Karlsruher Institut für Technologie

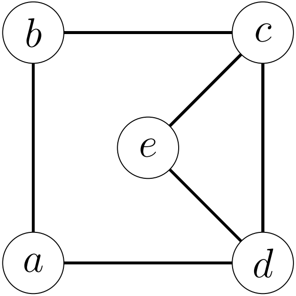
Algorithmen für Planare Graphen

19. Mai 2020, Übung 2

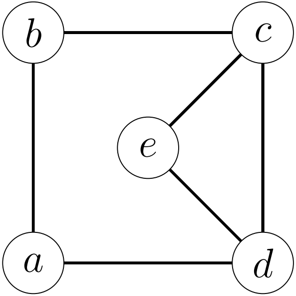
Lars Gottesbüren

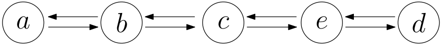
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Erweiterte Inzidenzlisten



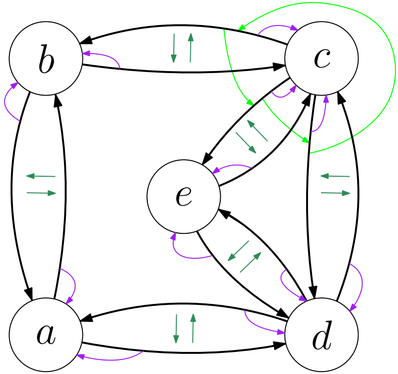
Erweiterte Inzidenzlisten

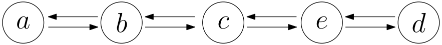




- Liste aller Knoten

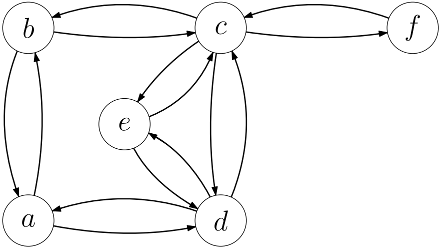
Erweiterte Inzidenzlisten





- Liste aller Knoten
- Knoten: Liste gerichteter Kanten entgegen dem Uhrzeigersinn
- Kante:
  - Zeiger auf entgegengerichtete Kante
  - Zeiger auf Ursprungsknoten

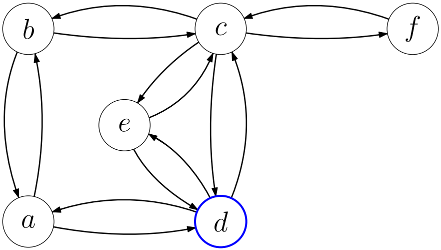
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.

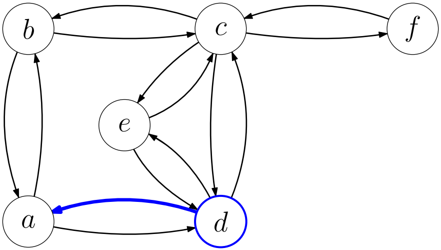
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.

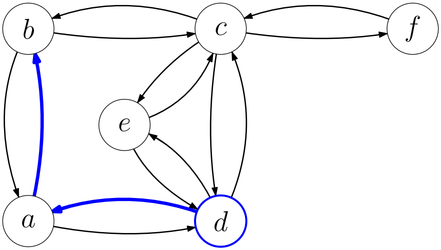
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.

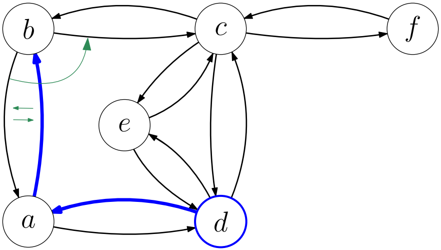
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.

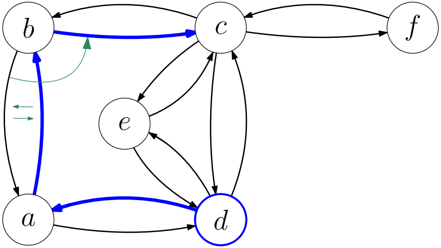
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.

