Algorithmen für Planare Graphen – Übung 6

Laura Merker | 7. Juli 2022

Übungsblatt 5

Karlsruher Institut für Technologie

- LR-Zerlegungen
- Planare und nicht-planare Einbettungen
- Saturierende Flüsse
- Ganzzahlige Flüsse
- Anwendung von Flüssen

Wiederholung: LR-Zerlegungen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition: Konflikte

Für eine Gabel $e_1 = uv_1, e_2 = uv_2$ definiere die Mengen
$R(e_1, e_2) = \{e \text{ Rückkante von } e_1 \text{ mit } t(e_2) < t(e) < u\}$
$R(e_2, e_1) = \{e \text{ Rückkante von } e_2 \text{ mit } t(e_1) < t(e) < u\}$

- Gleichheitskonflikt: $f_1, f_2 \in R(e_1, e_2)$ oder $f_1, f_2 \in R(e_2, e_1)$
- Ungleichheitskonflikt: $f_1 \in R(e_1, e_2)$ und $f_2 \in R(e_2, e_1)$ oder umgekehrt

Definition: LR-Zerlegung

Partition der Nichtbaumkanten in L und R, sodass je zwei Kanten f_1, f_2

- mit Gleichheitskonflikt in der gleichen Menge liegen.
- mit Ungleichheitskonflikt in unterschiedlichen Mengen sind.

Eine *LR*-Zerlegung heißt gebündelt, wenn zu jeder Kante e alle Rückkanten von e mit minimalem Rückkehrpunkt $t(e)$ in der gleichen Menge liegen.

LR-Zerlegungen

- G planar mit Einbettung und Tiefensuchbaum T, Kanten von Wurzel weg gerichtet
- Nicht-Baum-Kanten richten wir so, dass der Fundamentalkreis ein gerichteter Kreis wird
- $L \dot{\cup} R$ eine Partition der Nicht-Baum-Kanten nach Richtung des Fundamentalkreises

- Warum brauchen wir eine Einbettung?

LR-Zerlegungen

- G planar mit Einbettung und Tiefensuchbaum T, Kanten von Wurzel weg gerichtet
- Nicht-Baum-Kanten richten wir so, dass der Fundamentalkreis ein gerichteter Kreis wird
- $L \dot{\cup} R$ eine Partition der Nicht-Baum-Kanten nach Richtung des Fundamentalkreises

- Warum brauchen wir eine Einbettung?
  $\rightarrow$ Kreise haben sonst keine Richtung
- $L \dot{\cup} R$ ist LR-Zerlegung, falls der Startpunkt der Tiefensuche an der äußeren Facette liegt.

LR-Zerlegungen

- G planar mit Einbettung und Tiefensuchbaum T, Kanten von Wurzel weg gerichtet
- Nicht-Baum-Kanten richten wir so, dass der Fundamentalkreis ein gerichteter Kreis wird
- $L \,\dot{\cup}\, R$ eine Partition der Nicht-Baum-Kanten nach Richtung des Fundamentalkreises

- Warum brauchen wir eine Einbettung?
  $\rightarrow$ Kreise haben sonst keine Richtung
- $L \,\dot{\cup}\, R$ ist LR-Zerlegung, falls der Startpunkt der Tiefensuche an der äußeren Facette liegt.
  $\rightarrow$ Siehe Vorlesung 12, Folie 6 (falsche Kanten schließen Startpunkt ein)
- Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \,\dot{\cup}\, R$ eine nicht gebündelte LR-Zerlegung ist.

LR-Zerlegungen

- G planar mit Einbettung und Tiefensuchbaum T, Kanten von Wurzel weg gerichtet
- Nicht-Baum-Kanten richten wir so, dass der Fundamentalkreis ein gerichteter Kreis wird
- $L \dot{\cup} R$ eine Partition der Nicht-Baum-Kanten nach Richtung des Fundamentalkreises

- Warum brauchen wir eine Einbettung?
  $\rightarrow$ Kreise haben sonst keine Richtung
- $L \dot{\cup} R$ ist LR-Zerlegung, falls der Startpunkt der Tiefensuche an der äußeren Facette liegt.
  $\rightarrow$ Siehe Vorlesung 12, Folie 6 (falsche Kanten schließen Startpunkt ein)
- Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot{\cup} R$ eine nicht gebündelte LR-Zerlegung ist.
  $\rightarrow$ Pfad mit Rückkanten rechts und links
- Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot{\cup} R$ keine LR-Zerlegung ist.

