

# Algorithmen für Routenplanung

15. Vorlesung, Sommersemester 2019

Tim Zeitz | 1. Juli 2019

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



# 1. Dynamische Szenarien

## Szenario:

- Unfall auf einer Straße
- Reisezeit ändert sich auf dieser Straße
- berechne schnellsten Weg bezüglich der aktualisierten Reisezeiten



## Hauptproblem:

- Kantengewichte ändern sich
- Vorberechnung basiert auf ursprünglichen Kantengewichten
- komplette Vorberechnung für jeden Stau wenig sinnvoll

## Lösung:

- “Customizable” Techniken (MLD, CCH)
- Anpassungen auch für ALT und “klassische” CH möglich

## 2. Zeitabhängiges Szenario

### Motivation:

- Stau um Städte herum folgt vorhersehbaren Mustern
- Morgens geht jeder zur Arbeit → Stau
- Mittags gibt es weniger Stau
- Abends fährt jeder nach Hause → Stau in die andere Richtung
- Aber nicht Sonntags



## 2. Zeitabhängiges Szenario

### Motivation:

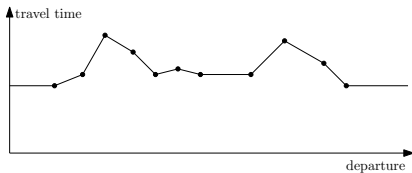
- Stau um Städte herum folgt vorhersehbaren Mustern
- Morgens geht jeder zur Arbeit → Stau
- Mittags gibt es weniger Stau
- Abends fährt jeder nach Hause → Stau in die andere Richtung
- Aber nicht Sonntags



- Aggregiere historische Daten um eine Vorhersage für jeden Wochentag zu machen

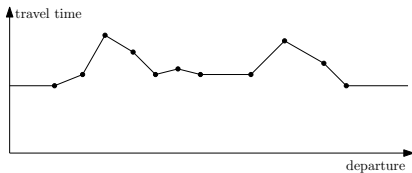
# Zeitabhängige Kantengewichte

- **bisher:** An jeder Kante steht ein skalares Kantengewicht
- **neu:** An jeder Kanten steht eine Funktion
- Die Funktion bildet den Zeitpunkt an dem eine Kante betreten wird auf die Fahrzeit ab



# Zeitabhängige Kantengewichte

- **bisher:** An jeder Kante steht ein skalares Kantengewicht
- **neu:** An jeder Kanten steht eine Funktion
- Die Funktion bildet den Zeitpunkt an dem eine Kante betreten wird auf die Fahrzeit ab



## Problemstellung

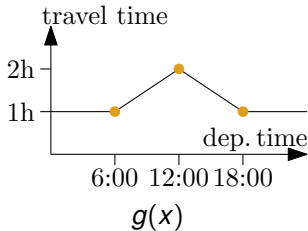
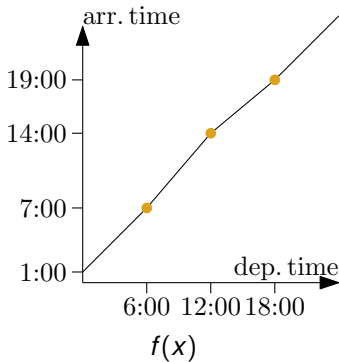
Mit zeitabhängigen Gewichten ist die Frage

- Wie komme ich von  $s$  nach  $t$ ?

nicht mehr wohl geformt.

Wir betrachten nun das Problem der frühesten Ankunft:

- Wie komme ich von  $s$  nach  $t$  wenn ich um  $\tau$  losfahre?



- Zwei Sichtweise auf die selbe Information
- $f(x) = g(x) + x$
- Aussagen in der einen Sichtweise lassen sich immer auf die andere übertragen
- Wir wechseln ständig zwischen beiden Sichtweisen und nehmen die, die gerade am besten passt

## Definition

Sei  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine Funktion.  $f$  erfüllt die *FIFO-Eigenschaft*, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  und alle  $\tau \in \mathbb{R}_0^+$  gilt, dass

$$\tau + f(\tau) \leq \tau + \varepsilon + f(\tau + \varepsilon).$$

## Diskussion

- Interpretation: “Warten/Später ankommen lohnt sich nie”
- Kürzeste Wege auf Graphen mit non-FIFO Funktionen zu finden ist (schwach) NP-schwer.  
(wenn warten an Knoten nicht erlaubt ist)
- Reduktion von Partition  
 $\Rightarrow$  Sicherstellen, dass Funktionen FIFO-Eigenschaft erfüllen.



- In der akademischen Forschung nimmt man oft an, dass Interpolationspunkte pro Kante gegeben sind
- Viele Probleme mit dieser Annahme:
  - Viele Interpolationspunkte pro Graph
    - Großer Speicherverbrauch
    - Sehr problematisch
  - Erhobene Daten sind stark verrauscht und Vorhersagen ungenau
    - Interpolationspunkte suggerieren eine Genauigkeit die reale Daten nicht hergeben
- **Deswegen:** in der Praxis auch andere Darstellungsformen verbreitet
- In der Vorlesung bleiben wir aber bei der akademischen Sichtweise

## Option 1

- Teile den Tag in Abschnitte ein, z.B., in 24 Stunden
  - Abschnitte müssen nicht gleich groß sein
  - Unterteilung kann pro Kante variieren
- Speichere für jeden Abschnitt eine Reisegeschwindigkeit
  - Geschwindigkeiten können gerundet sein: z.B. 5 km/h Schritte
- Alle Fahrzeuge auf einer Kanten ändern spontan ihre Reisegeschwindigkeit wenn die Tageszeit über eine Abschnittsgrenzen fortschreitet
  - Aus dieser Eigenschaft folgt FIFO

## Option 2

- Speichere kleine globale Menge von Funktionskurven  $\mathbb{F}$  explizit
  - Funktionen aus  $\mathbb{F}$  werden meistens mittels Interpolationspunkte und linearer Interpolation dargestellt
  - Jede dieser Funktionen ist FIFO
- An jeder Kante speichert man einen fixen Satz an skalaren Attributen:
  - Funktion-ID in  $\mathbb{F}$
  - Kanten-Länge
  - Diverse Strauchungs- und Streckungsfaktoren die die Funktion aus  $\mathbb{F}$  transformieren

## Hauptproblem:

- Kürzester Weg hängt von Abfahrtszeitpunkt ab
- Eingabegröße steigt massiv an

## Hauptproblem:

- Kürzester Weg hängt von Abfahrtszeitpunkt ab
- Eingabegröße steigt massiv an

## Vorgehen:

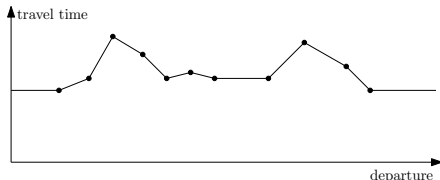
- Modellierung
- Anpassung Dijkstra
- Anpassung Beschleunigungstechniken

## Eingabe:

- Durchschnittliche Reisezeit zu bestimmten Zeitpunkten
- Jeden Wochentag verschieden
- Sonderfälle: Urlaubszeit

## Somit an jeder Kante:

- Periodische stückweise lineare Funktion
- Definiert durch Stützpunkte
- Interpoliere linear zwischen Stützpunkten



## Eigenschaften “Zeitabhängigkeit”:

- Topologie ändert sich nicht
- Kanten gemischt zeitabhängig und konstant
- variable (!) Anzahl Interpolationspunkte pro Kante

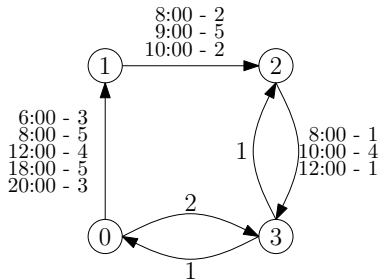
## Eigenschaften “Zeitabhängigkeit”:

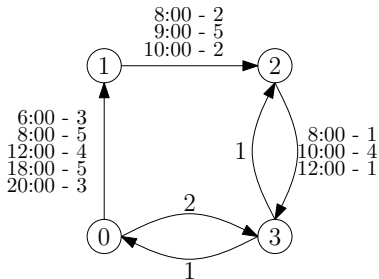
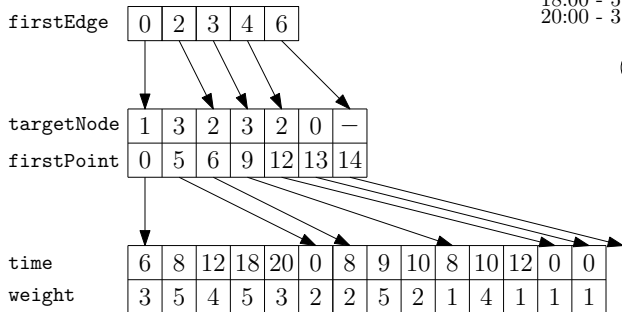
- Topologie ändert sich nicht
- Kanten gemischt zeitabhängig und konstant
- variable (!) Anzahl Interpolationspunkte pro Kante