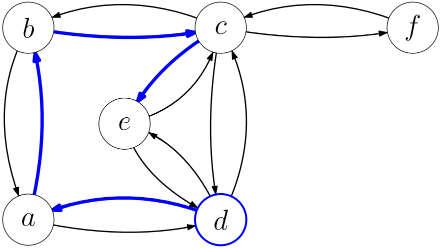
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.

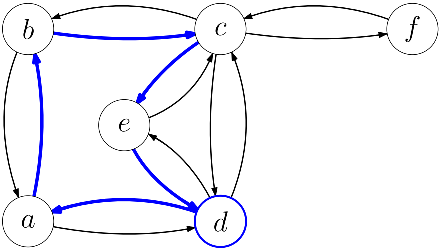
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.

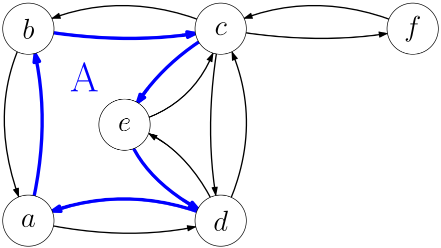
KIT
Karlsruher Institut für Technologie



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

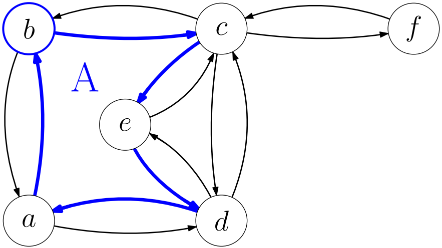
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

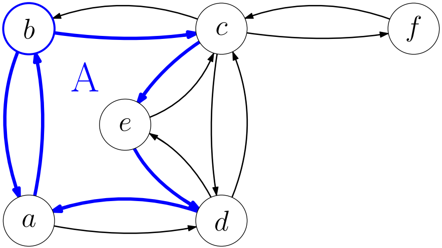
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

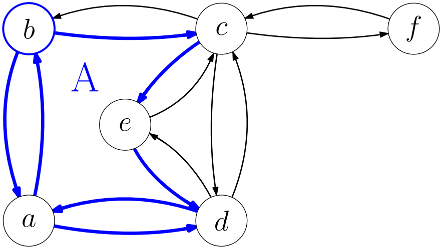
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

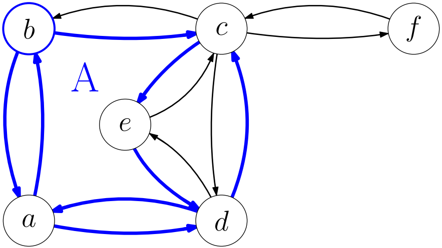
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

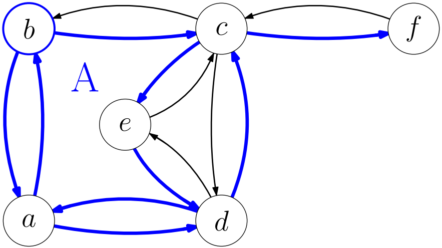
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

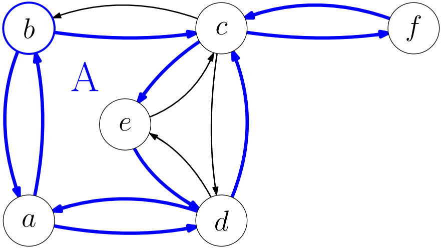
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

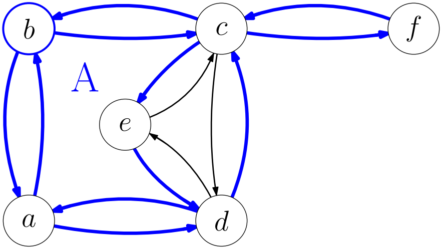
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

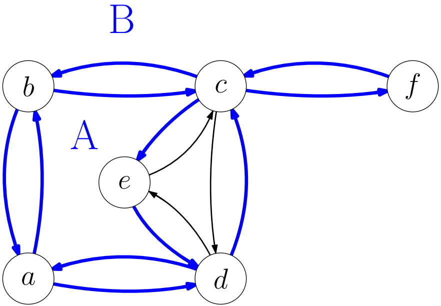
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

