

Algorithmen für Routenplanung

6. Vorlesung, Sommersemester 2020

Valentin Buchhold | 13. Mai 2020

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



Kürzeste Wege in Straßennetzwerken

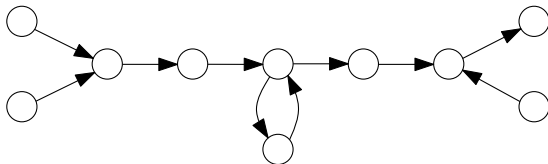
Beschleunigungstechniken (Fortsetzung)

Thema: Contraction Hierarchies (CH)

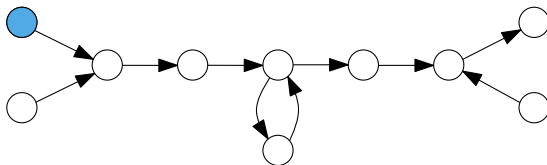
- CH-Basisvariante
- CH im Detail
 - Stall-on-demand
 - Pfadentpackung
 - Top-Down-Knotenordnungen

CH-Basisvariante

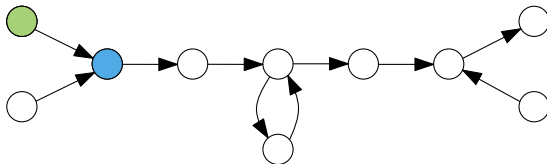




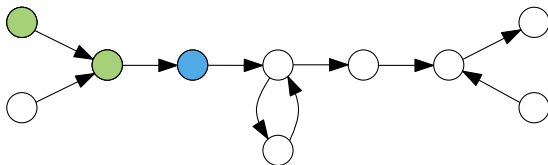
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



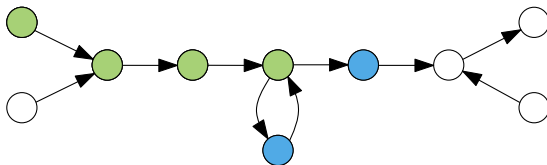
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



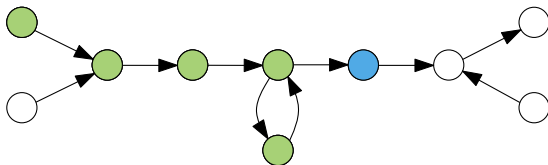
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



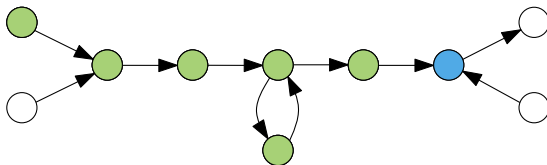
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



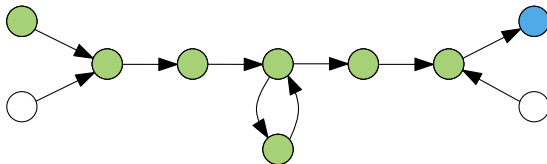
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



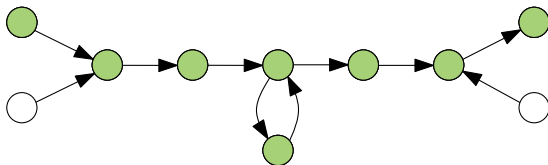
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



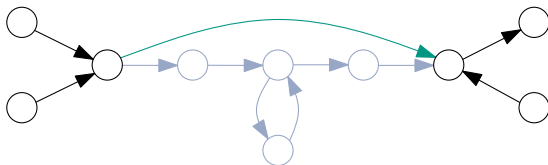
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



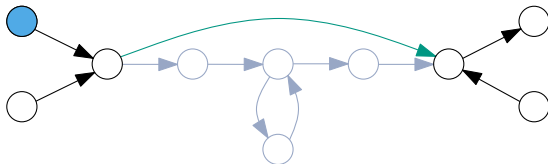
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



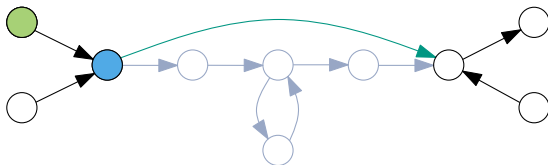
Dijkstras Algorithmus schaut sich alle Zwischenknoten an.
Das dauert.



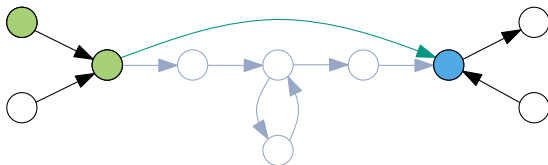
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn s oder t drin liegt.



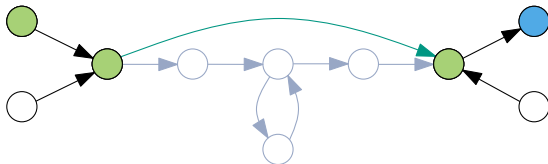
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn s oder t drin liegt.



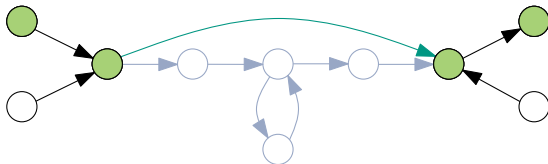
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn s oder t drin liegt.



Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn s oder t drin liegt.

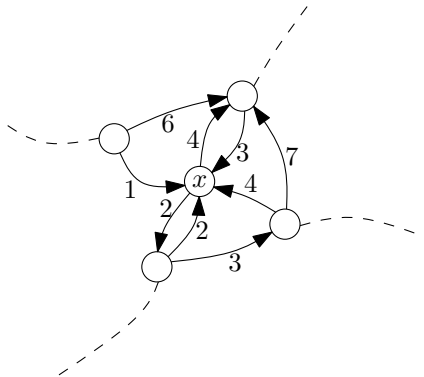


Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn s oder t drin liegt.



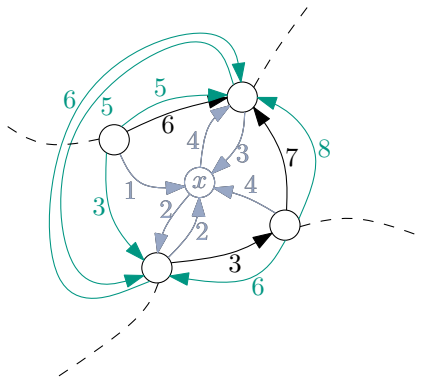
Idee: Füge Shortcut-Kante ein. Grauer Teilgraph muss nur angeschaut werden, wenn s oder t drin liegt.

Knotenkontraktion von x



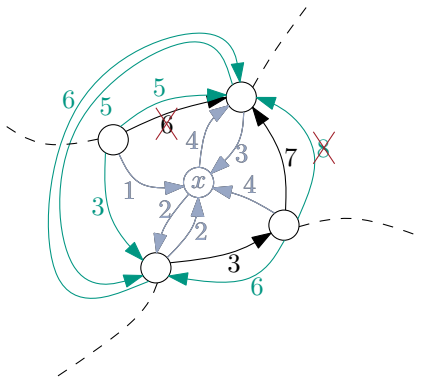
Kontraktion von x : Lösche x und füge Shortcuts zwischen Nachbarn ein, um die Distanzen zwischen allen Knoten zu erhalten

Knotenkontraktion von x



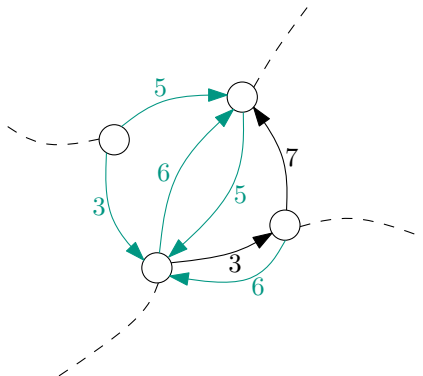
Kontraktion von x : Lösche x und füge Shortcuts zwischen Nachbarn ein, um die Distanzen zwischen allen Knoten zu erhalten

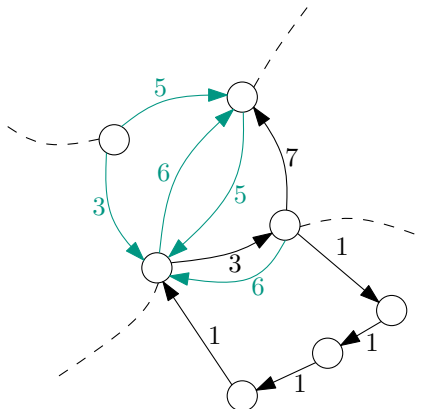
Knotenkontraktion von x



Bei Mehrfachkanten: Längere Kanten verwerfen

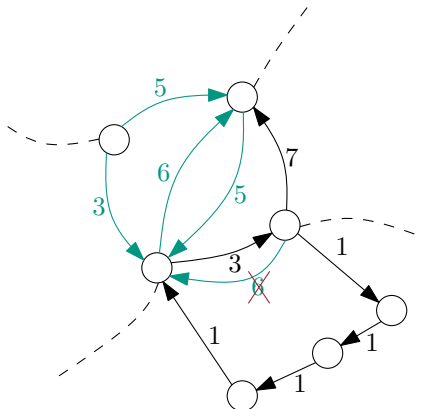
Knotenkontraktion von x





Falls es einen kürzeren Pfad durch den Restgraphen gibt, dann kann man einen Shortcut auch verwerfen.