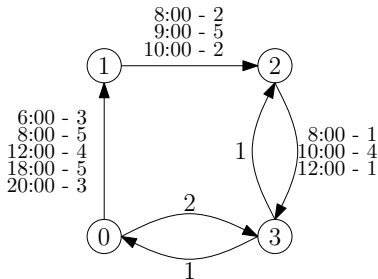
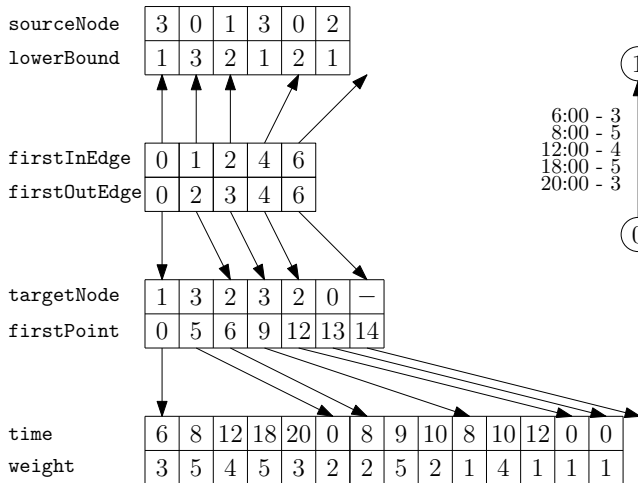
## Voraussetzung:

- FIFO gilt auf allen Kanten









## Zeit-Anfrage:

- finde kürzesten Weg für Abfahrtszeit  $\tau$
- analog zu Dijkstra?

## Zeit-Anfrage:

- finde kürzesten Weg für Abfahrtszeit  $\tau$
- analog zu Dijkstra?

## Profil-Anfrage:

- finde kürzesten Weg für alle Abfahrtszeitpunkte
- analog zu Dijkstra?

Ziel: finde kürzesten Weg für Abfahrtszeit  $\tau$

---

Time-Dijkstra( $G = (V, E), s, \tau$ )

---

```
1  $d_\tau[s] = 0$ 
2  $Q.clear(), Q.add(s, 0)$ 
3 while  $!Q.empty()$  do
4      $u \leftarrow Q.deleteMin()$ 
5     for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
6         if  $d_\tau[u] + \text{len}(e, \tau + d_\tau[u]) < d_\tau[v]$  then
7              $d_\tau[v] \leftarrow d_\tau[u] + \text{len}(e, \tau + d_\tau[u])$ 
8              $p_\tau[v] \leftarrow u$ 
9             if  $v \in Q$  then  $Q.decreaseKey(v, d_\tau[v])$ 
10
11         else  $Q.insert(v, d_\tau[v])$ 
```

---

## Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

## Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

## non-FIFO Netzwerke:

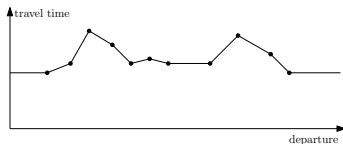
- Im Kreis fahren kann sich lohnen
- NP-schwer (wenn warten an Knoten nicht erlaubt ist)
- Transportnetzwerke sind meist FIFO modellierbar



## Evaluation von $f(\tau)$ :

- Suche Punkte mit  $t_j \leq \tau$  und  $t_{j+1} \geq \tau$
- dann Evaluation durch

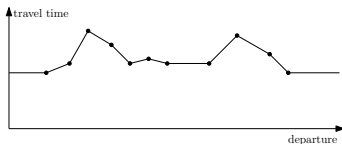
$$f(\tau) = w_i + \frac{\tau - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot (w_{i+1} - w_i)$$



## Evaluation von $f(\tau)$ :

- Suche Punkte mit  $t_i \leq \tau$  und  $t_{i+1} \geq \tau$
- dann Evaluation durch

$$f(\tau) = w_i + \frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot (w_{i+1} - w_i)$$



## Problem:

- Finden von  $t_i$  und  $t_{i+1}$ 
  - Achtung: Sonderfall am Periodenrand
- Theoretisch:
  - Lineare Suche:  $\mathcal{O}(|I|)$
  - Binäre Suche:  $\mathcal{O}(\log_2 |I|)$
- Praktisch:
  - $|I| < 30 \Rightarrow$  lineare Suche mit Startpunkt  $\frac{\tau}{\Pi} \cdot |I|$   
wobei  $\Pi$  die Periodendauer ist
  - Benchmarken!

Ziel: finde kürzesten Weg für alle Abfahrtszeitpunkte

---

`Profile-Search( $G = (V, E), s$ )`

---

```
1  $d_*[s] = 0$ 
2  $Q.clear(), Q.add(s, 0)$ 
3 while  $!Q.empty()$  do
4      $u \leftarrow Q.deleteMin()$ 
5     for all edges  $e = (u, v) \in E$  do
6         if  $d_*[u] \oplus \text{len}(e) \not\leq d_*[v]$  then
7              $d_*[v] \leftarrow \min(d_*[u] \oplus \text{len}(e), d_*[v])$ 
8             if  $v \in Q$  then  $Q.decreaseKey(v, \underline{d}[v])$ 
9
10            else  $Q.insert(v, \underline{d}[v])$ 
```

---

## Beobachtungen:

- Operationen auf Funktionen
- Priorität im Prinzip frei wählbar  
( $d[u]$  ist das Minimum der Funktion  $d_*[u]$ )
- Knoten können mehrfach besucht werden  $\Rightarrow$  label-correcting

## Herausforderungen:

- Wie effizient  $\oplus$  berechnen (Linken)?
- Wie effizient Minimum bilden?

## Funktion gegeben durch:

- Menge von Interpolationspunkten
- $I^f := \{(t_1^f, w_1^f), \dots, (t_k^f, w_k^f)\}$

## 3 Operationen notwendig:

- Auswertung
- Linken  $\oplus$
- Minimumsbildung
- Vergleich  $\not\leq$   
(ist analog zu Minimumsbildung)

## Definition

Seien  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  und  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  zwei Reisezeitfunktionen die die FIFO-Eigenschaft erfüllen. Die Linkoperation  $f \oplus g$  ist dann definiert durch

$$f \oplus g := f + g \circ (\text{id} + f)$$

**Oder**

$$(f \oplus g)(\tau) := f(\tau) + g(\tau + f(\tau))$$

## Definition

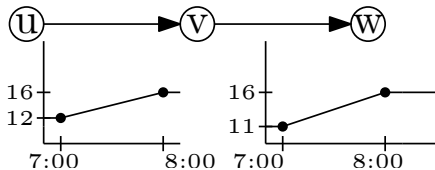
Seien  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  und  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  zwei Ankunftszeitfunktionen die die FIFO-Eigenschaft erfüllen. Die Linkoperation  $f \oplus g$  ist dann definiert durch

$$f \oplus g := g \circ f$$

**Oder**

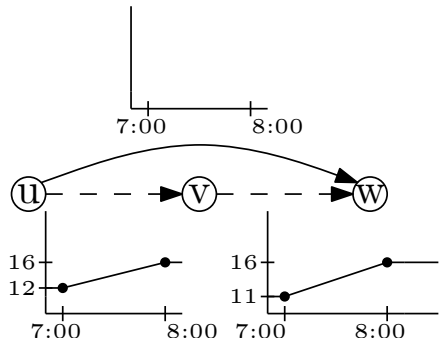
$$(f \oplus g)(\tau) := g(f(\tau))$$

## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$



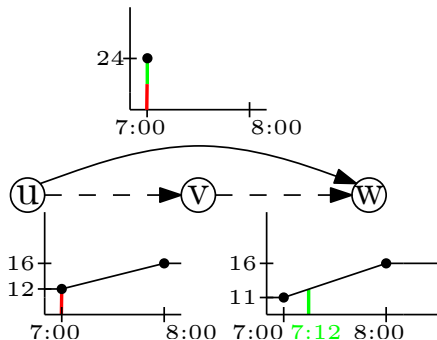


## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$



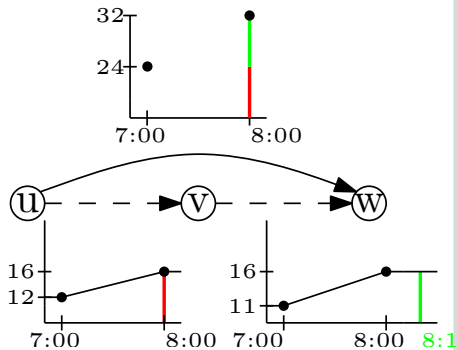
## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$