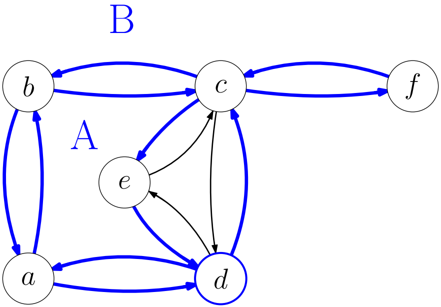
1 – Dualgraph



Duale Knoten

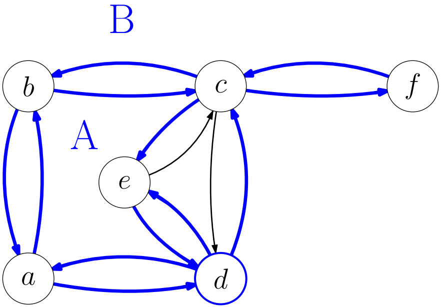
- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

1 – Dualgraph



Duale Knoten

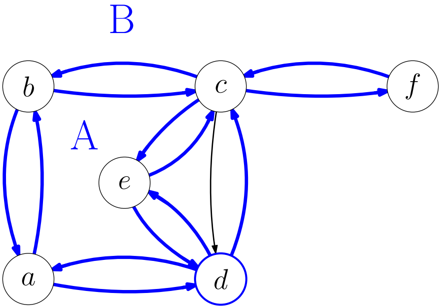
- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

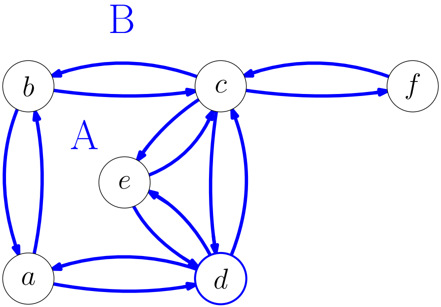
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

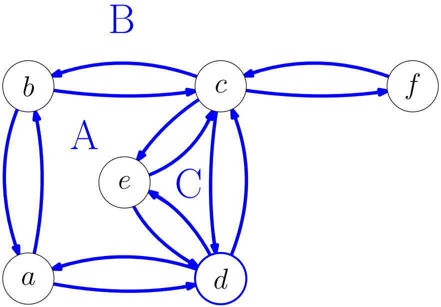
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

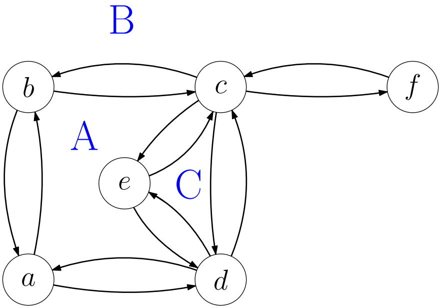
1 – Dualgraph



Duale Knoten

- Wähle einen Konten und eine ausgehende Kante beliebig.
- Beim nächsten Knoten wähle erste Kante gegen den Uhrzeigersinn.
- Markiere jede traversierte Kante mit der aktuellen *Facetten-ID*.
- Erhöhe die *Facetten-ID* wenn wieder beim Ausgangsknoten angekommen.

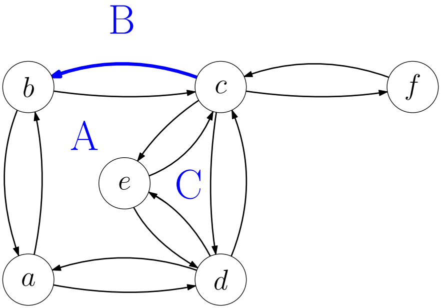
1 – Dualgraph



Duale Kanten

- Traversiere erneut jede Facette.
- Betrachte Hin- und Rückkante und füge für die dualen Knoten mit den entsprechenden *Facetten-IDs* eine duale Kante ein.
- Die dualen Kanten werden in der richtigen Reihenfolge eingefügt.