Suche nach solchem Pfad heißt Zeugensuche/Witness Search



Falls es einen kürzeren Pfad durch den Restgraphen gibt, dann kann man einen Shortcut auch verwerfen.

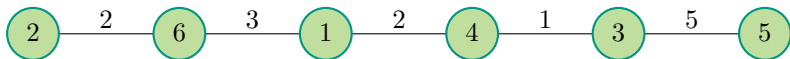
Suche nach solchem Pfad heißt Zeugensuche/Witness Search

- Es seien y und z zwei Nachbarn des kontrahierten Knoten x
- Wir fügen einen Shortcut (y, z) mit Gewicht $\text{len}(y, x) + \text{len}(x, z)$ ein, wenn $y \rightarrow x \rightarrow z$ der einzige kürzeste $y - z$ -Weg ist
- Zum Überprüfen, ob es einen kürzeren Weg gibt, startet man einen Dijkstra von y aus nach z . Diese Suche kann teuer sein. Mögliche Optimierungen:
 - Suche darf nicht über den Knoten x gehen
 - Bidirektionale Variante von Dijkstras Algorithmus
 - Wenn die Suchen sich treffen, kann man abbrechen
 - Wenn die Suchfront größer wird als $\text{len}(y, x) + \text{len}(x, z)$, kann man abbrechen
- Wenn das immer noch zu langsam ist: Suche nach k Schritten abbrechen. Eventuell gibt es einen Pfad, den wir nicht finden. Das führt zu zusätzlichen Shortcuts, aber das ist kein Problem bzgl. der Korrektheit.

Grundidee

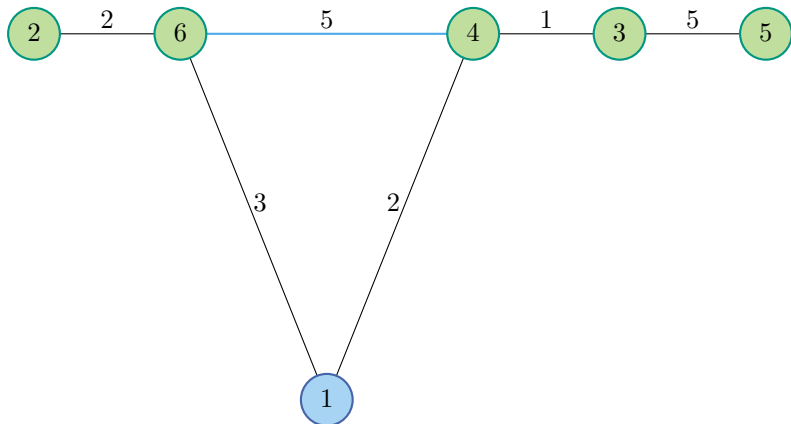
- Eingabegraph G
- Ordne Knoten von G nach “Wichtigkeit”: $v_1 \dots v_n$
- Kontrahiere Knoten iterativ aus G heraus
 - zuerst den “unwichtigsten” Knoten v_1
 - den “wichtigsten” Knoten v_n als letztes
- Graph mit Shortcuts heißt augmentierter Graph

Contraction Hierarchy



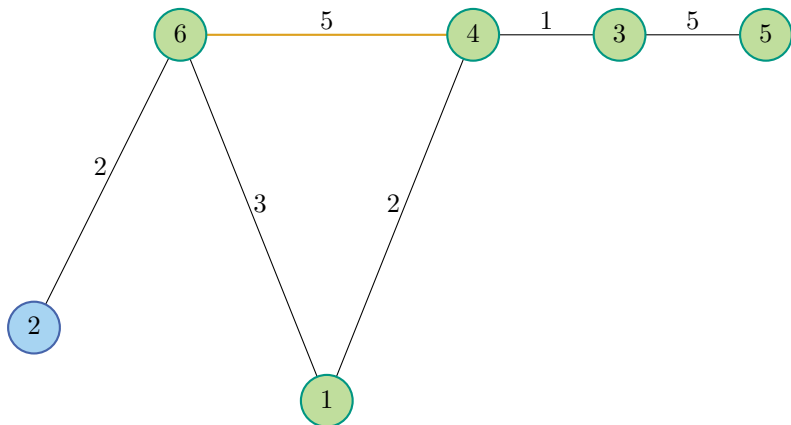
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



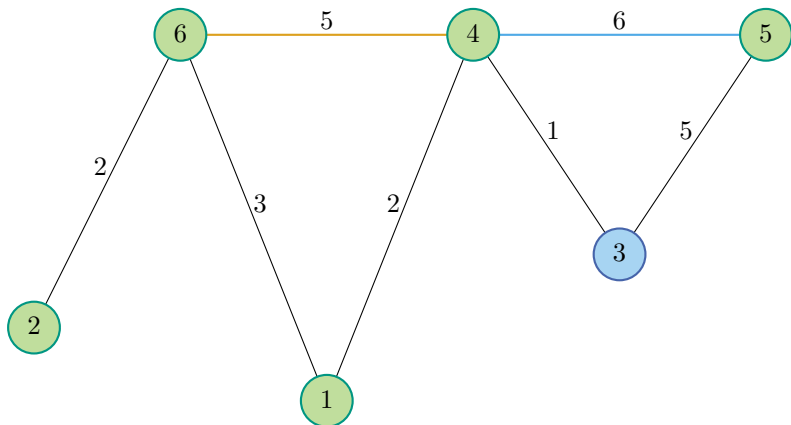
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



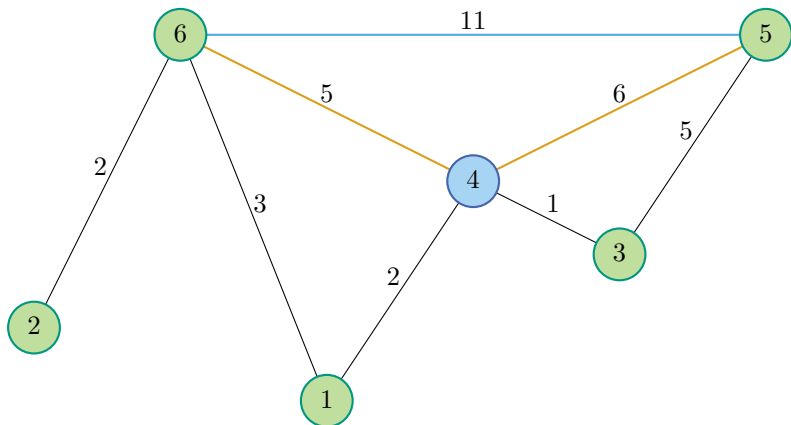
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



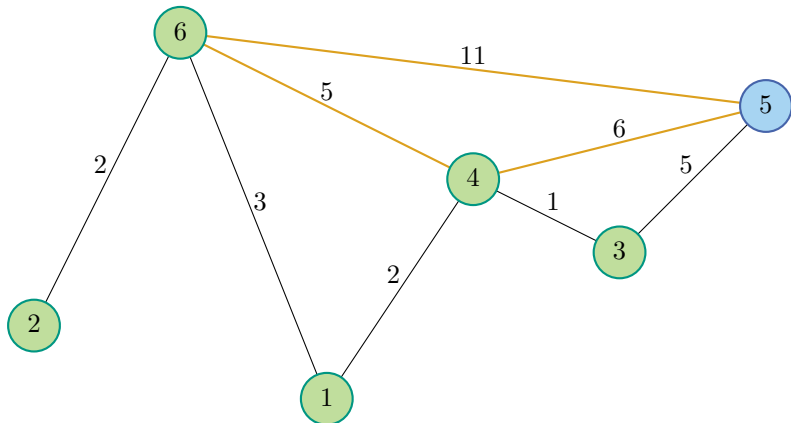
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