LR-Zerlegungen

- G planar mit Einbettung und Tiefensuchbaum T, Kanten von Wurzel weg gerichtet
- Nicht-Baum-Kanten richten wir so, dass der Fundamentalkreis ein gerichteter Kreis wird
- $L \dot{\cup} R$ eine Partition der Nicht-Baum-Kanten nach Richtung des Fundamentalkreises

- Warum brauchen wir eine Einbettung?
  $\rightarrow$ Kreise haben sonst keine Richtung
- $L \dot{\cup} R$ ist LR-Zerlegung, falls der Startpunkt der Tiefensuche an der äußeren Facette liegt.
  $\rightarrow$ Siehe Vorlesung 12, Folie 6 (falsche Kanten schließen Startpunkt ein)
- Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot{\cup} R$ eine nicht gebündelte LR-Zerlegung ist.
  $\rightarrow$ Pfad mit Rückkanten rechts und links
- Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot{\cup} R$ keine LR-Zerlegung ist.
  $\rightarrow$ Gabel mit allen Kanten links rum (Startpunkt liegt dann innen)
- Warum ist dies kein Widerspruch dazu, dass es für jede Tiefensuche eine LR-Zerlegung gibt?

LR-Zerlegungen

Karlsruher Institut für Technologie

- G planar mit Einbettung und Tiefensuchbaum T, Kanten von Wurzel weg gerichtet
- Nicht-Baum-Kanten richten wir so, dass der Fundamentalkreis ein gerichteter Kreis wird
- $L \dot\cup R$ eine Partition der Nicht-Baum-Kanten nach Richtung des Fundamentalkreises

- Warum brauchen wir eine Einbettung?
  $\rightarrow$ Kreise haben sonst keine Richtung
- $L \dot\cup R$ ist LR-Zerlegung, falls der Startpunkt der Tiefensuche an der äußeren Facette liegt.
  $\rightarrow$ Siehe Vorlesung 12, Folie 6 (falsche Kanten schließen Startpunkt ein)
- Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot\cup R$ eine nicht gebündelte LR-Zerlegung ist.
  $\rightarrow$ Pfad mit Rückkanten rechts und links
- Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem $L \dot\cup R$ keine LR-Zerlegung ist.
  $\rightarrow$ Gabel mit allen Kanten links rum (Startpunkt liegt dann innen)
- Warum ist dies kein Widerspruch dazu, dass es für jede Tiefensuche eine LR-Zerlegung gibt?
  $\rightarrow$ $L \dot\cup R$ ändert sich mit Wahl der äußeren Facette

Wiederholung: LR-Zerlegungen

Karlsruher Institut für Technologie

Definition: Konflikte

Für eine Gabel $e_1 = uv_1, e_2 = uv_2$ definiere die Mengen
$R(e_1, e_2) = \{e \text{ Rückkante von } e_1 \text{ mit } t(e_2) < t(e) < u\}$
$R(e_2, e_1) = \{e \text{ Rückkante von } e_2 \text{ mit } t(e_1) < t(e) < u\}$

- Gleichheitskonflikt: $f_1, f_2 \in R(e_1, e_2)$ oder $f_1, f_2 \in R(e_2, e_1)$
- Ungleichheitskonflikt: $f_1 \in R(e_1, e_2)$ und $f_2 \in R(e_2, e_1)$ oder umgekehrt

Definition: LR-Zerlegung

Partition der Nichtbaumkanten in L und R, sodass je zwei Kanten f_1, f_2

- mit Gleichheitskonflikt in der gleichen Menge liegen.
- mit Ungleichheitskonflikt in unterschiedlichen Mengen sind.

Eine *LR*-Zerlegung heißt gebündelt, wenn zu jeder Kante e alle Rückkanten von e mit minimalem Rückkehrpunkt $t(e)$ in der gleichen Menge liegen.