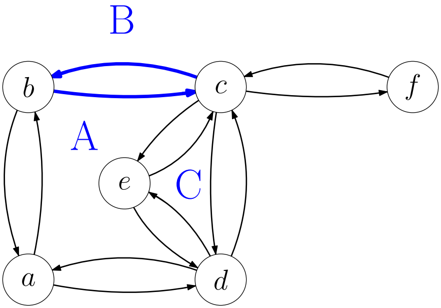
1 – Dualgraph



Duale Kanten

- Traversiere erneut jede Facette.
- Betrachte Hin- und Rückkante und füge für die dualen Knoten mit den entsprechenden *Facetten-IDs* eine duale Kante ein.
- Die dualen Kanten werden in der richtigen Reihenfolge eingefügt.

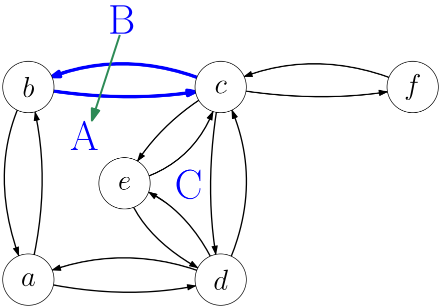
1 – Dualgraph



Duale Kanten

- Traversiere erneut jede Facette.
- Betrachte Hin- und Rückkante und füge für die dualen Knoten mit den entsprechenden *Facetten-IDs* eine duale Kante ein.
- Die dualen Kanten werden in der richtigen Reihenfolge eingefügt.

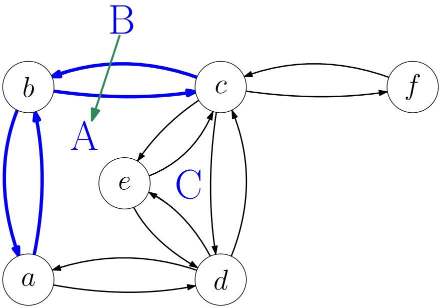
1 – Dualgraph



Duale Kanten

- Traversiere erneut jede Facette.
- Betrachte Hin- und Rückkante und füge für die dualen Knoten mit den entsprechenden *Facetten-IDs* eine duale Kante ein.
- Die dualen Kanten werden in der richtigen Reihenfolge eingefügt.

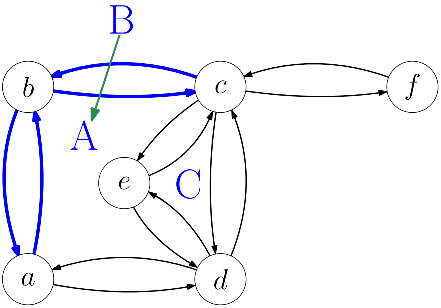
1 – Dualgraph



Duale Kanten

- Traversiere erneut jede Facette.
- Betrachte Hin- und Rückkante und füge für die dualen Knoten mit den entsprechenden *Facetten-IDs* eine duale Kante ein.
- Die dualen Kanten werden in der richtigen Reihenfolge eingefügt.

1 – Dualgraph



Rückkanten

- Speichere beim Einfügen der Kanten Zeiger von Kante im Ausgangsgraphen auf die Kante im Dualgraphen
- Wenn beim Einfügen einer Kante die Rückkante im Ausgangsgraphen schon einen Zeiger hat, ergänze beide Zeiger im Dualgraphen

2 – Außenplanare Graphen

G ist *außenplanar*.

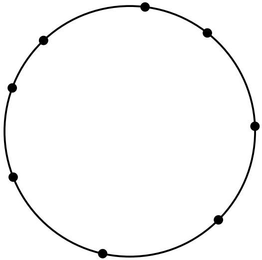
$\Leftrightarrow$ G lässt sich so planar einbetten, dass jeder Knoten auf der äußeren Facette liegt.

$\Leftrightarrow$ Fügt man einen Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten zu G hinzu, ist G immer noch planar.

