Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

Vorlesung am 19.05.2022

Torsten Ueckerdt | 19. Mai 2022

Beweis des Planar Cycle-Separator – Vorgehen

Satz (Kreis-Variante des Planar-Separator).

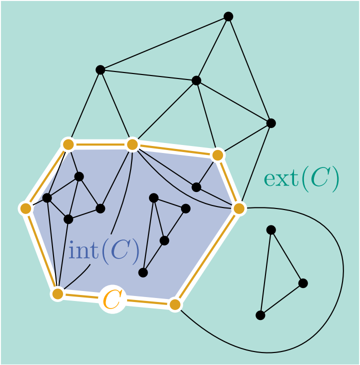
- $\alpha \geq \frac{3}{4}$.
- G Triangulierung auf n Knoten.
- w Gewichtsfunktion mit $w(f) \leq \alpha$ für jedes $f \in F$.

Dann gibt es einen α-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten. Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

1. G hat geringen Durchmesser. (Daran arbeiten wir noch)
2. G ist beliebig. $\rightsquigarrow$ Hier führen wir auf 1. zurück.

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C in G, der genau eine Nichtbaumkante benutzt, also $|C| \leq \operatorname{diam}(T) + 1$. ✓



Für $\operatorname{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ reicht dieses Lemma also.

Der Fall: Geringer Durchmesser

Korollar.

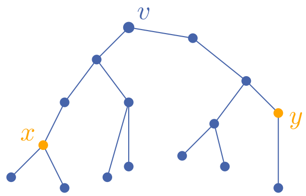
Wenn G trianguliert und $\operatorname{diam}(G) \leq 2\sqrt{n}$, dann existiert ein $\frac{3}{4}$-balancierter Kreis-Separator C mit $|C| \leq 4\sqrt{n} + 1$.

Beweis:

- Sei T ein BFS-Baum mit Wurzel v von G.
- Dann gilt $\operatorname{dist}_T(u, v) = \operatorname{dist}_G(u, v)$ für alle Knoten u von G.
- Dann gilt $\operatorname{diam}(T) \leq 2 \cdot \operatorname{diam}(G)$, denn für alle x, y in G haben wir

$$\operatorname{dist}_T(x, y) \leq \operatorname{dist}_T(x, v) + \operatorname{dist}_T(v, y) = \operatorname{dist}_G(x, v) + \operatorname{dist}_G(v, y) \leq 2 \cdot \operatorname{diam}(G).$$

- Wende das Lemma an. ✓



Beweis des Planar Cycle-Separator – Vorgehen

Satz (Kreis-Variante des Planar-Separator).

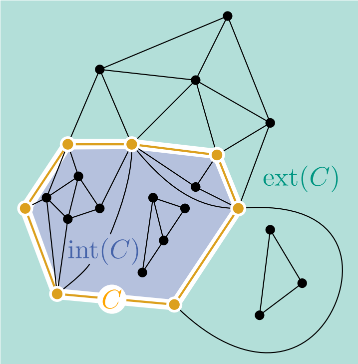
- $\alpha \geq \frac{3}{4}$.
- G Triangulierung auf n Knoten.
- w Gewichtsfunktion mit $w(f) \leq \alpha$ für jedes $f \in F$.

Dann gibt es einen α-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten. Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

1. G hat geringen Durchmesser. ✓
2. G ist beliebig. $\rightsquigarrow$ Hier führen wir auf 1. zurück.

Lemma.

Sei T ein Spannbaum in G. Dann gibt es einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C in G, der genau eine Nichtbaumkante benutzt, also $|C| \leq \operatorname{diam}(T) + 1$. ✓



Für $\operatorname{diam}(G) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ reicht dieses Lemma also.

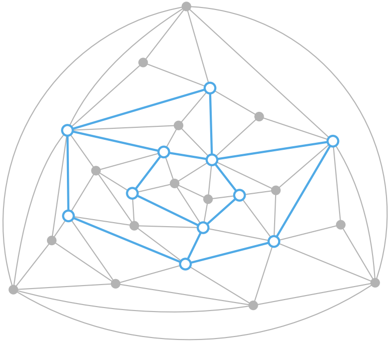
Beweis des Planar Cycle-Separator – Allgemeiner Fall

Satz (Planar Cycle-Separator).

Sei $\alpha = \frac{3}{4}$, G trianguliert, $w(f) < \frac{1}{4}$ für jedes $f \in F$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten, der in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann.