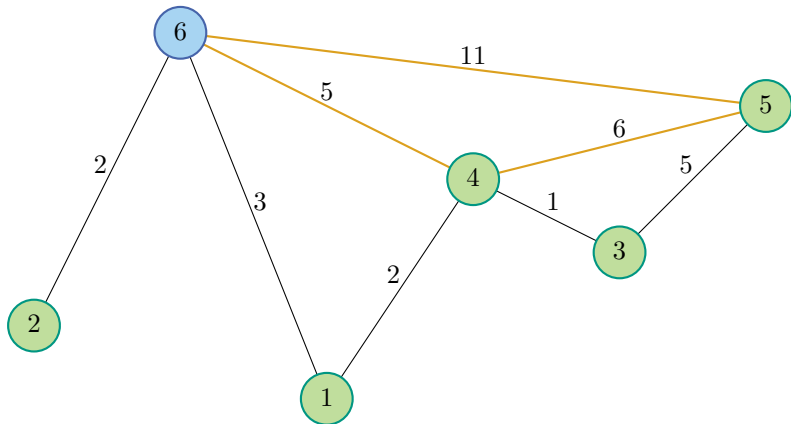
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



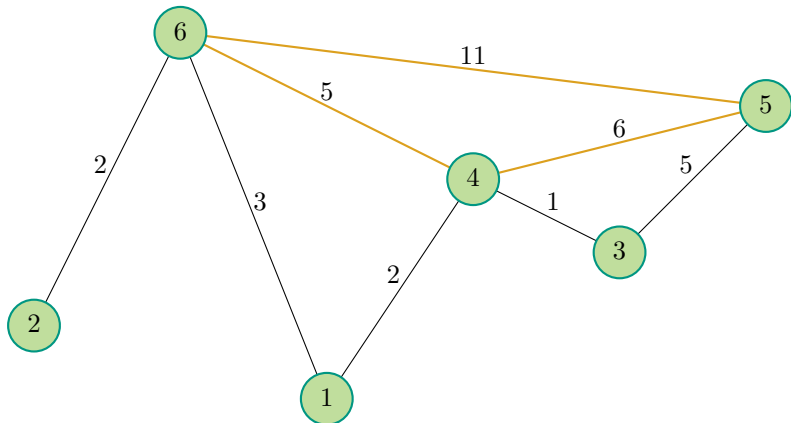
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



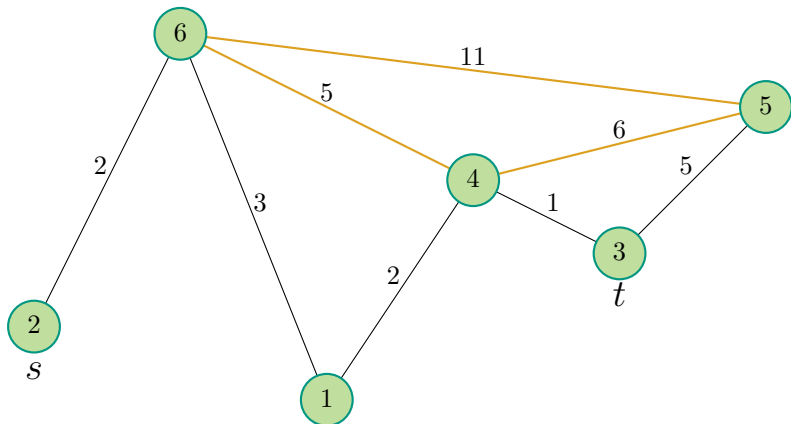
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



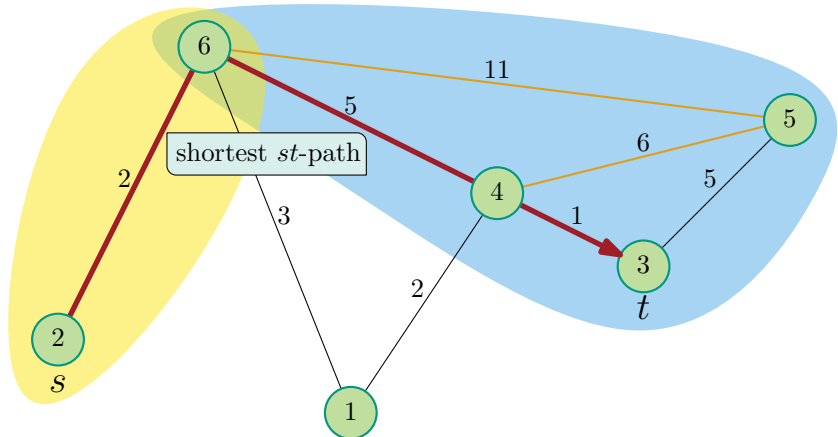
Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



Knoten nummeriert nach "Wichtigkeit"

Contraction Hierarchy



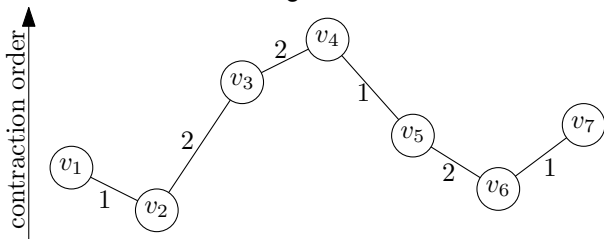
Für jeden ursprünglichen kürzesten Weg gibt es einen hoch-runter-Pfad

- Bidirektionale Variante von Dijkstras Algorithmus
- Verfolge nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- Vorwärtssuche findet den “hoch”-Teil des Pfads
- Rückwärtssuche findet den “runter”-Teil des Pfads
- Abbruch, wenn der min-key beider Queues größer ist als der bisher kürzeste gefundene Pfad

Korrektheit

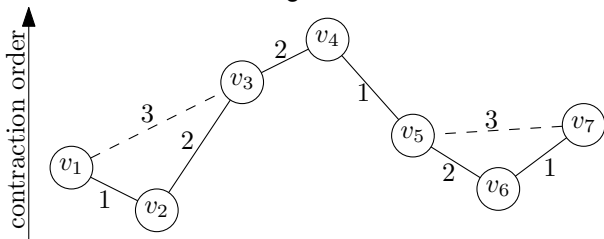
- Die Vorwärtssuche findet nur Aufwärtspfade.
- Die Rückwärtssuche findet nur Abwärtspfade.
- Gemeinsam werden nur Pfade gefunden die hoch und dann wieder runter gehen.
- Wir müssen also beweisen, dass es in G^+ immer einen kürzesten hoch-runter Pfad gibt.

- Die Vorwärtssuche findet nur Aufwärtspfade.
- Die Rückwärtssuche findet nur Abwärtspfade.
- Gemeinsam werden nur Pfade gefunden die hoch und dann wieder runter gehen.
- Wir müssen also beweisen, dass es in G^+ immer einen kürzesten hoch-runter Pfad gibt.



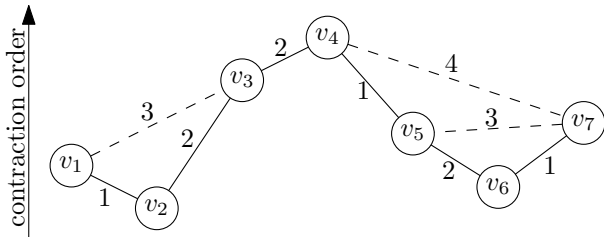
- Es gibt einen kürzesten Weg P
- Wenn P kein hoch-runter Pfad ist, dann gibt es einen Knoten der höhere Nachbarn hat
- Dann gibt es auch Shortcut oder Zeugen zw. den Nachbarn

- Die Vorwärtssuche findet nur Aufwärtspfade.
- Die Rückwärtssuche findet nur Abwärtspfade.
- Gemeinsam werden nur Pfade gefunden die hoch und dann wieder runter gehen.
- Wir müssen also beweisen, dass es in G^+ immer einen kürzesten hoch-runter Pfad gibt.