1. G ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Ein außenplanarer Graph hat höchstens $2n - 3$ Kanten.

2.1 – Außenplanare Graphen

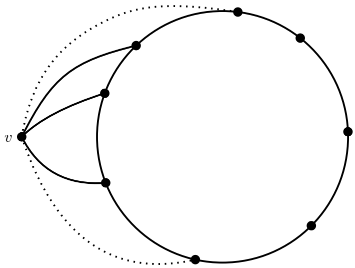
G ist außenplanar $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Betrachte außenplanare Einbettung von G.

2.1 – Außenplanare Graphen

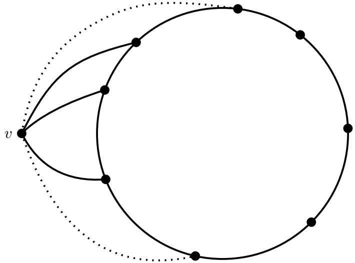
G ist außenplanar $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Betrachte außenplanare Einbettung von G.
- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \rightarrow G'$.
- G' ist planar $\Rightarrow$ G' enthält keine Unterteilung des K_5 oder $K_{3,3}$.
  $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung des K_4 oder $K_{2,3}$.

2.1 – Außenplanare Graphen

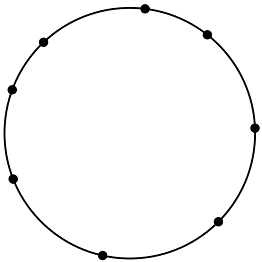
G ist außenplanar $\Leftarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \to G'$.
- G' enthält weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Unterteilung.
- $\Rightarrow$ G' ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von G' mit v auf der äußeren Facette.

2.1 – Außenplanare Graphen

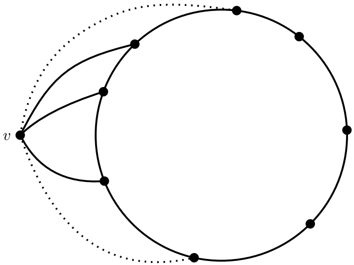
G ist außenplanar $\Leftarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \to G'$.
- G' enthält weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Unterteilung.
- $\Rightarrow$ G' ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von G' mit v auf der äußeren Facette.
- Lösche v $\Rightarrow$ alle Knoten von G liegen auf der äußeren Facette.

2.2 – Außenplanare Graphen

Ein außenplanarer Graph G enthält höchstens $2n - 3$ Kanten.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten von $G \to G'$.
- G' hat $m' = m + n$ Kanten und $n' = n + 1$ Knoten.
- Da G' planar ist gilt: $m' \leq 3n' - 6$
- Also: $n + m \leq 3(n + 1) - 6$
  $\Rightarrow m \leq 2n - 3$

3 – Färben außenplanarer Graphen

Zeigen Sei dass außenplanare Graphen 3-färbbar sind:

1. mithilfe des 4-Farben-Satzes
2. ohne den 4 -Farben-Satz

3 – Färben außenplanarer Graphen

Zeigen Sei dass außenplanare Graphen 3-färbbar sind:

1. mithilfe des 4-Farben-Satzes
   - Füge Knoten v ein und verbinde zu allen Knoten auf der äußeren Facette
   - Berechne 4-Färbung
   - kein anderer Knoten hat die gleiche Farbe wie $v \Rightarrow$ 3-Färbung
2. ohne den 4 -Farben-Satz

3.2 – Färben außenplanarer Graphen

- Klaue den Beweis für 5-Listenfärbbarkeit

3.2 – Färben außenplanarer Graphen

- Klaue den Beweis für 5-Listenfärbbarkeit
- Fall 1. Keine Sehne $\Rightarrow$ Der Graph ist ein Kreis.
  - gerade Länge $\Rightarrow$ 2-färbbar
  - ungerade Länge $\Rightarrow$ 3-färbbar

3.2 – Färben außenplanarer Graphen

- Klaue den Beweis für 5-Listenfärbbarkeit
- Fall 1. Keine Sehne $\Rightarrow$ Der Graph ist ein Kreis.
  - gerade Länge $\Rightarrow$ 2-färbbar
  - ungerade Länge $\Rightarrow$ 3-färbbar
- Fall 2. Graph hat Sehne $e = (u, v)$