Planare und nicht-planare Einbettungen

- **Gegeben:** G planar, $L \dot{\cup} R$ gebündelte LR-Zerlegung
  Zu zeigen: Algorithmus aus der Vorlesung liefert Einbettung, bei der der Fundamentalkreis zu einer Nicht-Baumkante e gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, falls $e \in L$, und im Uhrzeigersinn, falls $e \in R$

Planare und nicht-planare Einbettungen

- **Gegeben:** G planar, $L \dot\cup R$ gebündelte LR-Zerlegung
  Zu zeigen: Algorithmus aus der Vorlesung liefert Einbettung, bei der der Fundamentalkreis zu einer Nicht-Baumkante e gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, falls $e \in L$, und im Uhrzeigersinn, falls $e \in R$
  $\rightarrow$ Betrachte Schritt 5: $(u, v), L(e_1^L), e_1^L, R(e_1^L), \ldots, L(e_r^R), e_r^R, R(e_r^R)$ im Uhrzeigersinn

Planare und nicht-planare Einbettungen

Karlsruher Institut für Technologie

- **Gegeben:** G planar, $L \dot\cup R$ gebündelte LR-Zerlegung
  Zu zeigen: Algorithmus aus der Vorlesung liefert Einbettung, bei der der Fundamentalkreis zu einer Nicht-Baumkante e gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, falls $e \in L$, und im Uhrzeigersinn, falls $e \in R$
  $\rightarrow$ Betrachte Schritt 5: $(u, v), L(e_1^L), e_1^L, R(e_1^L), \dots, L(e_r^R), e_r^R, R(e_r^R)$ im Uhrzeigersinn
- **Gesucht:** G planar mit Tiefensuchbaum T und Einbettung, die nicht Ausgabe des Planaritätstests sein kann, wenn die LR-Zerlegung bezüglich T berechnet wird

Planare und nicht-planare Einbettungen

- **Gegeben:** G planar, $L \dot\cup R$ gebündelte LR-Zerlegung
  Zu zeigen: Algorithmus aus der Vorlesung liefert Einbettung, bei der der Fundamentalkreis zu einer Nicht-Baumkante e gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, falls $e \in L$, und im Uhrzeigersinn, falls $e \in R$
  $\rightarrow$ Betrachte Schritt 5: $(u, v), L(e_1^L), e_1^L, R(e_1^L), \ldots, L(e_r^R), e_r^R, R(e_r^R)$ im Uhrzeigersinn
- **Gesucht:** G planar mit Tiefensuchbaum T und Einbettung, die nicht Ausgabe des Planaritätstests sein kann, wenn die LR-Zerlegung bezüglich T berechnet wird
  $\rightarrow$ folgt aus Aufgaben 1 (iii) und 2 (i): Wähle Einbettung, die nicht zu gebündelter LR-Zerlegung passt
- **Gesucht:** G planar, nicht gebündelte LR-Zerlegung, sodass der Algorithmus aus der Vorlesung (ohne Bündeln der LR-Zerlegung), eine nicht-planare Einbettung liefert

Planare und nicht-planare Einbettungen

- **Gegeben:** G planar, $L \,\dot\cup\, R$ gebündelte LR-Zerlegung
  Zu zeigen: Algorithmus aus der Vorlesung liefert Einbettung, bei der der Fundamentalkreis zu einer Nicht-Baumkante e gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, falls $e \in L$, und im Uhrzeigersinn, falls $e \in R$
  $\rightarrow$ Betrachte Schritt 5: $(u, v), L(e_1^L), e_1^L, R(e_1^L), \dots, L(e_r^R), e_r^R, R(e_r^R)$ im Uhrzeigersinn
- **Gesucht:** G planar mit Tiefensuchbaum T und Einbettung, die nicht Ausgabe des Planaritätstests sein kann, wenn die LR-Zerlegung bezüglich T berechnet wird
  $\rightarrow$ folgt aus Aufgaben 1 (iii) und 2 (i): Wähle Einbettung, die nicht zu gebündelter LR-Zerlegung passt
- **Gesucht:** G planar, nicht gebündelte LR-Zerlegung, sodass der Algorithmus aus der Vorlesung (ohne Bündeln der LR-Zerlegung), eine nicht-planare Einbettung liefert
  $\rightarrow$ Beobachtung: Kanten, die an s enden, haben keine Konflikte; Gehe rechts und links zu s

Wiederholung: Flüsse

Karlsruher Institut für Technologie

Definition: Flussnetzwerk $(D = (V, A), c : A \to \mathbb{R}_{>0}, s \in V, t \in V)$

- $uv \in A \iff vu \in A$ und $c(uv) = c(vu)$ für alle $uv \in A$
- c ordnet Kanten Kapazitäten zu
- s ist Quelle, t ist Senke

Defintion: s-t-Fluss $\Phi\colon A \to \mathbb{R}$

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$.
- Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leqslant c(uv)$ für alle Kanten $uv \in A$.
- Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle Kanten $uv \in A$.