- $f \oplus g$  enthält auf jeden Fall  
 $\{(t_1^f, w_1^f + g(t_1^f + w_1^f)), \dots, (t_l^f, w_l^f + g(t_l^f + w_l^f))\}$



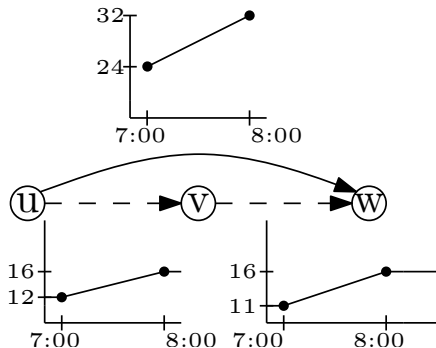
## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$

- $f \oplus g$  enthält auf jeden Fall  
 $\{(t_1^f, w_1^f + g(t_1^f + w_1^f)), \dots, (t_l^f, w_l^f + g(t_l^f + w_l^f))\}$



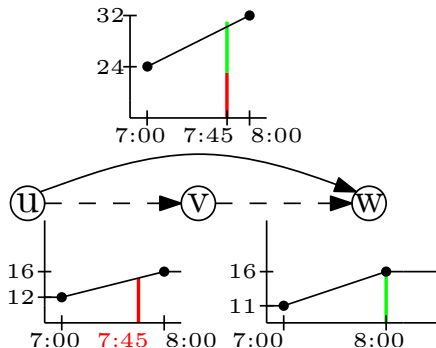
## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$

- $f \oplus g$  enthält auf jeden Fall  
 $\{(t_1^f, w_1^f + g(t_1^f + w_1^f)), \dots, (t_l^f, w_l^f + g(t_l^f + w_l^f))\}$



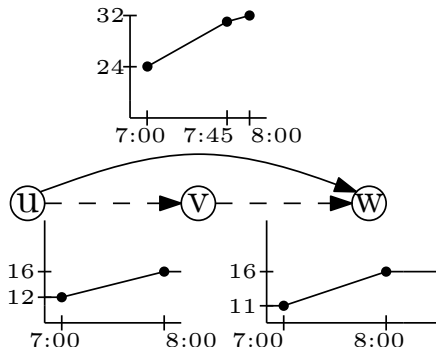
## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$

- $f \oplus g$  enthält auf jeden Fall  
 $\{(t_1^f, w_1^f + g(t_1^f + w_1^f)), \dots, (t_l^f, w_l^f + g(t_l^f + w_l^f))\}$



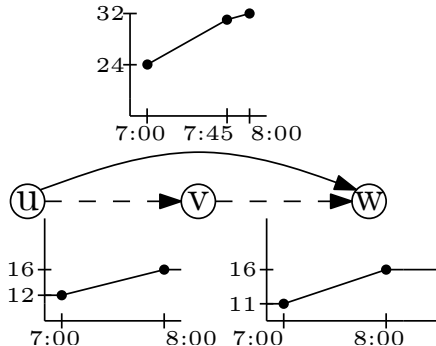
## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$

- $f \oplus g$  enthält auf jeden Fall  $\{(t_1^f, w_1^f + g(t_1^f + w_1^f)), \dots, (t_j^f, w_j^f + g(t_j^f + w_j^f))\}$
- Zusätzliche Interpolationspunkte an  $t_j^{-1}$  mit  $f(t_j^{-1}) + t_j^{-1} = t_j^g$



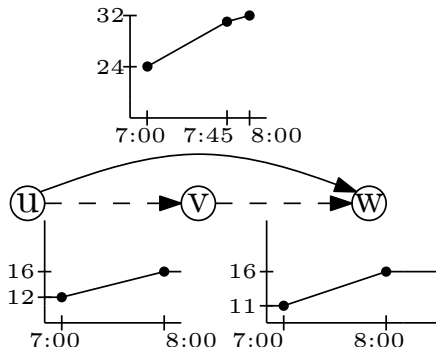
## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$

- $f \oplus g$  enthält auf jeden Fall  $\{(t_1^f, w_1^f + g(t_1^f + w_1^f)), \dots, (t_j^f, w_j^f + g(t_j^f + w_j^f))\}$
- Zusätzliche Interpolationspunkte an  $t_j^{-1}$  mit  $f(t_j^{-1}) + t_j^{-1} = t_j^g$
- Füge  $(t_j^{-1}, f(t_j^{-1}) + w_j^g)$  für alle Punkte von  $g$  zu  $f \oplus g$



## Linken zweier Funktionen $f$ und $g$

- $f \oplus g$  enthält auf jeden Fall  $\{(t_1^f, w_1^f + g(t_1^f + w_1^f)), \dots, (t_j^f, w_j^f + g(t_j^f + w_j^f))\}$
- Zusätzliche Interpolationspunkte an  $t_j^{-1}$  mit  $f(t_j^{-1}) + t_j^{-1} = t_j^g$
- Füge  $(t_j^{-1}, f(t_j^{-1}) + w_j^g)$  für alle Punkte von  $g$  zu  $f \oplus g$
- Durch linearen Sweeping-Algorithmus implementierbar





## Ankunftszeit-Funktion $f^{-1}$ an Stelle $x$ auswerten:

- Seien  $(x_i, y_i)$  die Interpolationspunkte von  $f$
- Die Interpolationspunkte von  $f^{-1}$  sind  $(y_i, x_i)$

## Ankunftszeit-Funktion $f^{-1}$ an Stelle $x$ auswerten:

- Seien  $(x_i, y_i)$  die Interpolationspunkte von  $f$
- Die Interpolationspunkte von  $f^{-1}$  sind  $(y_i, x_i)$
- Funktionsevaluation analog zu der von  $f$
- Die Interpolationspunkte von  $f^{-1}$  müssen nicht explizit gespeichert werden

## Laufzeit

- Sweep Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Zum Vergleich: Zeitunabhängig  $\mathcal{O}(1)$

## Laufzeit

- Sweep Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Zum Vergleich: Zeitunabhängig  $\mathcal{O}(1)$

## Speicherverbrauch

- Geklinkte Funktion hat  $\approx |I^f| + |I^g|$  Interpolationspunkte

## Laufzeit

- Sweep Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Zum Vergleich: Zeitunabhängig  $\mathcal{O}(1)$

## Speicherverbrauch

- Geknickte Funktion hat  $\approx |I^f| + |I^g|$  Interpolationspunkte

## Problem:

- Während Profilsuche kann ein Pfad mehreren Tausend Kanten entsprechen

## Laufzeit

- Sweep Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Zum Vergleich: Zeitunabhängig  $\mathcal{O}(1)$

## Speicherverbrauch

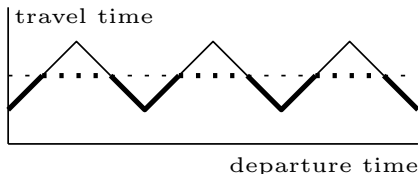
- Geknickte Funktion hat  $\approx |I^f| + |I^g|$  Interpolationspunkte

## Problem:

- Während Profilsuche kann ein Pfad mehreren Tausend Kanten entsprechen
- Shortcuts...

## Minimum zweier Funktionen $f$ und $g$

- Für alle  $(t_j^f, w_j^f)$ : behalte Punkt, wenn  $w_j^f < g(t_j^f)$
- Für alle  $(t_j^g, w_j^g)$ : behalte Punkt, wenn  $w_j^g < f(t_j^g)$
- Schnittpunkte müssen ebenfalls eingefügt werden

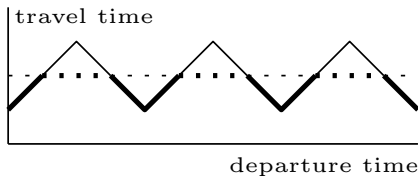


## Minimum zweier Funktionen $f$ und $g$

- Für alle  $(t_j^f, w_j^f)$ : behalte Punkt, wenn  $w_j^f < g(t_j^f)$
- Für alle  $(t_j^g, w_j^g)$ : behalte Punkt, wenn  $w_j^g < f(t_j^g)$
- Schnittpunkte müssen ebenfalls eingefügt werden

## Vorgehen:

- Linearer sweep über die Stützstellen
- Evaluiere, welcher Abschnitt oben
- Checke ob Schnittpunkt existiert
- Vorsicht bei der Numerik





## Laufzeit

- Sweep Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Zum Vergleich: Zeitunabhängig:  $\mathcal{O}(1)$

## Laufzeit

- Sweep Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Zum Vergleich: Zeitunabhängig:  $\mathcal{O}(1)$