Strategie:

- Finde Teilgraphen H von G, sodass:



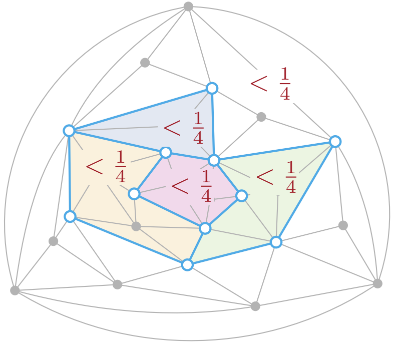
Beweis des Planar Cycle-Separator – Allgemeiner Fall

Satz (Planar Cycle-Separator).

Sei $\alpha = \frac{3}{4}$, G trianguliert, $w(f) < \frac{1}{4}$ für jedes $f \in F$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten, der in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann.

Strategie:

- Finde Teilgraphen H von G, sodass:
  - Jede Facette in H hat Gewicht kleiner als $\frac{1}{4}$.



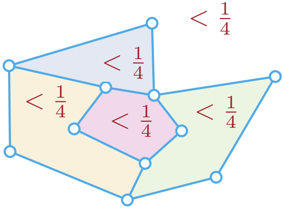
Beweis des Planar Cycle-Separator – Allgemeiner Fall

Satz (Planar Cycle-Separator).

Sei $\alpha = \frac{3}{4}$, G trianguliert, $w(f) < \frac{1}{4}$ für jedes $f \in F$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten, der in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann.

Strategie:

- Finde Teilgraphen H von G, sodass:
  - Jede Facette in H hat Gewicht kleiner als $\frac{1}{4}$.



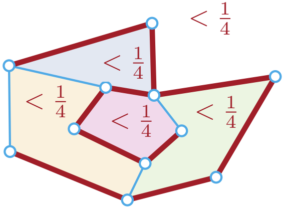
Beweis des Planar Cycle-Separator – Allgemeiner Fall

Satz (Planar Cycle-Separator).

Sei $\alpha = \frac{3}{4}$, G trianguliert, $w(f) < \frac{1}{4}$ für jedes $f \in F$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten, der in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann.

Strategie:

- Finde Teilgraphen H von G, sodass:
  - Jede Facette in H hat Gewicht kleiner als $\frac{1}{4}$.
  - H hat Spannbaum T mit $\text{diam}(T) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.



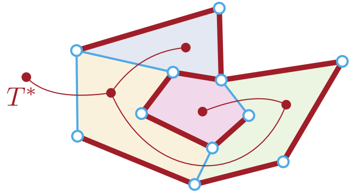
Beweis des Planar Cycle-Separator – Allgemeiner Fall

Satz (Planar Cycle-Separator).

Sei $\alpha = \frac{3}{4}$, G trianguliert, $w(f) < \frac{1}{4}$ für jedes $f \in F$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten, der in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann.

Strategie:

- Finde Teilgraphen H von G, sodass:
  - Jede Facette in H hat Gewicht kleiner als $\frac{1}{4}$.
  - H hat Spannbaum T mit $\operatorname{diam}(T) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
  - Maximalgrad des Dualbaums T^* von T ist höchstens 3.
- Achtung: H ist keine Triangulierung!



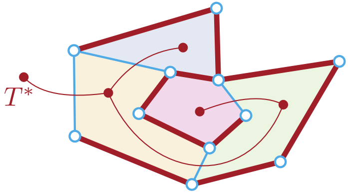
Beweis des Planar Cycle-Separator – Allgemeiner Fall

Satz (Planar Cycle-Separator).

Sei $\alpha = \frac{3}{4}$, G trianguliert, $w(f) < \frac{1}{4}$ für jedes $f \in F$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten, der in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann.

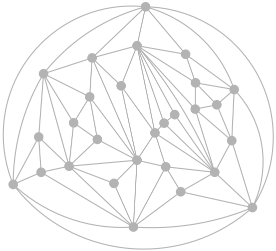
Strategie:

- Finde Teilgraphen H von G, sodass:
  - Jede Facette in H hat Gewicht kleiner als $\frac{1}{4}$.
  - H hat Spannbaum T mit $\mathrm{diam}(T) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
  - Maximalgrad des Dualbaums T^* von T ist höchstens 3.
- Achtung: H ist keine Triangulierung!
- Wende dann das Lemma auf T an. Das geht!
- Erhalte $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C| \le \mathrm{diam}(T) + 1 = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ✓



Hierarchie geschachtelter Kreise

- Wir finden eine Menge von disjunkten Kreisen.
- Hierarchie: C unter C' wenn $\mathrm{int}(C) \subset \mathrm{int}(C')$