Wir maximieren: $\Phi(s) = \sum_{sv \in A} \Phi(sv) = -\Phi(t)$

Saturierende Flüsse

Ein Fluss Φ *saturiert* eine Kante e eines Flussnetzwerks (D, c, s, t), wenn $\Phi(e) = c(e)$.
Ein Schnitt heißt *saturiert*, wenn jede seiner Kanten saturiert ist.

Saturierende Flüsse

Ein Fluss Φ *saturiert* eine Kante e eines Flussnetzwerks (D, c, s, t), wenn $\Phi(e) = c(e)$.
Ein Schnitt heißt *saturiert*, wenn jede seiner Kanten saturiert ist.

- **Gesucht:** Flussnetzwerk, bei dem kein maximaler Fluss eine Kante saturiert, die zu s oder t inzident ist

Saturierende Flüsse

Ein Fluss Φ *saturiert* eine Kante e eines Flussnetzwerks (D, c, s, t), wenn $\Phi(e) = c(e)$.
Ein Schnitt heißt *saturiert*, wenn jede seiner Kanten saturiert ist.

- **Gesucht:** Flussnetzwerk, bei dem kein maximaler Fluss eine Kante saturiert, die zu s oder t inzident ist
- **Gegeben:** maximale Fluss
  Gesucht: saturierter s-t-Schnitt

Saturierende Flüsse

Ein Fluss Φ *saturiert* eine Kante e eines Flussnetzwerks (D, c, s, t), wenn $\Phi(e) = c(e)$.
Ein Schnitt heißt *saturiert*, wenn jede seiner Kanten saturiert ist.

- **Gesucht:** Flussnetzwerk, bei dem kein maximaler Fluss eine Kante saturiert, die zu s oder t inzident ist
- **Gegeben:** maximale Fluss
  Gesucht: saturierter s-t-Schnitt
  $\rightarrow$ Falls keine s-t-Schnitt existiert: Finde s-t-Pfad in $G' = (V, E')$ mit $E' = \{e \in E \colon c(e) - \Phi(e) > 0\}$

  (Tafel)

Ganzzahlige Flüsse

Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.
Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

Ganzzahlige Flüsse

Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.
Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

- **Gesucht:** ganzzahliges Flussnetzwerk, das einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss hat

Ganzzahlige Flüsse

Karlsruher Institut für Technologie

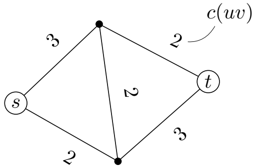
Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.
Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

- **Gesucht:** ganzzahliges Flussnetzwerk, das einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss hat
- **Gegeben:** ganzzahlige Flussnetzwerk mit s und t an der äußeren Facette
  Gesucht: ganzzahliger maximalen Fluss

Ganzzahlige Flüsse

Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.
Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

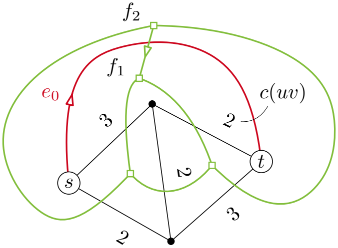
- **Gesucht:** ganzzahliges Flussnetzwerk, das einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss hat
- **Gegeben:** ganzzahlige Flussnetzwerk mit s und t an der äußeren Facette
  Gesucht: ganzzahliger maximalen Fluss
  $\rightarrow$ Vorlesung: $\Phi(e) = \text{dist}(f_1, \text{rechts}(e)) - \text{dist}(f_1, \text{links}(e))$



Ganzzahlige Flüsse

Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.
Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