## Speicherverbrauch

- Minimum-Funktion kann mehr als  $|I^f| + |I^g|$  Interpolationspunkte enthalten

## Laufzeit

- Sweep Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Zum Vergleich: Zeitunabhängig:  $\mathcal{O}(1)$

## Speicherverbrauch

- Minimum-Funktion kann mehr als  $|I^f| + |I^g|$  Interpolationspunkte enthalten

## Problem:

- Während Profilsuche werden Funktionen gemergt
- Laufzeit der Profilsuchen wird durch diese Operationen (link + merge) dominiert

## Problem 1: Anzahl an Interpolationspunkte

- Je länger ein Shortcut je mehr Interpolationspunkte hat er
- Die Suchräume schrumpfen drastisch bezüglich der Anzahl an Knoten und Kanten
- aber viel weniger bezüglich der Anzahl an Interpolationspunkte

## Problem 2: Numerische Instabilität

- Linken und Mergen nicht genau falls mit Gleitkommazahlen implementiert
- Fehler akkumulieren sich falls man Linken und Mergen verkettet

## Problem 2: Numerische Instabilität

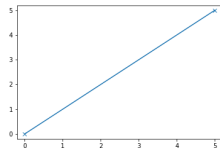
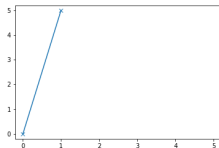
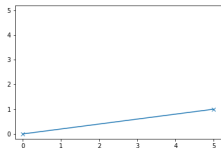
- Linken und Mergen nicht genau falls mit Gleitkommazahlen implementiert
- Fehler akkumulieren sich falls man Linken und Mergen verkettet
- Aber: Alle Operation bleiben in den rationalen Zahlen.

## Problem 2: Numerische Instabilität

- Linken und Mergen nicht genau falls mit Gleitkommazahlen implementiert
- Fehler akkumulieren sich falls man Linken und Mergen verkettet
- Aber: Alle Operation bleiben in den rationalen Zahlen.
  - Mit Brüchen arbeiten?
  - Vorläufige Experimente zeigen, dass Teiler und Nenner unkontrolliert wachsen
  - Offene Frage: Kann man diese Divergenz zeigen?

## Problem 2: Numerische Instabilität

- Linken und Mergen nicht genau falls mit Gleitkommazahlen implementiert
- Fehler akkumulieren sich falls man Linken und Mergen verkettet
- Aber: Alle Operation bleiben in den rationalen Zahlen.
  - Mit Brüchen arbeiten?
  - Vorläufige Experimente zeigen, dass Teiler und Nenner unkontrolliert wachsen
  - Offene Frage: Kann man diese Divergenz zeigen?
- Integer auch kaputt





- Netzwerk Deutschland  $|V| \approx 4.7$  Mio.,  $|E| \approx 10.8$  Mio. von 2006
- Standard-Instanz in der Forschung
- Basierend auf realen Verkehrsdaten
- 5 Verkehrsszenarien:
  - Montag:  $\approx 8\%$  Kanten zeitabhängig
  - Dienstag - Donnerstag:  $\approx 8\%$
  - Freitag:  $\approx 7\%$
  - Samstag:  $\approx 5\%$
  - Sonntag:  $\approx 3\%$

# ”Grad” der Zeitabhängigkeit

	#delete mins	slow-down	time [ms]	slow-down
kein	2,239,500	0.00%	1219.4	0.00%
Montag	2,377,830	6.18%	1553.5	27.40%
DiDo	2,305,440	2.94%	1502.9	23.25%
Freitag	2,340,360	4.50%	1517.2	24.42%
Samstag	2,329,250	4.01%	1470.4	20.59%
Sonntag	2,348,470	4.87%	1464.4	20.09%

## Beobachtung:

- kaum Veränderung in Suchraum
- Anfragen etwas langsamer durch Auswertung

	Nodes [K]	Arcs [K]	TD arcs [%]	Avg. $ f $ per TD arc
Ger06	4 688	10 796	8	17.6
SynEur	18 010	42 189	0.1	13.2
Ger17	7 248	15 752	29	29.6
Eur17	25 758	55 504	27	27.5

## Beobachtung:

- Nicht durchführbar auf Europa-Instanz durch zu großen Speicherbedarf ( $> 32$  GiB RAM)
- Extrapoliert:
  - Suchraum steigt um ca. 10%
  - Suchzeiten um einen Faktor von bis zu 2 500 über Dijkstra

⇒ inpraktikabel

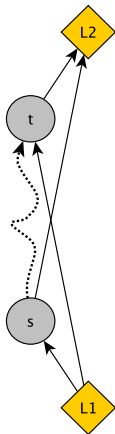
## Zeitabhängige Netzwerke (Basics)

- Funktionen statt Konstanten an Kanten
- Operationen werden teurer
  - $\mathcal{O}(\log |I|)$  für Auswertung
  - $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$  für Linken und Minimum
  - Speicherverbrauch explodiert
- Zeitanfragen:
  - Normaler Dijkstra
  - Kaum langsamer (lediglich Auswertung)
- Profilanfragen
  - nicht zu handhaben

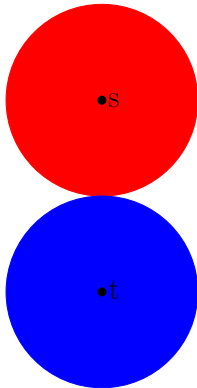
# Beschleunigungstechniken



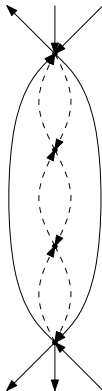
## Landmarken



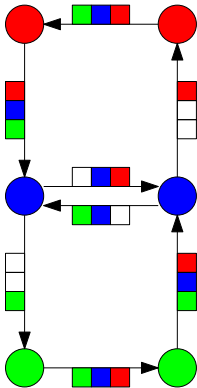
## Bidirektionale Suche



## Kontraktion



## Arc-Flags



## Vorbereitung:

- wähle eine Hand voll ( $\approx 16$ ) Knoten als **Landmarken**
- berechne Abstände von und zu allen Landmarken

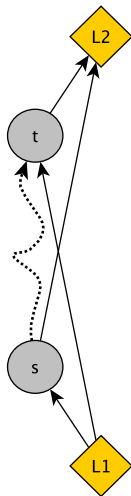
## Anfrage:

- benutze Landmarken und Dreiecksungleichung um eine **untere Schranke** für den Abstand zum Ziel zu bestimmen

$$d(s, t) \geq d(L_1, t) - d(L_1, s)$$

$$d(s, t) \geq d(s, L_2) - d(t, L_2)$$

- verändert **Reihenfolge** der besuchten Knoten





## Beobachtung:

- Korrektheit von ALT basiert darauf, dass reduzierte Kosten größer oder gleich 0 sind

$$\text{len}_\pi(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \stackrel{!}{\geq} 0$$

- durch Erhöhen der Kantengewichte wird dies nicht verletzt

## Beobachtung:

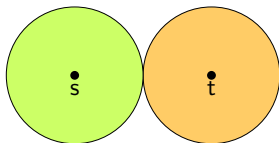
- Korrektheit von ALT basiert darauf, dass reduzierte Kosten größer oder gleich 0 sind

$$\text{len}_\pi(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \stackrel{!}{\geq} 0$$

- durch Erhöhen der Kantengewichte wird dies nicht verletzt

## Somit:

- Definiere lowerbound-Graph  $\underline{G} = (V, E, \underline{\text{len}})$  mit  $\underline{\text{len}} := \min \text{len}$
- Vorberechnung auf lowerbound-Graph
- korrekt aber eventuell langsamere Anfragezeiten



- starte zweite Suche von  $t$
- relaxiere rückwärts nur eingehende Kanten
- stoppe die Suche, wenn beide Suchräume sich treffen

## Zeitanfragen:

- Ankunft unbekannt  $\Rightarrow$  Rückwärtsuche?