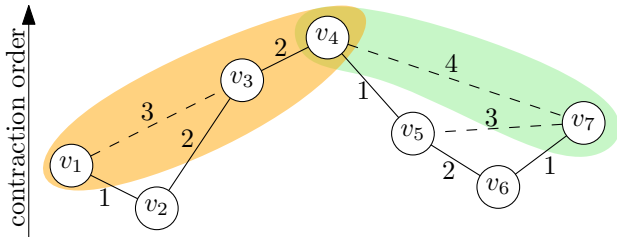
- Es gibt einen kürzesten Weg P
- Wenn P kein hoch-runter Pfad ist, dann gibt es einen Knoten der höhere Nachbarn hat
- Dann gibt es auch Shortcut oder Zeugen zw. den Nachbarn

- Die Vorwärtssuche findet nur Aufwärtspfade.
- Die Rückwärtssuche findet nur Abwärtspfade.
- Gemeinsam werden nur Pfade gefunden die hoch und dann wieder runter gehen.
- Wir müssen also beweisen, dass es in G^+ immer einen kürzesten hoch-runter Pfad gibt.



- Es gibt einen kürzesten Weg P
- Wenn P kein hoch-runter Pfad ist, dann gibt es einen Knoten der höhere Nachbarn hat
- Dann gibt es auch Shortcut oder Zeugen zw. den Nachbarn

- Die Vorwärtssuche findet nur Aufwärtspfade.
- Die Rückwärtssuche findet nur Abwärtspfade.
- Gemeinsam werden nur Pfade gefunden die hoch und dann wieder runter gehen.
- Wir müssen also beweisen, dass es in G^+ immer einen kürzesten hoch-runter Pfad gibt.



- Es gibt einen kürzesten Weg P
- Wenn P kein hoch-runter Pfad ist, dann gibt es einen Knoten der höhere Nachbarn hat
- Dann gibt es auch Shortcut oder Zeugen zw. den Nachbarn

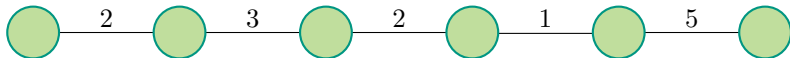
Grund-Idee:

- Wir wollen wenig Shortcuts
- Ein Knoten ist “unwichtig”, wenn er wenig Shortcuts erzeugt
- → simulierte Knotenkontraktion, um Knoten zu gewichten

Algorithmus:

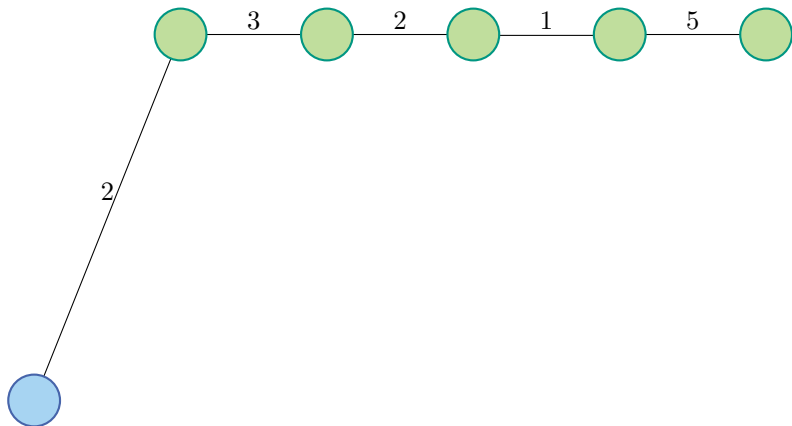
- Baue eine große Warteschlange mit allen Knoten sortiert nach ihrer “Wichtigkeit”
- Kontrahiere iterativ unwichtigsten Knoten
- Kontraktion eines Knotens kann “Wichtigkeit” der Nachbarn beeinflussen
- → “Wichtigkeit” der Nachbarn neu berechnen

Problemfall: Pfad



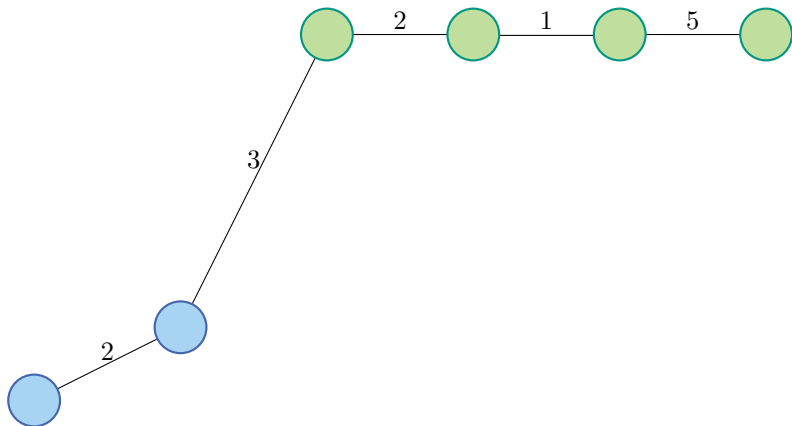
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



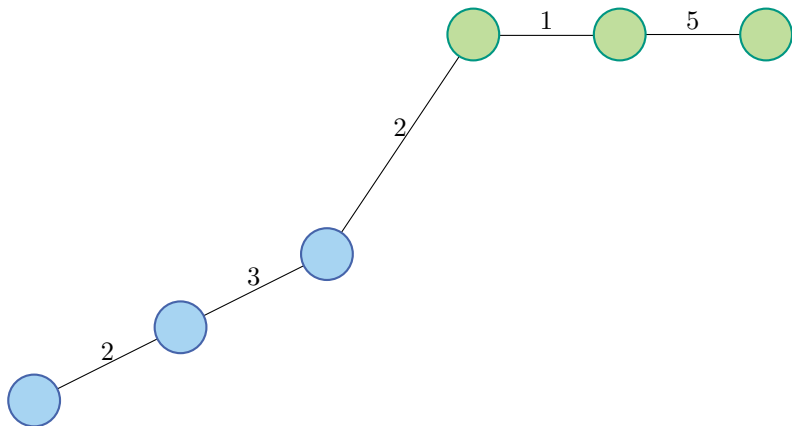
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



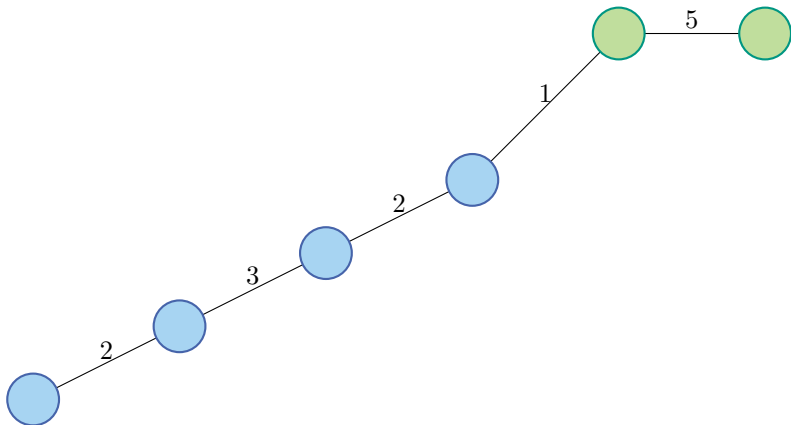
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



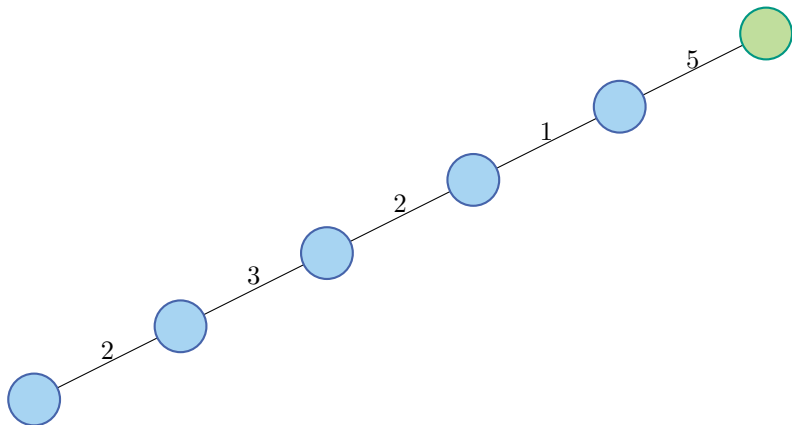
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



