Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2021
Torsten Ueckerdt, Lars Gottesbüren

Zweites Übungsblatt

Ausgabe:	28. April 2021
Besprechung:	13. Mai 2021

Erweiterte Inzidenzlisten

Sei ein einfacher, zusammenhängender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten gegeben. Der Graph G sei kombinatorisch eingebettet, d.h. dargestellt als $\mathcal{G} = (V, \vec{E}, s, t, \Theta, ^{-})$, wobei $\mathcal{G}$ in der Form ,,erweiterter Inzidenzlisten" gespeichert sei:
Es gibt eine doppelt verkettete Liste von Zeigern auf die *Knoten*. Ein *Knoten* ist dargestellt als eine zirkulär verkettete Liste von *gerichteten Kanten* in cw-Ordnung. Die Nachfolgekante („rechts") von e ist $\Theta(e)$. Eine *gerichtete Kante* $e \in \vec{E}$ besteht aus einem Zeiger auf die Kante $\bar{e}$ (e in entgegengesetzter Richtung) und einem Zeiger auf den Fußknoten der Kante. Dadurch sind die Funktionen s(ource), t(arget), $^{-}$, Θ und $\Theta^*(e) := \Theta(\bar{e})$ repräsentiert. Alle Funktionen können so in konstanter Zeit berechnet werden.

1 Dualgraph

Geben Sie einen linearen Algorithmus an, der aus den erweiterten Inzidenzlisten zu einem Graphen $\mathcal{G}$ mit gegebener kombinatorischer Einbettung die erweiterten Inzidenzlisten des kombinatorischen Dualgraphen $\mathcal{G}^*$ konstruiert.

2 Färbung von außenplanaren Graphen

Ein planarer Graph G heißt *außenplanar*, falls er eine planare Einbettung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außenplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

1. Zeigen Sie mithilfe des 4-Farben-Satzes dass jeder außenplanare Graph 3-färbbar ist.
2. Zeigen Sie ohne den 4-Farben-Satz dass jeder außenplanare Graph 3-färbbar ist.

Bitte wenden

3 Färbung von Graphen

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
2. Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$ gilt.

4 Ein anderer Euler

1. Zeigen Sie: Ein Graph ist genau dann 2-färbbar, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.
2. Zeigen Sie: Ein zweifach zusammenhängender planarer Graph (mit fester Einbettung) ist bipartit genau dann wenn sein Dualgraph *Eulersch* ist.
   Hinweis 1: Ein Graph heißt Eulersch falls es eine *Tour* gibt die jede Kante exakt einmal enthält. Das ist äquivalent zu jeder Knoten hat geraden Grad.
   Hinweis 2: In zweifach zusammenhängenden planaren Graphen wird jede Facette von einem Kreis begrenzt.

5 Adjazenztest in planaren Graphen

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können. Das heißt, gegeben zwei Knoten u und v von G, kann die Frage ob die Kante $\{u, v\}$ in G ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.