Sascha Gritzbach, Torsten Ueckerdt

Übungsblatt 2

Besprechung in der Übung am 16. Mai 2019

Aufgabe 1: Kommutierende Operationen ⋆

Seien x und y unterschiedliche Knoten in einem Graphen G. Zeigen Sie, dass $(G \circ x) - y = (G - y) \circ x$ gilt.

Aufgabe 2: Algorithmische Knotenmultiplikation ⋆⋆

Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Knoten des Graphen G und sei $h = (h_1, \ldots, h_n)$ ein Vektor mit $h_i \in \mathbb{N}_0$. Machen Sie sich klar, dass der Algorithmus rechts den Graphen $H = G \circ h$ konstruiert. Welche Laufzeit hat der Algorithmus? Kann man H auch schneller berechnen?

Hinweis: Wie verhält sich die Laufzeit bzgl. der Ausgabegröße?

```
H ← G
für i ← 1 bis n tue
    wenn h_i = 0 dann
        H ← H − x_i
    sonst
        solange h_i > 1 tue
            H ← H ∘ x_i
            h_i ← h_i − 1
```

Aufgabe 3: Ein bisschen Perfekt? ⋆⋆

Geben Sie einen Graphen G an, für den $\alpha(G) = k(G)$ und $\omega(G) < \chi(G)$ gilt. Warum widerspricht das nicht dem Perfect Graph Theorem?

Aufgabe 4: Satz von Kőnig ⋆⋆⋆

Zeigen Sie folgende Aussage. In einem bipartiten Graphen entspricht die Größe eines maximalen Matchings der Größe einer minimalen Knotenüberdeckung.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass bipartite Graphen perfekt sind.

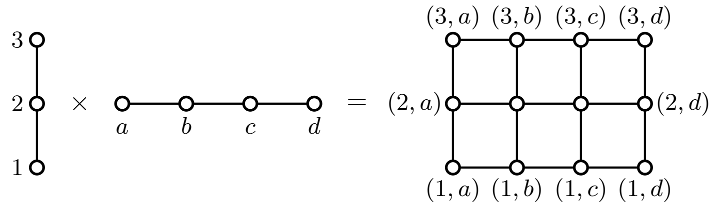
Aufgabe 5: Ungerade Kreise und ihre Komplemente ⋆

Zeigen Sie für jedes $G \in \{C_n, \overline{C_n} \colon n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}\}$, dass G minimal imperfekt ist, d.h. jeder echte induzierte Teilgraph von G ist perfekt, aber G ist es nicht.

Aufgabe 6: Graphfärbung und unabhängige Mengen ⋆⋆

Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq r$ genau dann gilt, wenn $\alpha(G \times K_r) = n$.

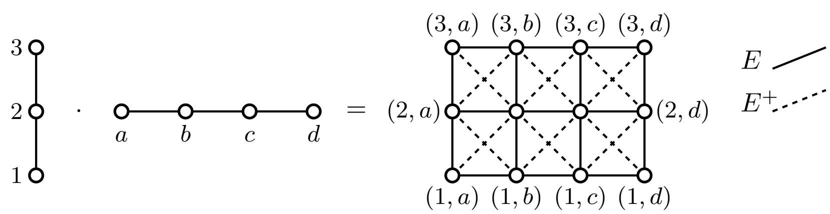
Das *Kartesische Produkt* $G_1 \times G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist definiert als $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$ mit $E = \{\{(v_1, v_2), (v_1', v_2')\} \mid$ entweder $v_1 = v_1'$ und $\{v_2, v_2'\} \in E_2$ oder $v_2 = v_2'$ und $\{v_1, v_1'\} \in E_1\}$ (siehe Beispiel unten).



Inwiefern ist damit gezeigt, dass das Problem Independent Set NP-schwer ist (vorausgesetzt Graph Coloring ist NP-schwer)?

Aufgabe 7: Graphparameter und das normale Produkt ⋆⋆

Das *normale Produkt* $G_1 \cdot G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist definiert als $G_1 \cdot G_2 = (V_1 \times V_2, E \cup E^+)$ mit $E = \{\{(v_1, v_2), (v_1', v_2')\} \mid$ entweder $v_1 = v_1'$ und $\{v_2, v_2'\} \in E_2$ oder $v_2 = v_2'$ und $\{v_1, v_1'\} \in E_1\}$ und $E^+ = \{\{(v_1, v_2), (v_1', v_2')\} \mid \{v_1, v_1'\} \in E_1$ und $\{v_2, v_2'\} \in E_2\}$ (siehe Beispiel unten).



Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\chi(G_1 \cdot G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$

(b) $\omega(G_1 \cdot G_2) = \omega(G_1) \cdot \omega(G_2)$

(c) $\alpha(G_1 \cdot G_2) \geq \alpha(G_1) \cdot \alpha(G_2)$

(d) $k(G_1 \cdot G_2) \leq k(G_1) \cdot k(G_2)$