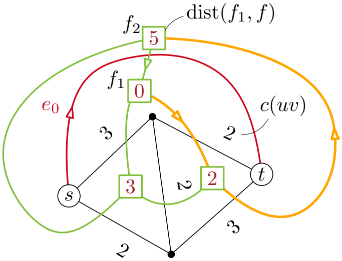
- **Gesucht:** ganzzahliges Flussnetzwerk, das einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss hat
- **Gegeben:** ganzzahlige Flussnetzwerk mit s und t an der äußeren Facette
  Gesucht: ganzzahliger maximalen Fluss
  $\rightarrow$ Vorlesung: $\Phi(e) = \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{rechts}(e)) - \mathrm{dist}(f_1, \mathrm{links}(e))$



Ganzzahlige Flüsse

Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.
Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

- **Gesucht:** ganzzahliges Flussnetzwerk, das einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss hat
- **Gegeben:** ganzzahlige Flussnetzwerk mit s und t an der äußeren Facette
  Gesucht: ganzzahliger maximalen Fluss
  $\rightarrow$ Vorlesung: $\Phi(e) = \text{dist}(f_1, \text{rechts}(e)) - \text{dist}(f_1, \text{links}(e))$

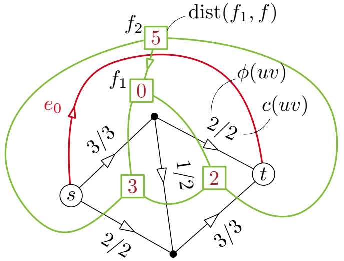


Ganzzahlige Flüsse

Karlsruher Institut für Technologie

Ein Flussnetzwerk heißt *ganzzahlig*, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.
Ein Fluss heißt *ganzzahlig*, wenn jede Kante einen ganzzahligen Wert zugewiesen bekommt.

- **Gesucht:** ganzzahliges Flussnetzwerk, das einen nicht-ganzzahligen maximalen Fluss hat
- **Gegeben:** ganzzahlige Flussnetzwerk mit s und t an der äußeren Facette
  Gesucht: ganzzahliger maximalen Fluss
  $\rightarrow$ Vorlesung: $\Phi(e) = \text{dist}(f_1, \text{rechts}(e)) - \text{dist}(f_1, \text{links}(e))$



k-level planare Graphen

- **Gegeben:** 2-level-planaren Graph
  Gesucht: maximum Matching
- **Gegeben:** k-level-planarer Graph
  Gesucht: maximum Menge knotendisjunkter Pfade mit je genau einem Knoten in jedem Level

k-level planare Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

- **Gegeben:** 2-level-planaren Graph
  Gesucht: maximum Matching
- **Gegeben:** k-level-planarer Graph
  Gesucht: maximum Menge knotendisjunkter Pfade mit je genau einem Knoten in jedem Level

  Highlevel:
  - Orientiere Kanten von Level von Level L_i zu L_{i+1}
  - Füge Quelle s und Senke t hinzu, verbinde mit allen Knoten in L_1 bzw. L_k
  - Wähle Kapazität 1 für alle Kanten
  - Finde Fluss, der Kantenrichtungen respektiert

  Details: Tafel

k-level planare Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

- **Gegeben:** 2-level-planaren Graph
  Gesucht: maximum Matching
- **Gegeben:** k-level-planarer Graph
  Gesucht: maximum Menge knotendisjunkter Pfade mit je genau einem Knoten in jedem Level

  Highlevel:
  - Orientiere Kanten von Level von Level L_i zu L_{i+1}
  - Füge Quelle s und Senke t hinzu, verbinde mit allen Knoten in L_1 bzw. L_k
  - Wähle Kapazität 1 für alle Kanten
  - Finde Fluss, der Kantenrichtungen respektiert

  Details: Tafel
  - Modifiziere Algorithmus für ungerichtete Graphen mit s und t auf der äußeren Facette (Vorlesung 13, Folie 9)
  - $c(e^*) = 1$, wenn e von links nach rechts gekreuzt wird, $c(e^*) = 0$ von rechts nach links
  - Pfad P_i besteht aus Kanten, die Facetten mit Distanz $i - 1$ trennen von Facetten mit Distanz i
  - Für $k > 2$ ersetze jedes $v \in V$ durch Pfad $(v_{\text{in}}, v_{\text{out}})$; eingehende Kanten gehen zu v_{in}, ausgehende von v_{out}