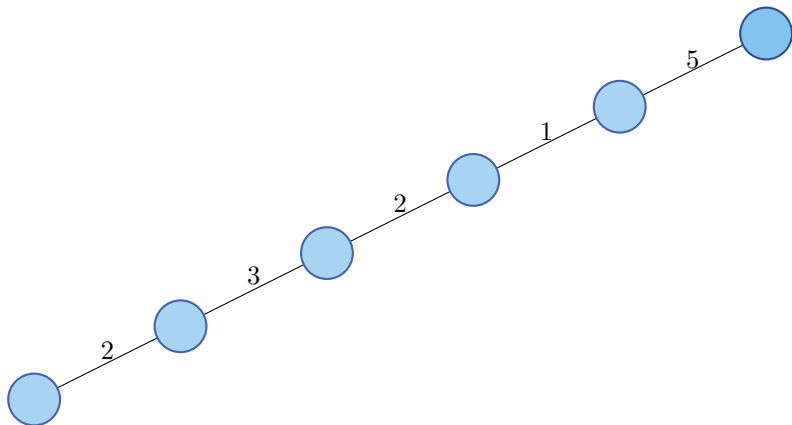
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



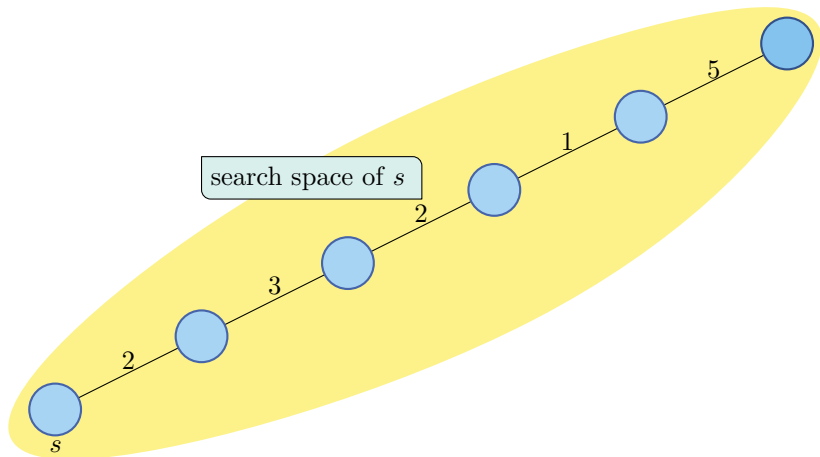
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad



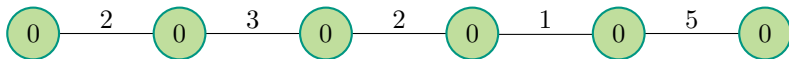
Linken Knoten kontrahieren erzeugt keine Shortcuts

Problemfall: Pfad

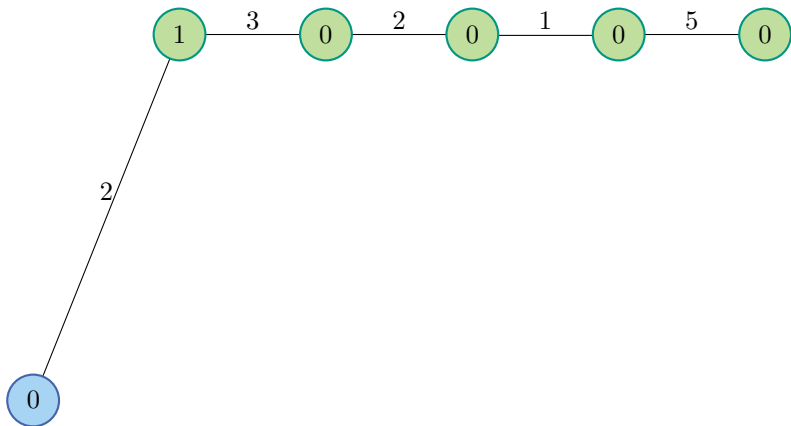


Suchraum von s ist der ganze Graph \rightarrow keine Beschleunigung

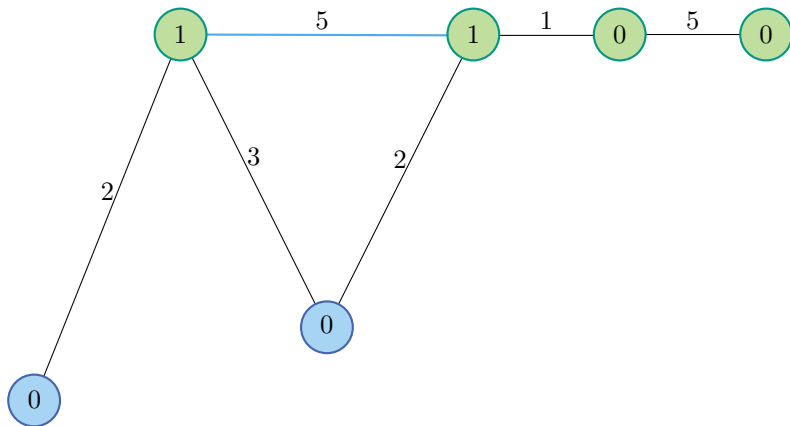
Problemfall: Pfad



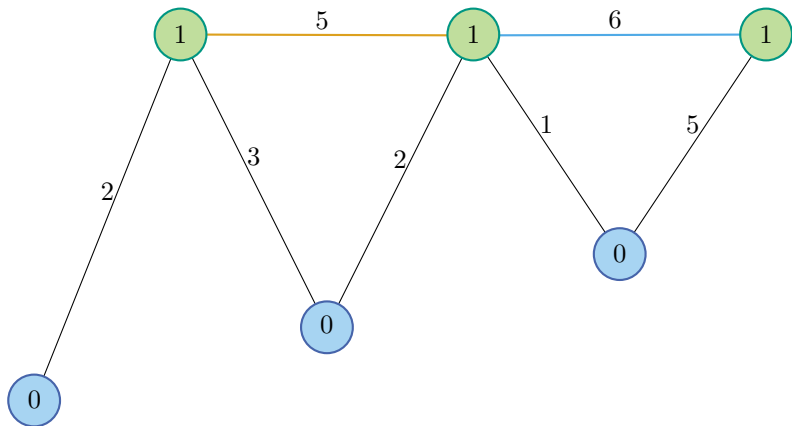
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$



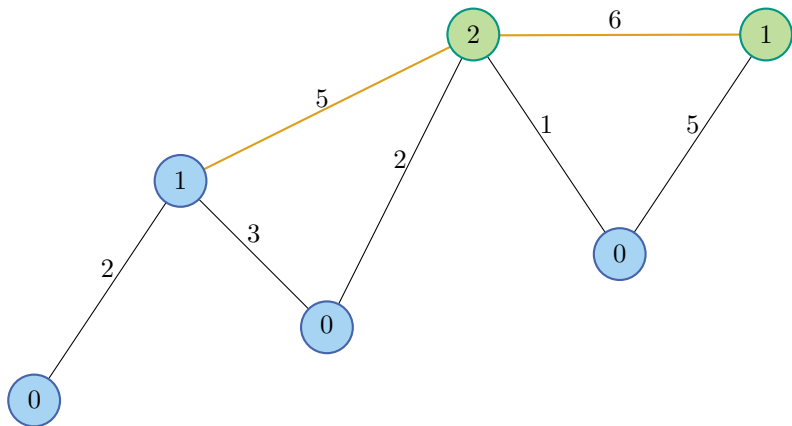
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$



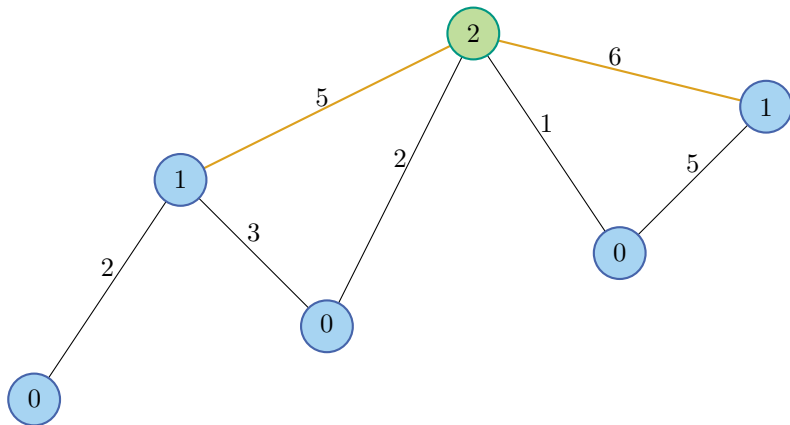
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$