## Zeitanfragen:

- Ankunft unbekannt  $\Rightarrow$  Rückwärtsuche?
- Rückwärtssuche nur zum Einschränken der Vorwärtssuche benutzen
- je nach Beschleunigungstechnik verschieden  $\rightsquigarrow$  später

## Zeitanfragen:

- Ankunft unbekannt  $\Rightarrow$  Rückwärtsuche?
- Rückwärtssuche nur zum Einschränken der Vorwärtssuche benutzen
- je nach Beschleunigungstechnik verschieden  $\rightsquigarrow$  später

## Profilanfragen:

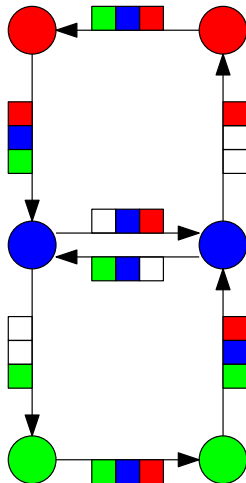
- Anfrage zu allen Startzeitpunkten
- somit Rückwärtsuche kein Problem
- $\mu$ : tentative Abstandsfunktion
- breche ab, wenn  $\min\text{Key}(\vec{Q}) + \min\text{Key}(\overleftarrow{Q}) \geq \bar{\mu}$   
Erinnere: key von  $v$  ist der lowerbound seiner Profildfunktion

## Idee:

- partitioniere den Graph in  $k$  Zellen
- hänge ein **Label** mit  $k$  Bits an jede Kante
- zeigt ob  $e$  wichtig für die Zielzelle ist
- modifizierter** Dijkstra überspringt unwichtige Kanten

## Beobachtung:

- Partition wird auf ungewichtetem Graphen durchgeführt
- Flaggen müssen allerdings angepasst werden



## Idee:

- ändere **Intuition** einer gesetzten Flagge
- Konzept **bleibt gleich**: Eine Flagge pro Kante und Region
- setze Flagge wenn Kante **mindestens ein mal** am Tag “wichtig” ist

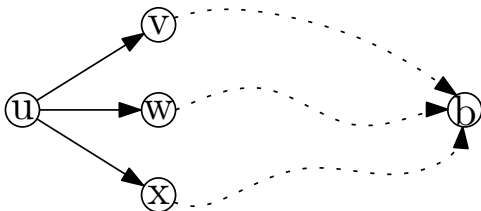


## Idee:

- ändere **Intuition** einer gesetzten Flagge
- Konzept **bleibt gleich**: Eine Flagge pro Kante und Region
- setze Flagge wenn Kante **mindestens ein mal** am Tag “wichtig” ist

## Anpassung:

- für alle Randknoten  $b$  und alle Knoten  $u$ :
- Berechne Abstandsfunktion  $d_*(u, b)$
- setze Flagge wenn gilt  $\text{len}(u, v) \oplus d_*(v, b) \neq d_*(u, b)$

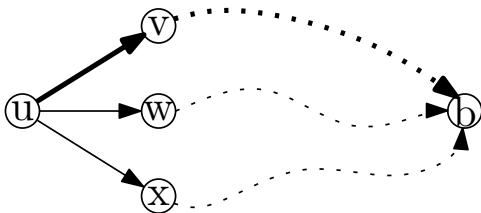


## Idee:

- ändere **Intuition** einer gesetzten Flagge
- Konzept **bleibt gleich**: Eine Flagge pro Kante und Region
- setze Flagge wenn Kante **mindestens ein mal** am Tag “wichtig” ist

## Anpassung:

- für alle Randknoten  $b$  und alle Knoten  $u$ :
- Berechne Abstandsfunktion  $d_*(u, b)$
- setze Flagge wenn gilt  $\text{len}(u, v) \oplus d_*(v, b) \neq d_*(u, b)$

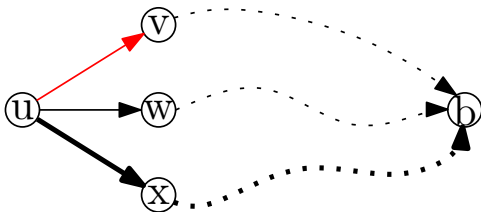


## Idee:

- ändere **Intuition** einer gesetzten Flagge
- Konzept **bleibt gleich**: Eine Flagge pro Kante und Region
- setze Flagge wenn Kante **mindestens ein mal** am Tag “wichtig” ist

## Anpassung:

- für alle Randknoten  $b$  und alle Knoten  $u$ :
- Berechne Abstandsfunktion  $d_*(u, b)$
- setze Flagge wenn gilt  $\text{len}(u, v) \oplus d_*(v, b) \neq d_*(u, b)$

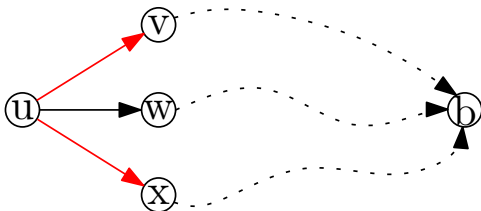


## Idee:

- ändere **Intuition** einer gesetzten Flagge
- Konzept **bleibt gleich**: Eine Flagge pro Kante und Region
- setze Flagge wenn Kante **mindestens ein mal** am Tag “wichtig” ist

## Anpassung:

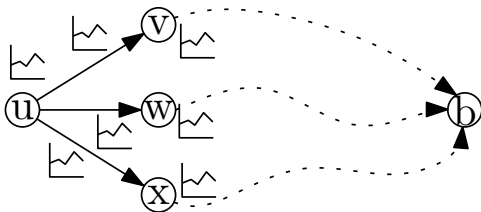
- für alle Randknoten  $b$  und alle Knoten  $u$ :
- Berechne Abstandsfunktion  $d_*(u, b)$
- setze Flagge wenn gilt  $\text{len}(u, v) \oplus d_*(v, b) \neq d_*(u, b)$



## Beobachtung:

- **viele** Interpolationspunkte
- Berechnung der Abstandsfunktionen ist sehr zeitintensiv
- Laufzeit stark abhängig von der Komplexität der Funktionen

## Idee:

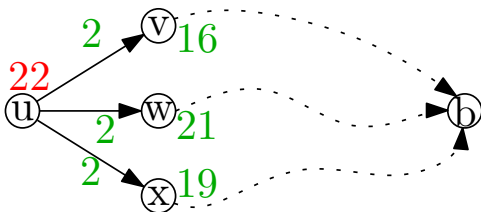


## Beobachtung:

- viele Interpolationspunkte
- Berechnung der Abstandsfunktionen ist sehr zeitintensiv
- Laufzeit stark abhängig von der Komplexität der Funktionen

## Idee:

- benutze über- und Unterapproximation

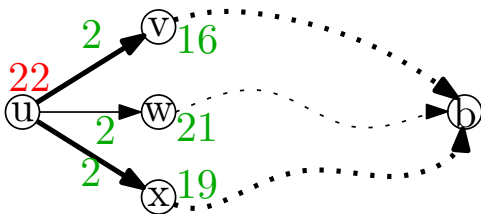


## Beobachtung:

- viele Interpolationspunkte
- Berechnung der Abstandsfunktionen ist sehr zeitintensiv
- Laufzeit stark abhängig von der Komplexität der Funktionen

## Idee:

- benutze über- und Unterapproximation

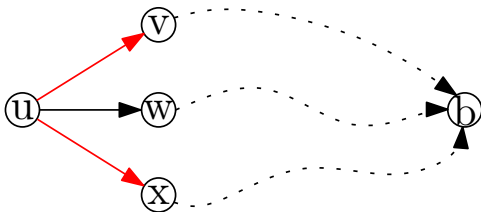


## Beobachtung:

- **viele** Interpolationspunkte
- Berechnung der Abstandsfunktionen ist sehr zeitintensiv
- Laufzeit stark abhängig von der Komplexität der Funktionen

## Idee:

- benutze **über-** und **Unterapproximation**
- ⇒ schnellere Vorberechnung, langsamere Anfragen
- ⇒ aber immer noch **korrekt**





## Idee:

- führe von jedem Randknoten  $K$  Zeitanfragen aus
- mit fester Ankunftszeit
- setze Flagge, wenn Kante auf einem dem Bäume eine Baumkante ist

## Idee:

- führe von jedem Randknoten  $K$  Zeitanfragen aus
- mit fester Ankunftszeit
- setze Flagge, wenn Kante auf einem dem Bäume eine Baumkante ist

## Beobachtungen:

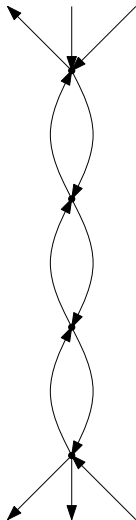
- Flaggen eventuell nicht korrekt
- ein Pfad wird aber immer gefunden
- Fehlerrate?