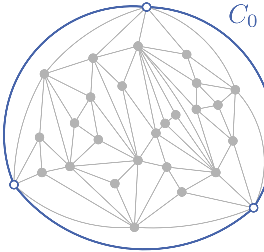


Hierarchie geschachtelter Kreise

- Wir finden eine Menge von disjunkten Kreisen.
- Hierarchie: C unter C' wenn $\mathrm{int}(C) \subset \mathrm{int}(C')$

Algorithmus Aufbau einer Hierarchie geschachtelter Kreise

$C_0 \leftarrow$ Rand der äußeren Facette von G
Initialisiere Hierarchie mit C_0 als Wurzel.
$Q.enqueue(C_0)$ — Q ist anfangs leere Queue
while Q nicht leer **do**
  $C \leftarrow Q.dequeue()$ — C vorderstes Element in Q
  Entferne alle Knoten in C aus G.
  Finde neue äußere Kanten und Kreise $C_1, \ldots, C_t$ darin.
  $Q.enqueue(C_1, \ldots, C_t)$
  Setze $C_1, \ldots, C_t$ als Kinder von C in Hierarchie.
end while

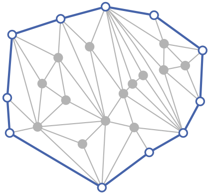


Hierarchie geschachtelter Kreise

- Wir finden eine Menge von disjunkten Kreisen.
- Hierarchie: C unter C' wenn $\mathrm{int}(C) \subset \mathrm{int}(C')$

Algorithmus Aufbau einer Hierarchie geschachtelter Kreise

$C_0 \leftarrow$ Rand der äußeren Facette von G
Initialisiere Hierarchie mit C_0 als Wurzel.
$Q.enqueue(C_0)$ — Q ist anfangs leere Queue
while Q nicht leer **do**
  $C \leftarrow Q.dequeue()$ — C vorderstes Element in Q
  Entferne alle Knoten in C aus G.
  Finde neue äußere Kanten und Kreise $C_1, \ldots, C_t$ darin.
  $Q.enqueue(C_1, \ldots, C_t)$
  Setze $C_1, \ldots, C_t$ als Kinder von C in Hierarchie.
end while

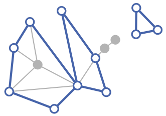


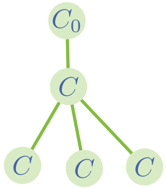
Hierarchie geschachtelter Kreise

- Wir finden eine Menge von disjunkten Kreisen.
- Hierarchie: C unter C' wenn $\mathrm{int}(C) \subset \mathrm{int}(C')$

Algorithmus Aufbau einer Hierarchie geschachtelter Kreise

$C_0 \leftarrow$ Rand der äußeren Facette von G
Initialisiere Hierarchie mit C_0 als Wurzel.
$Q.enqueue(C_0)$ $\quad$ Q ist anfangs leere Queue
while Q nicht leer **do**
 $C \leftarrow Q.dequeue()$ $\quad$ C vorderstes Element in Q
 Entferne alle Knoten in C aus G.
 Finde neue äußere Kanten und Kreise $C_1, \ldots, C_t$ darin.
 $Q.enqueue(C_1, \ldots, C_t)$
 Setze $C_1, \ldots, C_t$ als Kinder von C in Hierarchie.
end while



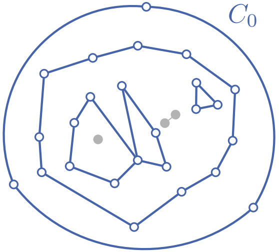


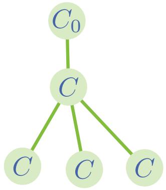
Hierarchie geschachtelter Kreise

- Wir finden eine Menge von disjunkten Kreisen.
- Hierarchie: C unter C' wenn $\text{int}(C) \subset \text{int}(C')$

Algorithmus Aufbau einer Hierarchie geschachtelter Kreise

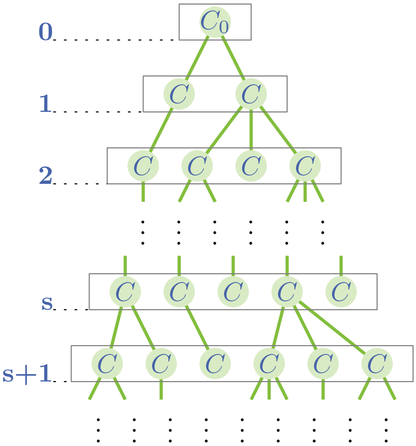
$C_0 \leftarrow$ Rand der äußeren Facette von G
Initialisiere Hierarchie mit C_0 als Wurzel.
$Q.enqueue(C_0)$ — Q ist anfangs leere Queue
while Q nicht leer **do**
    $C \leftarrow Q.dequeue()$ — C vorderstes Element in Q
    Entferne alle Knoten in C aus G.
    Finde neue äußere Kanten und Kreise $C_1, \ldots, C_t$ darin.
    $Q.enqueue(C_1, \ldots, C_t)$
    Setze $C_1, \ldots, C_t$ als Kinder von C in Hierarchie.
end while