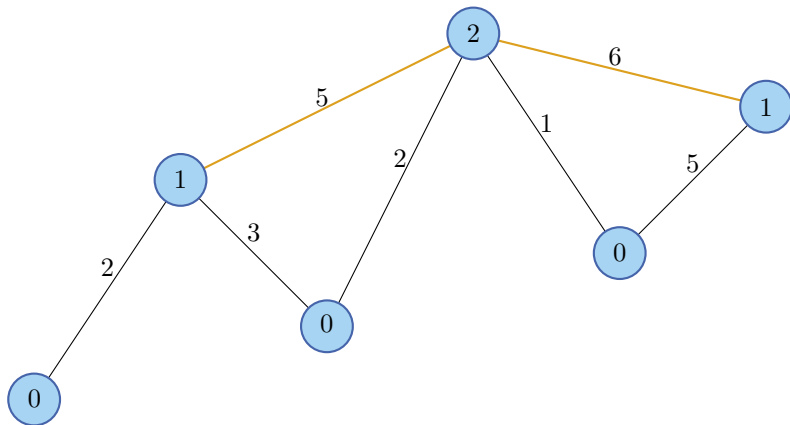
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$



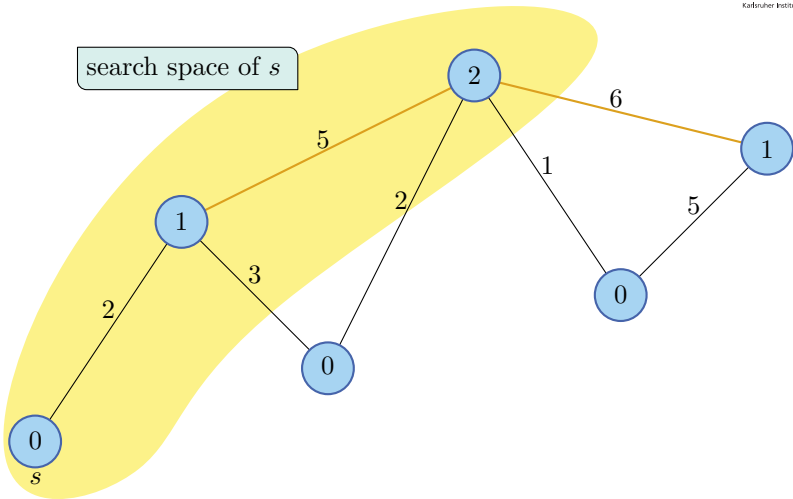
2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$



2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$



2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$



2-tes Kriterium: Das geschätzte Level $\ell(x)$ eines Knotens x kontrahiert \rightarrow für alle Nachbarn y : $\ell(y) \leftarrow \max\{\ell(y), \ell(x) + 1\}$

- Speichere für jede Kante e die Anzahl $h(e)$ der Originalkanten, aus denen sie besteht
- Es sei $A(x)$ die Menge der eingefügten Shortcuts, wenn x kontrahiert werden würde
- Analog: $D(x)$ die Menge der gelöschten Kanten
- Es sei $I(x)$ die “Wichtigkeit” von x

Eine funktionierende Definition von $I(x)$ ist

$$I(x) := \ell(x) + \frac{|A(x)|}{|D(x)|} + \frac{\sum_{e \in A(x)} h(e)}{\sum_{e \in D(x)} h(e)}$$

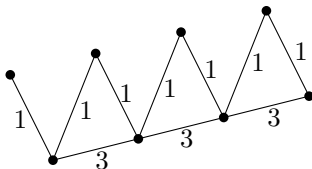
Hinweis: Es gibt sehr viele unterschiedliche Definitionen für I . Das ist nur ein Kochrezept, das sich bewährt hat und jeder würzt leicht anders

CH im Detail

Stall-On-Demand

Beobachtung:

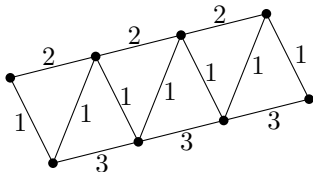
- Suchen können Knoten mit zu großer Distanz besuchen



Stall-On-Demand

Beobachtung:

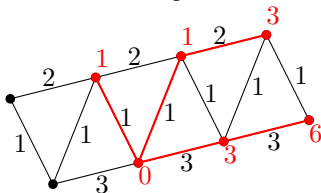
- Suchen können Knoten mit zu großer Distanz besuchen



Stall-On-Demand

Beobachtung:

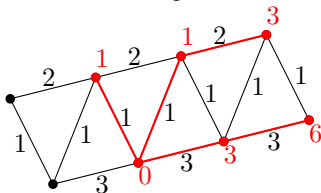
- Suchen können Knoten mit zu großer Distanz besuchen



Stall-On-Demand

Beobachtung:

- Suchen können Knoten mit zu großer Distanz besuchen

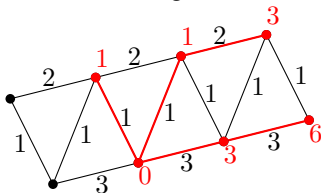


- Kann man zum prunen verwenden

Stall-On-Demand

Beobachtung:

- Suchen können Knoten mit zu großer Distanz besuchen

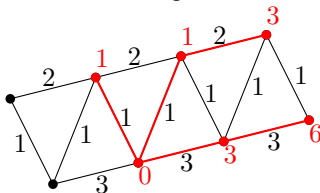


- Kann man zum prunen verwenden
- Jeder Teilpfad eines kürzesten hoch-runter-Pfads muss ein kürzester Pfad sein
- Ehe man einen Knoten setzt, sucht man nach kürzeren hoch-runter-Pfaden, gibt es diese kann man prunen

Stall-On-Demand

Beobachtung:

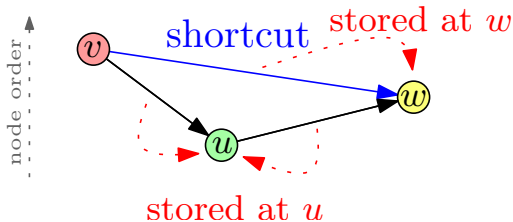
- Suchen können Knoten mit zu großer Distanz besuchen



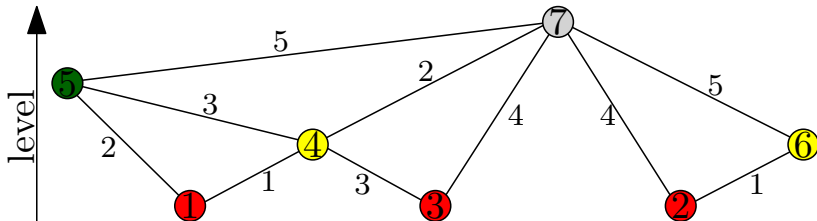
- Kann man zum prunen verwenden
- Jeder Teilpfad eines kürzesten hoch-runter-Pfads muss ein kürzester Pfad sein
- Ehe man einen Knoten setzt, sucht man nach kürzeren hoch-runter-Pfaden, gibt es diese kann man prunen
- Knoten v wird geprunt, wenn es Aufwärtsnachbar u von v gibt, so dass $d(u) + w(u, v) < d(v)$
- (Dies ist eine vereinfachte Version des ursprünglichen "Stall-On-Demand".)

Suchgraph:

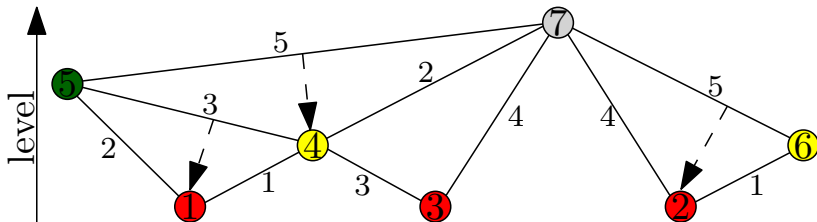
- normalerweise: speichere Kanten (v, w) in den Adjazenz-Arrays von v und w um bidirektionale Suche zu erlauben
- für die CH-Suche reicht es aus, die Kante nur an den Knoten $\min\{r(v), r(w)\}$ zu speichern



- für jeden Shortcut (u, w) eines Pfades (u, v, w) , speichere Mittelknoten v an der Kante
- expandiere Pfade mittels Rekursion



- für jeden Shortcut (u, w) eines Pfades (u, v, w) , speichere Mittelknoten v an der Kante
- expandiere Pfade mittels Rekursion



Wie Knoten ordnen?

Wie Knoten ordnen?