## Knoten-Reduktion:

- entferne Knoten
- füge neue Kanten (**Shortcuts**) hinzu, um die Abstände zwischen verbleibenden Knoten zu erhalten

## Zeugensuche:

- behalte nur relevante Shortcuts
- lokale Suche während oder nach Knoten-Reduktion

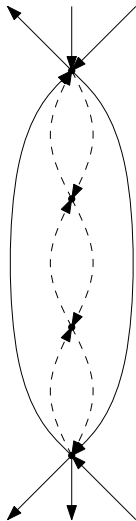


## Knoten-Reduktion:

- entferne Knoten
- füge neue Kanten (**Shortcuts**) hinzu, um die Abstände zwischen verbleibenden Knoten zu erhalten

## Zeugensuche:

- behalte nur relevante Shortcuts
- lokale Suche während oder nach Knoten-Reduktion



## Zeitunabhängig:

- Kante  $(u, v)$  nicht nötig, wenn  $(u, v)$  nicht Teil des kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$  ist, also  $\text{len}(u, v) > d(u, v)$
- lokale Dijkstra-Suche von  $u$

## Zeitabhängig:

## Zeitunabhängig:

- Kante  $(u, v)$  nicht nötig, wenn  $(u, v)$  nicht Teil des kürzesten Weges von  $u$  nach  $v$  ist, also  $\text{len}(u, v) > d(u, v)$
- lokale Dijkstra-Suche von  $u$

## Zeitabhängig:

- Kante  $(u, v)$  nicht nötig, wenn  $(u, v)$  nicht Teil eines kürzesten Wege von  $u$  nach  $v$  ist, also  $\text{len}(u, v) > d_*(u, v)$
- lokale Profilsuche
- Problem: deutlich langsamer

## Idee:

- führe zunächst zwei Dijkstra-Suchen mit  $\underline{\text{len}}$  und  $\overline{\text{len}}$  durch
- relaxiere dann nur solche Kanten  $(u, v)$ , für die  $\underline{d(s, u)} + \underline{\text{len}(u, v)} \leq \overline{d(s, v)}$  gilt
- lokale Profilsuche in diesem Korridor

## Anmerkung:

- auch zur Beschleunigung von  $s$ - $t$  Profil-Suchen

## Problem:

- hoher Speicherbedarf der Shortcuts

## Ideen:

- Shortcuts nur approximieren, **inexakte Anfragen**
- Keine Gewichte am Shortcut speichern, stattdessen on-the-fly entpacken und Pfad linken **spart Speicher, kostet Laufzeit**
- speichere auf Shortcuts Über- und Unterapproximation der Funktionen
  - induzieren wieder Korridor (aber genaueren als nur Min/Max!)
  - entpacke Shortcuts im Korridor, dies gibt einen Teil des Originalgraphen
  - benutze nun die nicht-approximierten Originalkanten für eine **exakte Suche**



## Basismodule:

- 0 Bidirektionale Suche
- + Landmarken
- + Kontraktion
- + Arc-Flags

## Somit sind folgende Algorithmen gute Kandidaten

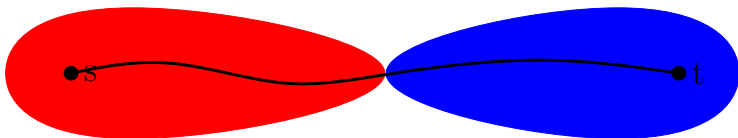
- ALT
- Core-ALT
- SHARC
- Contraction Hierarchies
- MLD (CRP)

# Bidirektionaler zeitabhängiger ALT

● s

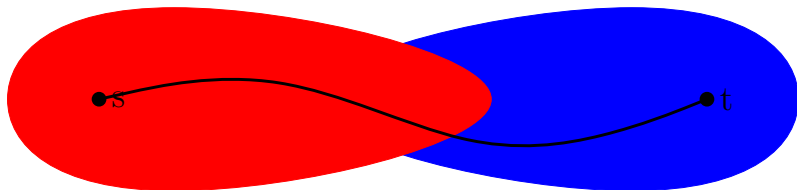
● t

**Idee - Drei Phasen:**



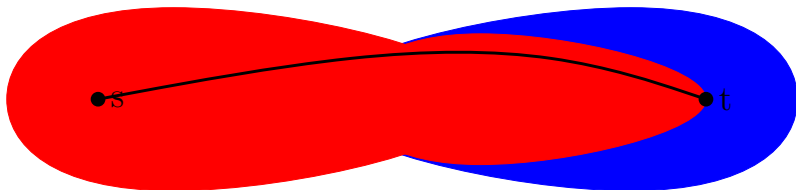
## Idee - Drei Phasen:

- 1 Vorwärts zeitabhängig, Rückwärtssuche benutzt **Minima** der Funktionen. Fertig wenn Suchen sich treffen. Berechne **zeitabhängige** tentative Distanz  $\mu$ 
  - Distanz der Rückwärtssuche: untere Schranke  $\Rightarrow$  nicht geeignet
  - Variante 1: Durch Auswerten des gefundenen Pfades
  - Variante 2: Rückwärtssuche schleift auch Maxima durch



## Idee - Drei Phasen:

- 1 Vorwärts zeitabhängig, Rückwärtssuche benutzt **Minima** der Funktionen. Fertig wenn Suchen sich treffen. Berechne **zeitabhängige** tentative Distanz  $\mu$ 
  - Distanz der Rückwärtssuche: untere Schranke  $\Rightarrow$  nicht geeignet
  - Variante 1: Durch Auswerten des gefundenen Pfades
  - Variante 2: Rückwärtssuche schleift auch Maxima durch
- 2 Rückwärtssuche weiter bis  $\minKey(\overleftarrow{Q}) > \mu$



## Idee - Drei Phasen:

- 1 Vorwärts zeitabhängig, Rückwärtssuche benutzt **Minima** der Funktionen. Fertig wenn Suchen sich treffen. Berechne **zeitabhängige** tentative Distanz  $\mu$ 
  - Distanz der Rückwärtssuche: untere Schranke  $\Rightarrow$  nicht geeignet
  - Variante 1: Durch Auswerten des gefundenen Pfades
  - Variante 2: Rückwärtssuche schleift auch Maxima durch
- 2 Rückwärtssuche weiter bis  $\minKey(\overleftarrow{Q}) > \mu$
- 3 Vorwärtssuche arbeitet weiter bis  $t$  abgearbeitet worden ist und besucht nur Knoten, die die Rückwärtssuche zuvor besucht hat

## Beobachtung:

- Phase 2 läuft recht lange weiter, bis  $\min\text{Key}(\overleftarrow{Q}) > \mu$  gilt
- insbesondere dann schlecht, wenn die lower bounds stark vom echten Wert abweichen

## Approximation:

- breche Phase 2 bereits ab, wenn  $\min\text{Key}(\overleftarrow{Q}) \cdot K > \mu$  gilt
- dann ist der berechnete Weg eine  $K$ -Approximation des kürzesten Weges

## Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (**Kern**)

s ●

● t

## Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu einem Kern
- Landmarken nur im Kern

## Anfrage

## Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (**Kern**)



## Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu einem Kern
- Landmarken nur im Kern

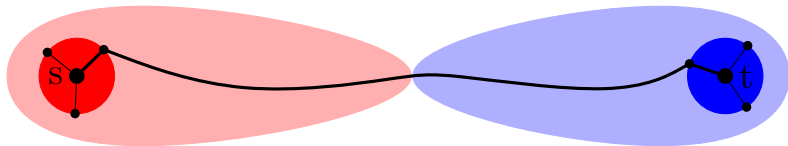
## Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra



## Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)



## Vorbereitung

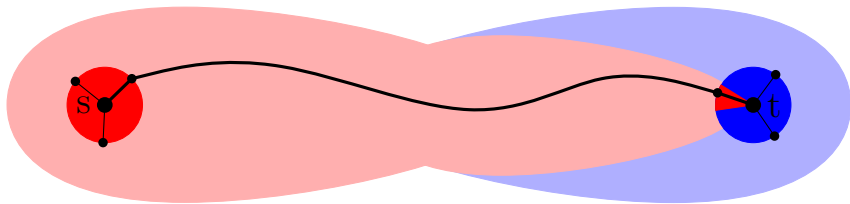
- kontrahiere Graphen zu einem Kern
- Landmarken nur im Kern

## Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra
- benutze Landmarken nur im Kern

## Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (**Kern**)



## Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu einem Kern
- Landmarken nur im Kern

## Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra
- benutze Landmarken nur im Kern
- zeitabhängig:
  - Rückwärtssuche ist zeitunabhängig
  - Vorwärtssuche darf **alle** Knoten der Rückwärtssuche besuchen

## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen

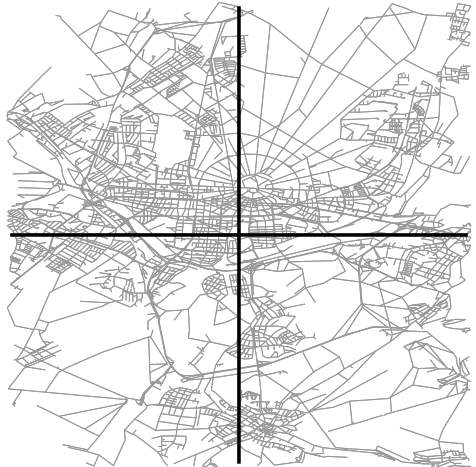


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen

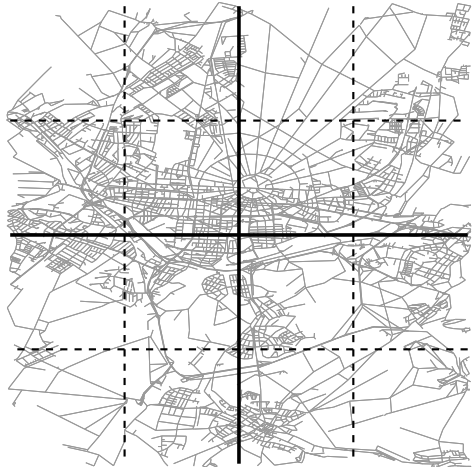


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen

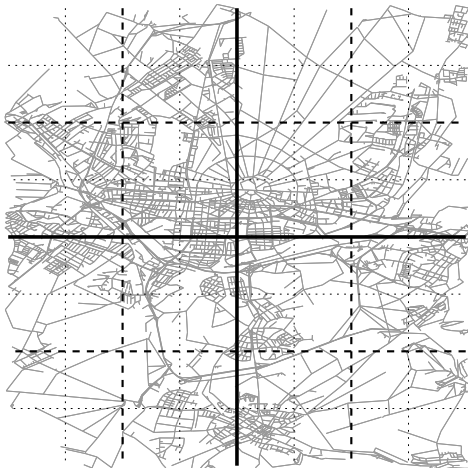


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen

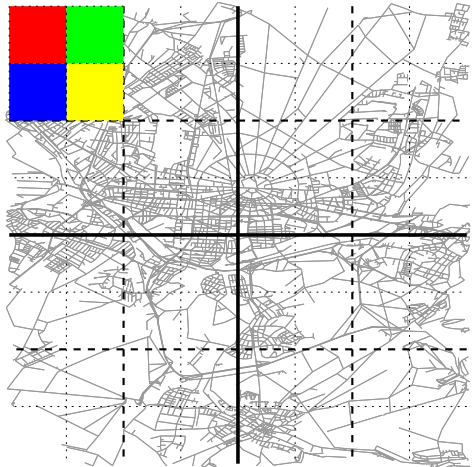


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen

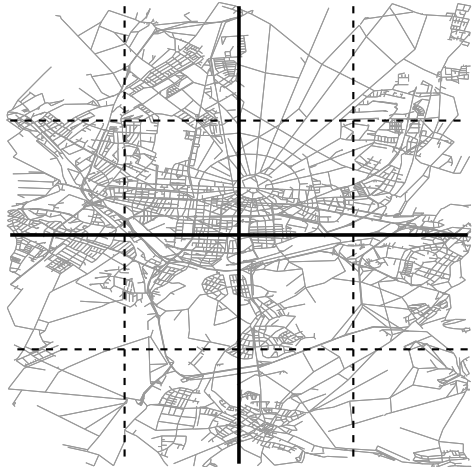


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen



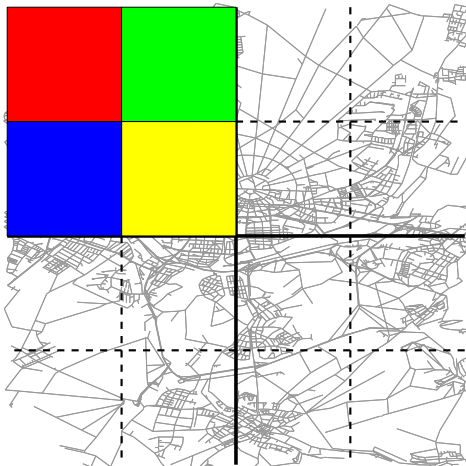


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen

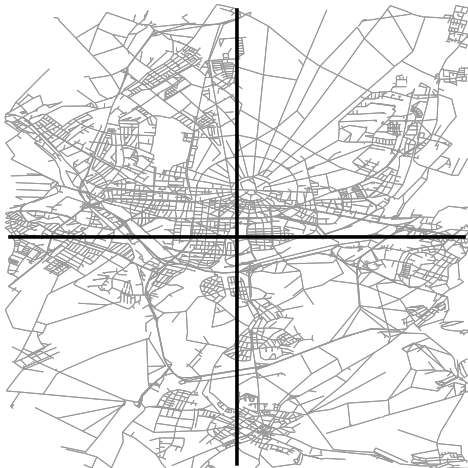


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen

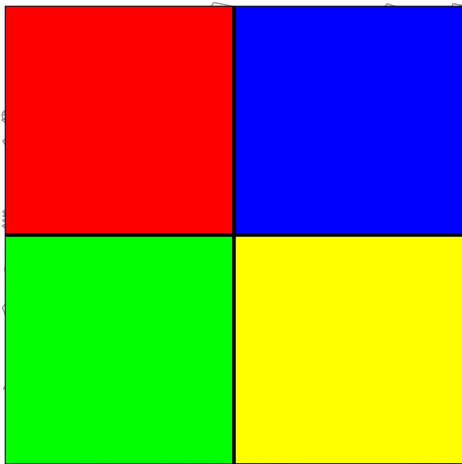


## Vorbereitung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen
- Flaggenverfeinerung

## Anpassung (grob):

- Kontraktion und Flaggen berechnung anpassen
- Verfeinerung durch (lokale) Profilsuchen



## Vorbereitung:

- benutze gleiche Knotenordnung
- kontrahiere zeitabhängig
- erzeugt Suchgraphen  $G' = (V, \uparrow E \cup \downarrow E)$

## Vorbereitung:

- benutze gleiche Knotenordnung
- kontrahiere zeitabhängig
- erzeugt Suchgraphen  $G' = (V, \uparrow E \cup \downarrow E)$

## Anfrage

- Rückwärtssuche schwierig (Ankunftszeit unbekannt)
- Kompletten Rückwärtsaufwärtssuchraum markieren?

## Vorbereitung:

- benutze gleiche Knotenordnung
- kontrahiere zeitabhängig
- erzeugt Suchgraphen  $G' = (V, \uparrow E \cup \downarrow E)$

## Anfrage

- Rückwärtssuche schwierig (Ankunftszeit unbekannt)
- Kompletten Rückwärtsaufwärtssuchraum markieren?
- Rückwärts aufwärts mittels min-max Suche (Phase 1)
  - Intervallsuche: jeder Knoten bekommt eine untere und obere Reisezeitschranke
  - markiere alle Kanten  $(u, v)$  aus  $\downarrow E$  mit  $\underline{d}(u, v) + \underline{d}(v, t) \leq \overline{d}(u, t)$
  - diese Menge sei  $\downarrow E'$
- zeitabhängige Vorwärtssuche in  $(V, \uparrow E \cup \downarrow E')$  (Phase 2)

input	type of ordering	Contr.			Queries	
		ordering [h:m]	const. [h:m]	space [B/n]	time [ms]	speed up
Monday	static min	0:05	0:20	1 035	1.19	1 240
	timed	1:47	0:14	750	1.19	1 244
midweek	static min	0:05	0:20	1 029	1.22	1 212
	timed	1:48	0:14	743	1.19	1 242
Friday	static min	0:05	0:16	856	1.11	1 381
	timed	1:30	0:12	620	1.13	1 362
Saturday	static min	0:05	0:08	391	0.81	1 763
	timed	0:52	0:08	282	1.09	1 313
Sunday	static min	0:05	0:06	248	0.71	1 980
	timed	0:38	0:07	177	1.07	1 321

## Idee:

- speicher jeden Shortcut als Approximation
- reduziert Speicher um bis zu Faktor 10
- Aber: selbst die Vorwärtssuche liefert jetzt nur noch (Earliest Arrival) Approximationsintervalle!



## Idee:

- speicher jeden Shortcut als Approximation
- reduziert Speicher um bis zu Faktor 10
- Aber: selbst die Vorwärtssuche liefert jetzt nur noch (Earliest Arrival) Approximationsintervalle!