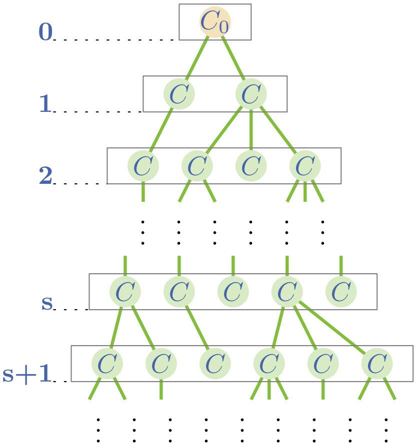
Folge von geschachtelten Kreisen mit $3/4$ im Inneren

- **Level** i sind alle Knoten, die Abstand i zu C_0 haben.
- Kreise auf Tiefe i in der Hierarchie haben alle Knoten in Level i.
- Jeder Knoten in Level $i > 1$ hat eine Kante zu einem Knoten in Level $i - 1$.
- Für C, C' auf gleichem Level ist $\mathrm{int}(C) \cap \mathrm{int}(C') = \emptyset$.



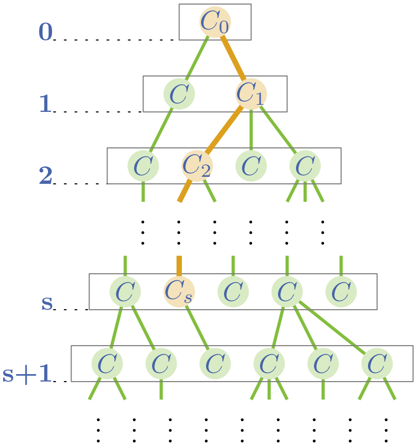
Folge von geschachtelten Kreisen mit $3/4$ im Inneren

- **Level** i sind alle Knoten, die Abstand i zu C_0 haben.
- Kreise auf Tiefe i in der Hierarchie haben alle Knoten in Level i.
- Jeder Knoten in Level $i > 1$ hat eine Kante zu einem Knoten in Level $i - 1$.
- Für C, C' auf gleichem Level ist $\text{int}(C) \cap \text{int}(C') = \emptyset$.
- $w(\text{int}(C_0)) = 1 - w(f_0) \geq \frac{3}{4}$.



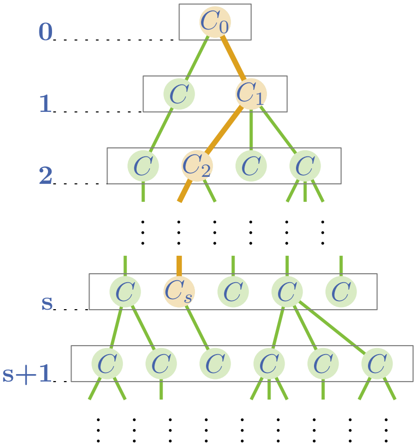
Folge von geschachtelten Kreisen mit $3/4$ im Inneren

- **Level** i sind alle Knoten, die Abstand i zu C_0 haben.
- Kreise auf Tiefe i in der Hierarchie haben alle Knoten in Level i.
- Jeder Knoten in Level $i > 1$ hat eine Kante zu einem Knoten in Level $i - 1$.
- Für C, C' auf gleichem Level ist $\mathrm{int}(C) \cap \mathrm{int}(C') = \emptyset$.
- $w(\mathrm{int}(C_0)) = 1 - w(f_0) \geq \frac{3}{4}$.
- Betrachte **tiefstes** Level $s \geq 0$ sodass
  - es einen Kreis C_s auf Level s mit $w(\mathrm{int}(C)) \geq \frac{3}{4}$ gibt.



