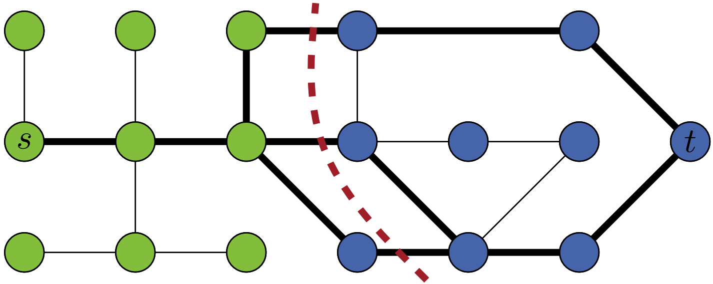
Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

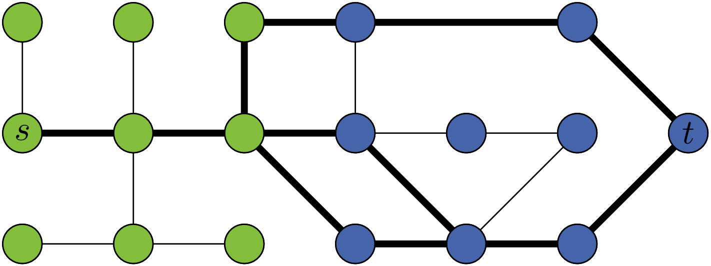
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Core FlowCutter



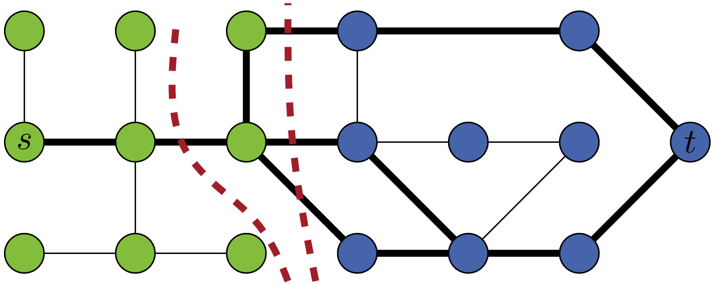
1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Core FlowCutter



1. Erhöhe Fluss
2. Bestimme s- und t-Schnitt
3. Wähle kleinere Seite
4. Assimiliere Seite
5. Pierce Schnitt

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Piercing Oracle

Piercing Node:

- Optimal selection probably NP-hard
- Heuristic

Our Piercing Selection Oracle:

- **Primary Rule**:
  $\exists$node x not resulting in an augmenting path $\rightarrow$ pick x
- **Secondary Rule**:
  - For source side: Maximize $\text{dist}(x, t) - \text{dist}(s, x)$
  - For target side: Minimize $\text{dist}(x, t) - \text{dist}(s, x)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Running Time

Karlsruher Institut für Technologie

Some constants:

- c size of last computed cut
- m number of edges

Running time optimization:

- c flow augmentations
- with careful implementation: $O(m)$ running time per augmentation
- $\rightarrow O(cm)$ running time

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Extensions

Karlsruher Institut für Technologie

Separators

- Choose endpoints of cut edges on larger side

Extensions

Separators

- Choose endpoints of cut edges on larger side

None *st*-Cut

- Sample s and t uniformly at random
- Run FlowCutter several times
- Finds cuts with at least some balance with high probability

CCH Experiments

	Search Space # Nodes Avg.	Search Space # Nodes Max.	#Arcs in CCH [$\cdot 10^6$]	#Tri. [$\cdot 10^6$]	Running times Order [min]	Running times Cust. [ms]	Running times Query [μs]
M	1 223	1 983	69.9	1 390	**2**	2 242	1 162
K	639	1 224	73.9	578	$\leq$3 552	975	304
I	733	1 569	67.4	590	17	932	385
F3	734	1 159	60.3	519	42	853	366
F20	**616**	**1 102**	**58.8**	**460**	281	**780**	**271**