## Query (viele Phasen!):

- Phase 1: Rück-auf: Min/max-Intervall, Vor-auf: Ankunfts-Intervall
- Phase 2: Vor-ab: Ankunftsintervall
- Phase 3: Rück-auf: Reisezeit-Intervall (verschärft Schranken)
- alle Knoten an denen Suchen sich treffen: Kandidaten  $C$
- entpacke alle (approximierten) Shortcuts auf  $s-C-t$  Pfaden
- erzeugt (exakten weil Originalkanten) Subgraphen (Korridor)
- Time-dependent Dijkstra im Korridor (Phase 4)
- nicht viel langsamer (Faktor 2)
- ist **exakt**

# Profilsuchen

## Variante 1:

- normale Profilsuche in der CH
- langsam

## Variante 1:

- normale Profilsuche in der CH
- langsam

## Variante 2:

- normale Profilsuche im Korridor (min/max, Approximation)
- besser, aber es geht noch besser

## Variante 1:

- normale Profilsuche in der CH
- langsam

## Variante 2:

- normale Profilsuche im Korridor (min/max, Approximation)
- besser, aber es geht noch besser

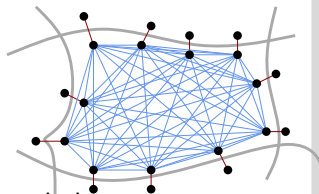
## Variante 3:

- Kontraktion des Korridors:
  - halte Start- und Zielknoten fest
  - Führe exakte Kontraktion durch (Linken von Kanten, keine Approximation)
  - Priorisiere Knoten mit unkomplexen inzidenten Kanten
- Balancierte Berechnung

⇒ ca. 30 ms

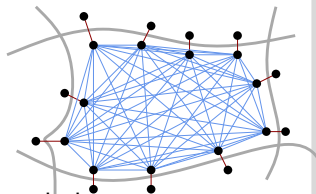
## Beobachtungen

- Partitionierung metrik-unabhängig
- Viele Shortcuts / Overlay-Kanten
- Großer Vorteil von MLD (eigentlich):  
Komplettes Speicherlayout nach Partitionierung bekannt
- Uni-direktionale Anfragen möglich (Partition steuert Suchlevel)



## Beobachtungen

- Partitionierung metrik-unabhängig
- Viele Shortcuts / Overlay-Kanten
- Großer Vorteil von MLD (eigentlich):  
Komplettes Speicherlayout nach Partitionierung bekannt
- Uni-direktionale Anfragen möglich (Partition steuert Suchlevel)



## TDCRP

- Speicherlayout hängt an Komplexität der Overlay-Kanten-Funktionen; die ist aber vorab unbekannt
- Lohnt sich noch das Speichern der kompletten Cliques?
- Hilft geschickte Approximation?

## Approximation hilft auch hier (sehr viel)

$\epsilon$ [%]		Lvl 1	Lvl 2	Lvl 3	Lvl 4	Lvl 5	Lvl 6
0	breakpoints	99 M	397 M	813 M	1 356 M	—	—
	td.arc.cplx.	21	69	188	507	—	—
0.1	breakpoints	65 M	126 M	142 M	121 M	68 M	26 M
	td.arc.cplx.	14	22	33	45	50	47
1.0	breakpoints	51 M	73 M	62 M	41 M	21 M	8 M
	td.arc.cplx.	11	13	14	15	15	14
10.0	breakpoints	28 M	28 M	19 M	12 M	6 M	1 M
	td.arc.cplx.	6	5	5	5	4	2

Approximation nach jedem Level.

## TDCRP robuster gegen Veränderungen in der Eingabe

Network	TCH		TDCRP	
	Pre. [s]	Q. [ms]	Cust. [s]	Q. [ms]
Europe	1 479	1.37	109	5.75
Europe, bad traffic	7 772	5.87	208	8.01
Europe, avoid highways	8 956	19.54	127	8.29



# Was fehlt?

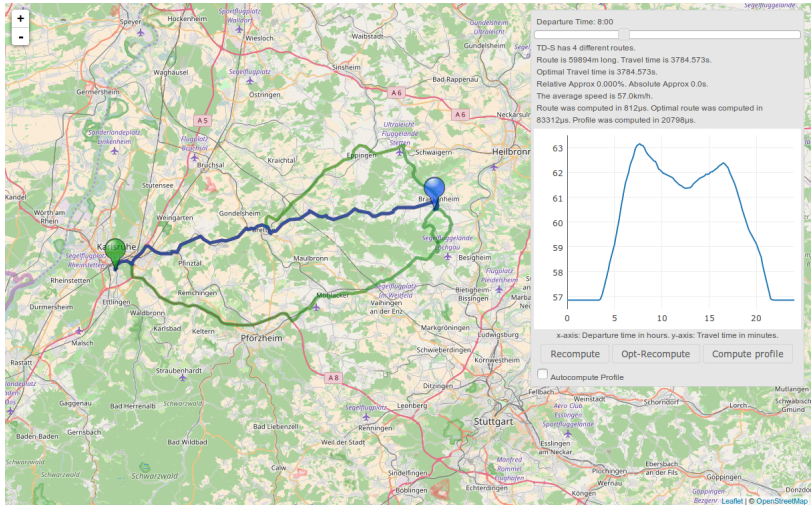
- Bis hierhin: Viele komplizierte Algorithmen
- Geht das nicht einfacher?

- Bis hierhin: Viele komplizierte Algorithmen
- Geht das nicht einfacher?
- Ein sinnvoller Grundalgorithmus:
  - Berechne eine CH auf dem untere-Schranken-Graph
  - Berechne zeitunabhängigen Pfad
  - Rechne zeitabhängige Fahrzeit entlang des Pfads nach
- heißt Freeflow

Etwas ausgefeilter:

- Tag in charakteristische Abschnitte aufteilen  
*Rush-hour Morgens, Mittags, Rush-hour Nachmittags, Nachts, (Live)*
- Zeit-**unabhängiger** Graph für jeden Abschnitt
  - Gewichte: Durchschnittlich travel time pro Abschnitt
- Eine (C)CH pro Abschnitt
- Zeit-**unabhängiger** kürzester Pfad pro Abschnitt
- Pfade zu Subgraph vereinigen
- **Earliest arrival**: TD-Dijkstra in Subgraph
- **Profil**: Alle 10 min. TD-Dijkstra's algo. in Subgraph

# Time-Dependent Sampling



	Prepro.	Custom.	Space	Query	Rel. error [%]	
	Cores × [s]	Cores × [s]	[GB]	[ms]	Avg.	Max.
TD-Dijkstra	-	-	-	525.48	-	-
TDCALT	540	-	0.23	5.36	-	-
TDCALT-K1.15	540	-	0.23	1.87	0.050	13.840
eco L-SHARC	4 680	-	1.03	6.31	-	-
heu SHARC	12 360	-	0.64	0.69	n/r	0.610
KaTCH	16 × 170	-	4.66	0.63	-	-
TCH	8 × 378	8 × 74	4.66	0.75	-	-
ATCH (1.0)	8 × 378	8 × 74	1.12	1.24	-	-
ATCH (∞)	8 × 378	8 × 74	0.55	1.66	-	-
inex. TCH (0.1)	8 × 378	8 × 74	1.34	0.70	0.020	0.100
inex. TCH (1.0)	8 × 378	8 × 74	1.00	0.69	0.270	1.010
TD-CRP (0.1)	16 × 273	16 × 16	0.78	1.92	0.050	0.250
TD-CRP (1.0)	16 × 273	16 × 8	0.36	1.66	0.680	2.850
TD-S+9	547	-	3.61	1.67	0.001	1.523
CATCHUp	16 × 31	16 × 18	1.06	0.70	-	-

	Run T. [ms]
eco SHARC	47 388
heu SHARC	847
ATCH (2.5)	30
TD-S+P4	19.5
TD-S+P9	22.2

	Prepro.	Custom.	Space	Query	Rel. error [%]	
	Cores × [s]	Cores × [s]	[GB]	[ms]	Avg.	Max.
TD-Dijkstra	-	-	-	869.79	-	-
KaTCH	16 × 874	-	42.81	1.38	-	-
TD-S+9	617	-	5.28	2.28	0.001	0.963
CATCHUp	16 × 35	16 × 92	1.50	1.87	-	-

# Performance EA Queries: Eur17

	Prepro.	Custom.	Space	Query	Rel. error [%]	
	Cores × [s]	Cores × [s]	[GB]	[ms]	Avg.	Max.
TD-Dijkstra	-	-	-	2 581.16	-	-
KaTCH	16 × 3 089	-	146.97	OOM	-	-
TD-S+9	3 368	-	18.84	4.03	0.002	1.159
CATCHUp	16 × 196	16 × 479	5.48	4.50	-	-



# Montag, 8. Juli 2019

- Daniel Delling:  
**Engineering and Augmenting Route Planning Algorithms**  
Ph.D. Thesis, Universität Karlsruhe (TH), 2009.
- Gernot Veit Batz, Robert Geisberger, Peter Sanders, Christian Vetter:  
**Minimum Time-Dependent Travel Times with Contraction Hierarchies**  
Journal of Experimental Algorithmics, 2013.
- Moritz Baum, Julian Dibbelt, Thomas Pajor, Dorothea Wagner:  
**Dynamic Time-Dependent Route Planning in Road Networks with User Preferences**  
In: *Proceedings of the 9th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'16)*, 2016. **Dynamic Time-Dependent Routing in Road Networks Through Sampling**  
In: *17th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS'17)*, 2017.