3.2 – Färben außenplanarer Graphen

- Klaue den Beweis für 5-Listenfärbbarkeit
- Fall 1. Keine Sehne $\Rightarrow$ Der Graph ist ein Kreis.
  - gerade Länge $\Rightarrow$ 2-färbbar
  - ungerade Länge $\Rightarrow$ 3-färbbar
- Fall 2. Graph hat Sehne $e = (u, v)$
  - Zerlege Graph an e in G_1, G_2, färbe rekursiv

3.2 – Färben außenplanarer Graphen

- Klaue den Beweis für 5-Listenfärbbarkeit
- Fall 1. Keine Sehne $\Rightarrow$ Der Graph ist ein Kreis.
  - gerade Länge $\Rightarrow$ 2-färbbar
  - ungerade Länge $\Rightarrow$ 3-färbbar
- Fall 2. Graph hat Sehne $e = (u, v)$
  - Zerlege Graph an e in G_1, G_2, färbe rekursiv
  - Permutiere die Färbung von G_2 sodass u (v) in G_1 und G_2 die gleiche Farbe hat

3.2 – Färben außenplanarer Graphen

- Klaue den Beweis für 5-Listenfärbbarkeit
- Fall 1. Keine Sehne $\Rightarrow$ Der Graph ist ein Kreis.
  - gerade Länge $\Rightarrow$ 2-färbbar
  - ungerade Länge $\Rightarrow$ 3-färbbar
- Fall 2. Graph hat Sehne $e = (u, v)$
  - Zerlege Graph an e in G_1, G_2, färbe rekursiv
  - Permutiere die Färbung von G_2 sodass u (v) in G_1 und G_2 die gleiche Farbe hat
  - u und v haben unterschiedliche Farben. $\Rightarrow$ Legt 2 Farben in G_2 fest. $\Rightarrow$ actually 3

4.1 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

4.1 – Färbung von Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

- Färbe die Knoten iterativ.
- Gib jedem Knoten eine Farbe, die noch keiner seiner Nachbarn hat.
- Es gibt maximal Δ Nachbarn.
- $\Rightarrow$ Es gibt immer eine Farbe, die noch nicht verwendet wird.

4.2 – Färbung von Graphen

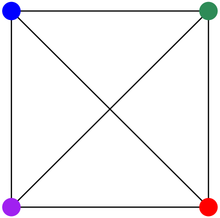
Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$ gilt.

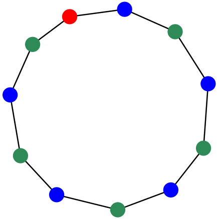
4.2 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$ gilt.



K_n



Kreise ungerader Länge

5.1 – Euler

Zeigen Sie

Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

5.1 – Euler

Zeigen Sie

Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

"$\Rightarrow$"

- Angenommen wir haben eine 2-Färbung von G, mit Knotenmenge R ist rot und Knotenmenge B ist blau.
- Jede Kante führt von R nach B oder von B nach R.
- Um mit einem Pfad durch G am Startknoten zu enden, muss man eine gerade Anzahl an Schritten gemacht haben.

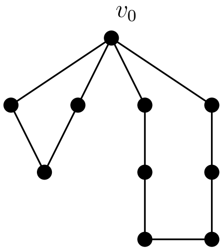
5.1 – Euler

Zeigen Sie

Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

"$\Leftarrow$"

- Angenommen jeder Kreis in G hat gerade Länge.
- Für jede Zusammenhangskomponente:
  - Wähle beliebigen Knoten v_0.
  - $d(v)$: Abstand von v zu v_0.
  - Färbe v mit $d(v)$ gerade rot, sonst blau.
  - Wäre die Färbung ungültig, wird ein Kreis ungerader Länge induziert.