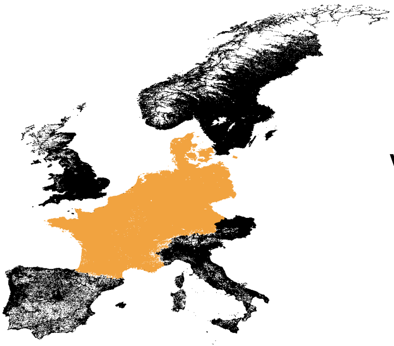
Europe Graph

M = Metis, K = KaHip, I = InertialFlow

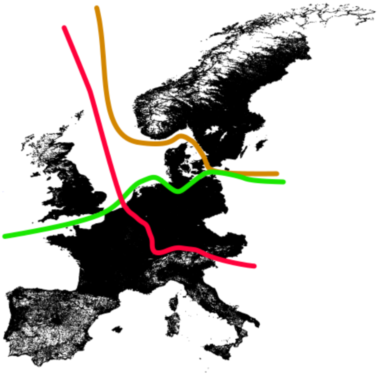
F*x* = FlowCutter with *x* *st*-pairs

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Top Level Europe Cut



VS



Pareto Cut Experiments - Balance

max ϵ [%]	Achieved ϵ [%]			
	F20	K	M	I
0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.132	0.998	0.000	0.089
3	0.132	0.457	0.000	0.008
5	4.894	0.464	0.000	0.857
10	9.330	0.043	0.000	0.375
20	10.542	3.139	0.000	0.132
30	10.542	3.139	0.017	7.384
50	44.386	3.139	33.336	10.542
70	66.655	3.139	41.178	44.386
90	84.199	3.139	83.087	84.257

- Central Europe Graph (to avoid special case with islands)
- FlowCutter is closest to requested imbalance

Pareto Cut Experiments - Cut Size

max ϵ [%]	Cut Size F20	K	M	I
0	**240**	716	369	1 180
1	**220**	245	360	391
3	**220**	227	372	319
5	**213**	227	369	276
10	**180**	228	375	241
20	**162**	250	375	220
30	**162**	250	369	203
50	**155**	250	9 881	**162**
70	**86**	250	14 375	**155**
90	**13**	250	28	17

- Central Europe Graph (to avoid special case with islands)
- FlowCutter achieves smallest cuts

Non Road Graphs?

- Popular Walshaw benchmark set
- Archived best known solutions for imbalance = 5%
- FlowCutter guarantees connected sides
  $\rightarrow$ We only evaluate instances where the archived solution has this property
- 24 graphs

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Non Road Graphs?

- Popular Walshaw benchmark set
- Archived best known solutions for imbalance = 5%
- FlowCutter guarantees connected sides
  $\rightarrow$ We only evaluate instances where the archived solution has this property
- 24 graphs

- On 18 a perfect match with reference
- On 3 graphs error below 5 edges
- Running Time:
  - Fast when c is small
  - When c approaches m . . . not so fast

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nächste Termine

Mittwoch, 16.5.2018

Montag, 21.5.2018, ist Feiertag

Literatur I

Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Ilya Razenshteyn, and Renato F. Werneck.
Graph Partitioning with Natural Cuts.
In *25th International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS'11)*, pages 1135–1146. IEEE Computer Society, 2011.

Michael Hamann and Ben Strasser.
Graph Bisection with Pareto-Optimization.
In *Proceedings of the 18th Meeting on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'16)*. SIAM, 2016.

George Karypis and Gautam Kumar.
A Fast and Highly Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs.
SIAM Journal on Scientific Computing, 20(1):359–392, 1999.

Peter Sanders and Christian Schulz.
Distributed Evolutionary Graph Partitioning.
In *Proceedings of the 14th Meeting on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'12)*, pages 16–29. SIAM, 2012.

Literatur II

Aaron Schild and Christian Sommer.

On Balanced Separators in Road Networks.

In *Proceedings of the 14th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'15)*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2015.