- Bottom-Up, suche nach unwichtigen Knoten [GSSV12], haben wir schon gemacht
- Top-Down, suche nach wichtigen Knoten [ADGW12]
- Sampling Path-Greedy, Variante von Top-Down [DGPW14]

Path-Greedy

- Idee: Baue Ordnung von wichtig nach unwichtig
- Knoten wichtig, wenn er auf vielen kürzesten Wegen liegt

- initial ist die Ordnung leer
- Pfad ist überdeckt, wenn er einen Knoten in der Ordnung enthält
- sei U die Menge der nicht überdeckten kürzesten Pfade
- initial ist U die Menge aller kürzesten Pfade

- Algo:
 - Solange die Ordnung nicht voll:
 - Packe Knoten v oben in die Ordnung, so dass v möglichst viele Pfade aus U überdeckt
 - Entferne diese Pfade aus U

Path-Greedy: Diskussion

- n mal all-pairs shortest paths
→ $n^3 \log n$ mit Dijkstra auf dünnen Graphen
- linear Speicherverbrauch
- Kann auf $n^2 \log n$ gedrückt werden mit $O(n^2)$ Speicher
 $O(n^2)$ kommt daher, dass n Kürzeste-Wege-Bäume verwaltet werden
- gute Qualität der Ordnung, aber langsam

- Problem von Top-Down: $O(n^2)$ Speicherverbrauch, da n kürzeste-Wege-Bäume verwaltet werden
- Ansatz von Sampling Path-Greedy: speichere nur ein “paar” kürzeste Wege Bäume
- d.h., der Algorithmus sampelt Bäume

Sampling Path-Greedy [DGPW14]

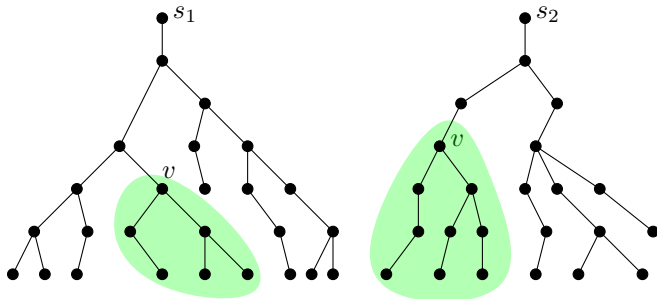
Idee

- Verwalte nur wenige zufällige Kürzeste-Wege-Bäume
 - Quellknoten: $s_1, s_2 \dots$
- Wähle v , der auf den meisten Pfaden in diesen Bäumen liegt

Sampling Path-Greedy [DGPW14]

Idee

- Verwalte nur wenige zufällige Kürzeste-Wege-Bäume
 - Quellknoten: $s_1, s_2 \dots$
- Wähle v , der auf den meisten Pfaden in diesen Bäumen liegt

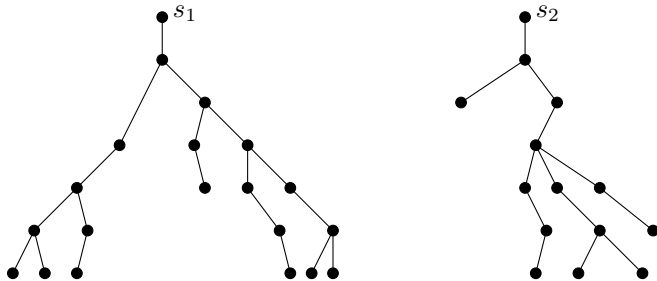


- Die kürzeste Wege Bäume von s_1 und s_2
- v liegt auf so vielen Pfaden, die bei s_1 beginnen, wie sein s_1 -Teilbaum groß ist (hier 6)

Sampling Path-Greedy [DGPW14]

Idee

- Verwalte nur wenige zufällige Kürzeste-Wege-Bäume
 - Quellknoten: $s_1, s_2 \dots$
- Wähle v , der auf den meisten Pfaden in diesen Bäumen liegt



- Die kürzeste Wege Bäume von s_1 und s_2
- v liegt auf so vielen Pfaden, die bei s_1 beginnen, wie sein s_1 -Teilbaum groß ist (hier 6)
- Entferne Teilbäume in allen verwalteten Bäumen

Experimente zeigen:

- Nur wenige Bäume notwendig um die wichtigsten Knoten zu finden
- Für das Mittelfeld und die unwichtigen Knoten werden mehr Bäume gebraucht

Beobachtung:

- Durch Löschen der Teilbäume wird Speicher frei

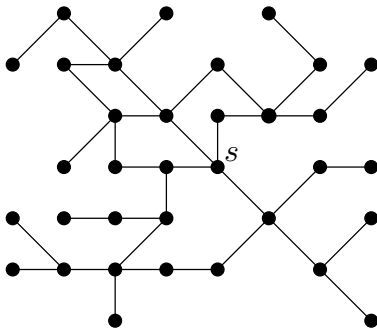
Idee:

- Fülle frei gewordenen Speicher mit neuen Bäumen

Neue Bäume Aufbauen [DGPW14]

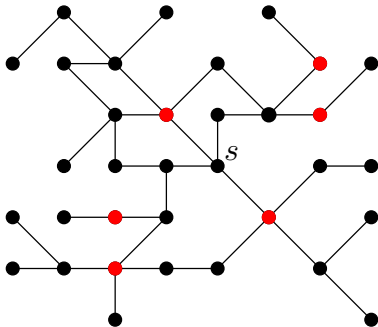
- Durch entfernen von Teilbäumen schrumpfen die Bäume
- → Baue neue Bäume auf
- Wie machen wir das ohne uns den ganzen Graph anzuschauen?

- Durch entfernen von Teilbäumen schrumpfen die Bäume
- → Baue neue Bäume auf
- Wie machen wir das ohne uns den ganzen Graph anzuschauen?



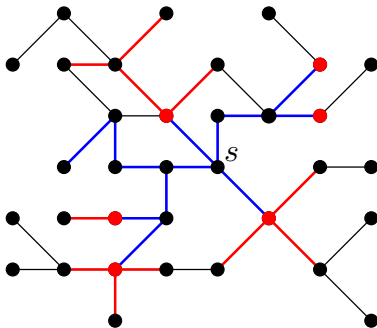
s ist neue Baumwurzel

- Durch entfernen von Teilbäumen schrumpfen die Bäume
- → Baue neue Bäume auf
- Wie machen wir das ohne uns den ganzen Graph anzuschauen?



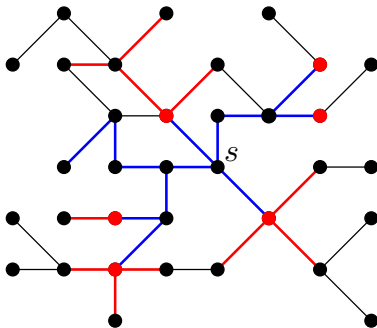
rote Knoten sind bereits in der Ordnung

- Durch entfernen von Teilbäumen schrumpfen die Bäume
- → Baue neue Bäume auf
- Wie machen wir das ohne uns den ganzen Graph anzuschauen?



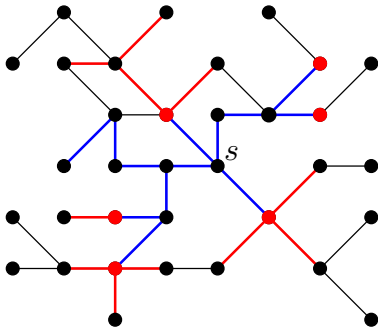
lasse Dijkstra laufen

- Durch entfernen von Teilbäumen schrumpfen die Bäume
- → Baue neue Bäume auf
- Wie machen wir das ohne uns den ganzen Graph anzuschauen?



speichere welche Knoten über rote Knoten erreicht wurden

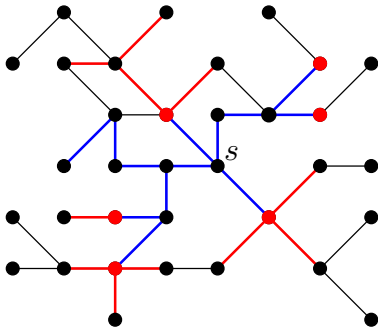
- Durch entfernen von Teilbäumen schrumpfen die Bäume
- → Baue neue Bäume auf
- Wie machen wir das ohne uns den ganzen Graph anzuschauen?



breche ab, wenn die Queue nur noch Knoten enthält die über rote Knoten erreicht wurden

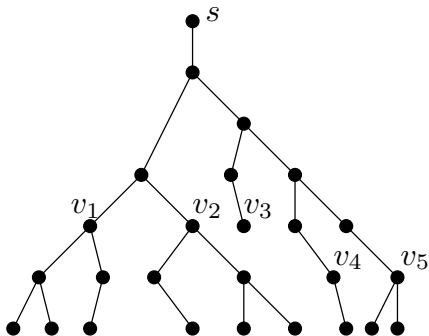
Neue Bäume Aufbauen [DGPW14]

- Durch entfernen von Teilbäumen schrumpfen die Bäume
- → Baue neue Bäume auf
- Wie machen wir das ohne uns den ganzen Graph anzuschauen?