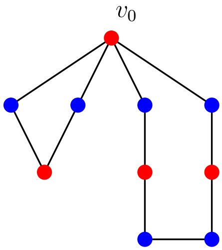
5.1 – Euler

Zeigen Sie

Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

"$\Leftarrow$"

- Angenommen jeder Kreis in G hat gerade Länge.
- Für jede Zusammenhangskomponente:
  - Wähle beliebigen Knoten v_0.
  - $d(v)$: Abstand von v zu v_0.
  - Färbe v mit $d(v)$ gerade rot, sonst blau.
  - Wäre die Färbung ungültig, wird ein Kreis ungerader Länge induziert.



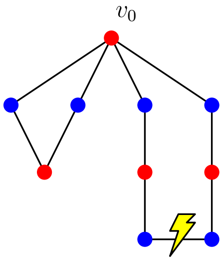
5.1 – Euler

Zeigen Sie

Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

"$\Leftarrow$"

- Angenommen jeder Kreis in G hat gerade Länge.
- Für jede Zusammenhangskomponente:
  - Wähle beliebigen Knoten v_0.
  - $d(v)$: Abstand von v zu v_0.
  - Färbe v mit $d(v)$ gerade rot, sonst blau.
  - Wäre die Färbung ungültig, wird ein Kreis ungerader Länge induziert.



5.2 – Euler

Zeigen Sie

Ein zweifach zusammenhängender planarer Graph (mit fester Einbettung) ist bipartit genau dann wenn sein Dualgraph Eulersch ist.

Hinweise

- Eulersch $\Leftrightarrow \forall v \in V \deg(v) \mod 2 \equiv 0$
- zweifach $\Rightarrow$ zusammenhängend jede Facette ist von einem Kreis begrenzt. Also keine Brücken oder Tentakel.

5.2 – Euler

Zeigen Sie

2-färbbar $\Leftrightarrow$ Dual eulersch

5.2 – Euler

Zeigen Sie

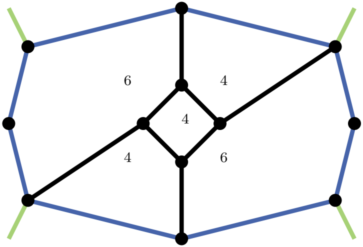
2-färbbar $\Leftrightarrow$ Dual eulersch

"$\Rightarrow$" Jeder Kreis hat gerade Länge $\Rightarrow$ Jede Facette hat geraden Grad $\Rightarrow$ Dual eulersch

5.2 – Euler

"$\Leftarrow$"

- Sei C ein Kreis. Zähle Facettengrade im Inneren von C.

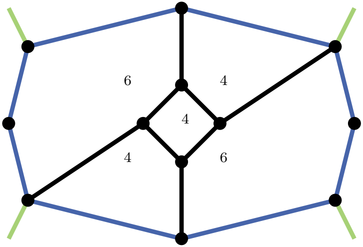


$$6+6+4+4+4=24=8+2\cdot 8$$

5.2 – Euler

"$\Leftarrow$"

- Sei C ein Kreis. Zähle Facettengrade im Inneren von C.
- Kanten auf C 1x, Kanten im Inneren 2x



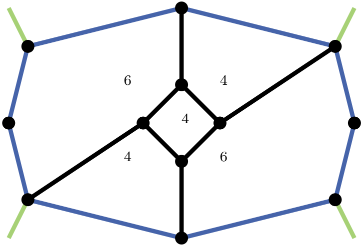
$6+6+4+4+4=24=8+2\cdot 8$

$$\sum_{\text{face } f \in \text{inside}(C)} \underbrace{|f|}_{\text{gerade}} = |C| + 2|E \cap \text{inside}(C)|$$

5.2 – Euler

"$\Leftarrow$"

- Sei C ein Kreis. Zähle Facettengrade im Inneren von C.
- Kanten auf C 1x, Kanten im Inneren 2x



$6 + 6 + 4 + 4 + 4 = 24 = 8 + 2 \cdot 8$

$$\sum_{\text{face } f \in \text{inside}(C)} \underbrace{|f|}_{\text{gerade}} = |C| + 2|E \cap \text{inside}(C)|$$

$$\Rightarrow |C| \text{ gerade} \Rightarrow \text{Graph bipartit}$$