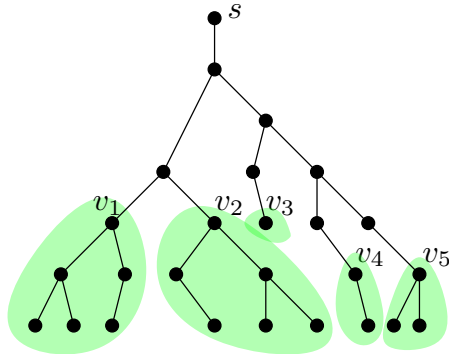
der blaue Teilgraph ist der neue Baum

Neue Bäume Aufbauen (alternative Sichtweise) [DGPW14]



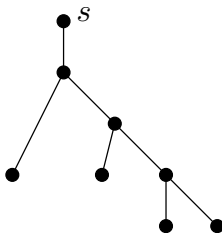
Die Knoten v_i wurden bereits ausgewählt

Neue Bäume Aufbau (alternative Sichtweise) [DGPW14]



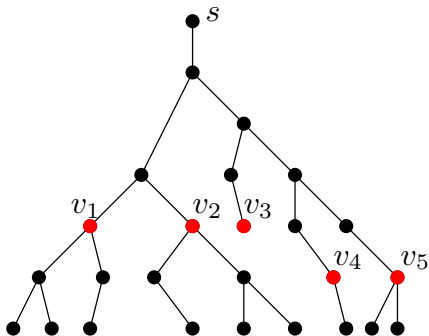
Ihre Teilbäume werden nicht gebraucht
→ Wir wollen diese Teile gar nicht erst aufbauen

Neue Bäume Aufbauen (alternative Sichtweise) [DGPW14]



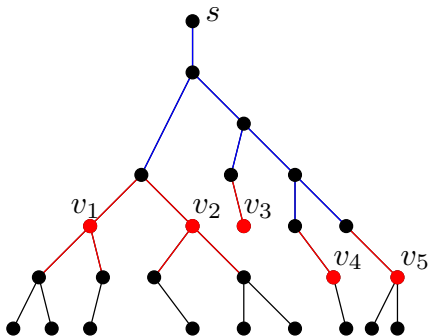
Dies ist der Baum den wir haben wollen

Neue Bäume Aufbauen (alternative Sichtweise) [DGPW14]



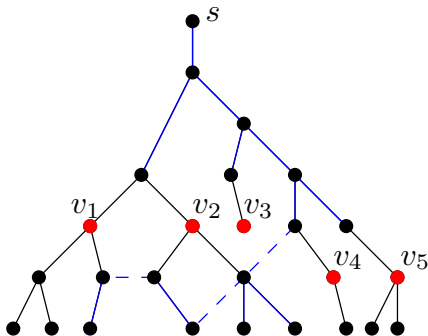
Die Knoten v_i sind bereits in der Ordnung und rot markiert

Neue Bäume Aufbauen (alternative Sichtweise) [DGPW14]



Um den Baum aufzubauen lassen wir Dijkstras Algorithmus von s aus laufen und brechen ab sobald alle Äste über rote Knoten gehen

Neue Bäume Aufbauen (alternative Sichtweise) [DGPW14]



Dies ist nicht das selbe wie an allen $v_1 \dots$ zu prunen!
Wenn wir prunen findet die Suche neue Wege die gar nicht entlang
des Kürzeste-Wege Baum von s entlang gehen.

Algo:

- 1 Baue Bäume auf mit zufälliger Wurzel, bis $k \cdot n$ Knoten in allen Bäumen sind
- 2 Wähle v aus
- 3 Lösche Teilbäume unter v
- 4 Gehe zu 1

- k ist ein Parameter der die Qualität steuert

Vorteile von Sampling Path-Greedy:

- Funktioniert auf den meisten Graphen
Auch auf Graphen mit hohen Knotengraden, wo Bottom-Up sich schwer tut

Auf Straße

- Ordnungsqualität vergleichbar mit Bottom-Up
- Aber langsamer als Bottom-Up
- → Nehmt Bottom-Up

method	preprocessing		query	
	time [h:m]	space [GB]	scans	time [μ s]
MLD-3	< 0:01	0.4	6074	912
MLD-4	< 0:01	0.4	3897	707
CH	0:02	0.4	284	96.3
CH-15	0:04	0.4	231	85.0
CH-17	0:24	0.4	217	79.7

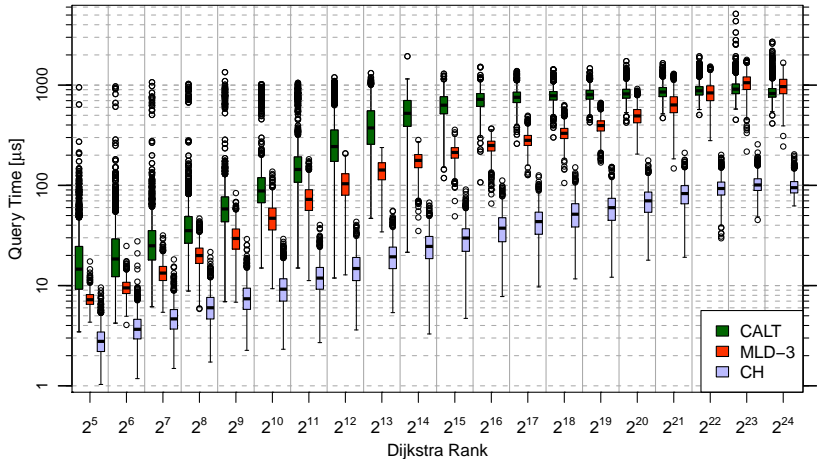
CH-x mit 2^x top-down Ordnung,
zur Erinnerung: Graph hat $> 2^{24}$ Knoten

method	preprocessing		query	
	time [h:m]	space [GB]	scans	time [μ s]
MLD-3	< 0:01	0.4	6074	912
MLD-4	< 0:01	0.4	3897	707
CH	0:02	0.4	284	96.3
CH-15	0:04	0.4	231	85.0
CH-17	0:24	0.4	217	79.7

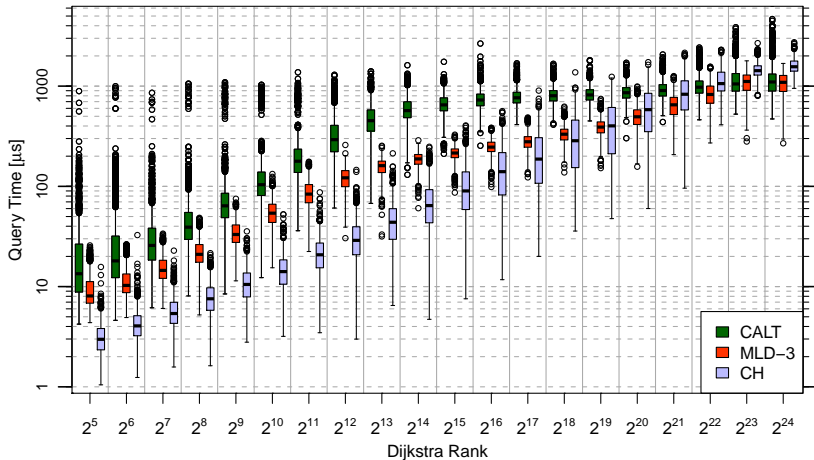
CH-x mit 2^x top-down Ordnung,
zur Erinnerung: Graph hat $> 2^{24}$ Knoten

- CH etwas langsamere Vorberechnung
- Faktor 10 schneller als MLD
- bottom-up Knotenordnung gut genug

Local Queries: Reisezeiten



Local Queries: Reisedistanzen



Montag, 18.5.2020

Mittwoch, 20.5.2020

Montag, 25.5.2020



Ittai Abraham, Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.
Hierarchical hub labelings for shortest paths.

In *Proceedings of the 20th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'12)*, volume 7501 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24–35. Springer, 2012.



Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Thomas Pajor, and Renato F. Werneck.
Robust distance queries on massive networks.

In *Proceedings of the 22nd Annual European Symposium on Algorithms (ESA'14)*, volume 8737 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 321–333. Springer, September 2014.



Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes, and Christian Vetter.
Exact routing in large road networks using contraction hierarchies.

Transportation Science, 46(3):388–404, August 2012.