Folge von geschachtelten Kreisen mit $3/4$ im Inneren

- **Level** i sind alle Knoten, die Abstand i zu C_0 haben.
- Kreise auf Tiefe i in der Hierarchie haben alle Knoten in Level i.
- Jeder Knoten in Level $i > 1$ hat eine Kante zu einem Knoten in Level $i - 1$.
- Für C, C' auf gleichem Level ist $\text{int}(C) \cap \text{int}(C') = \emptyset$.
- $w(\text{int}(C_0)) = 1 - w(f_0) \geq \frac{3}{4}$.
- Betrachte **tiefstes** Level $s \geq 0$ sodass
  - es einen Kreis C_s auf Level s mit $w(\text{int}(C)) \geq \frac{3}{4}$ gibt.
- Erhalten Folge $C_0, \ldots, C_s$ geschachtelter Kreise mit:
  - C_i auf Level i
  - $w(\text{int}(C_i)) \geq 3/4$
  - $w(\text{int}(C)) < 3/4$ für in C_s geschachtelte Kreise C

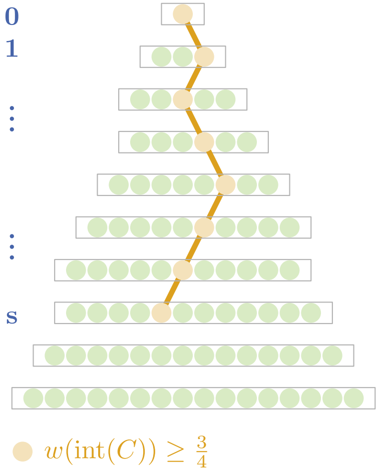


Äußere Facette von H

Haben Folge $C_0, \dots, C_s$ geschachtelter Kreise mit:

- C_i auf Level i
- $w(\text{int}(C_i)) \geq 3/4$
- $w(\text{int}(C)) < 3/4$ für in C_s geschachtelte Kreise C

- Betrachte Längen dieser Kreise:
  - $|C_0| = 3 \leq \sqrt{n}$
  - Sei $t \leq s$ **maximal**, sodass $|C_t| \leq \sqrt{n}$
- Also $|C_{t+1}|, \dots, |C_s| > \sqrt{n}$ oder $s = t$.

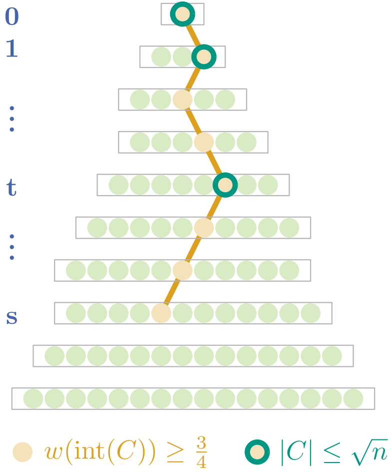


Äußere Facette von H

Haben Folge $C_0, \ldots, C_s$ geschachtelter Kreise mit:

- C_i auf Level i
- $w(\text{int}(C_i)) \geq 3/4$
- $w(\text{int}(C)) < 3/4$ für in C_s geschachtelte Kreise C

- Betrachte Längen dieser Kreise:
  - $|C_0| = 3 \leq \sqrt{n}$
  - Sei $t \leq s$ **maximal**, sodass $|C_t| \leq \sqrt{n}$
- Also $|C_{t+1}|, \ldots, |C_s| > \sqrt{n}$ oder $s = t$.

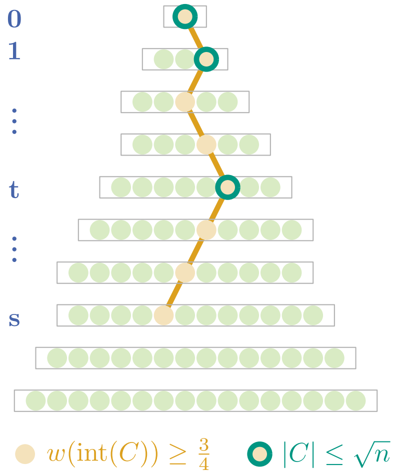


Äußere Facette von H

Haben Folge $C_0, \ldots, C_s$ geschachtelter Kreise mit:

- C_i auf Level i
- $w(\text{int}(C_i)) \geq 3/4$
- $w(\text{int}(C)) < 3/4$ für in C_s geschachtelte Kreise C

- Betrachte Längen dieser Kreise:
  - $|C_0| = 3 \leq \sqrt{n}$
  - Sei $t \leq s$ **maximal**, sodass $|C_t| \leq \sqrt{n}$
- Also $|C_{t+1}|, \ldots, |C_s| > \sqrt{n}$ oder $s = t$.
- Entferne alle Knoten und Kanten in $\text{ext}(C_t)$.

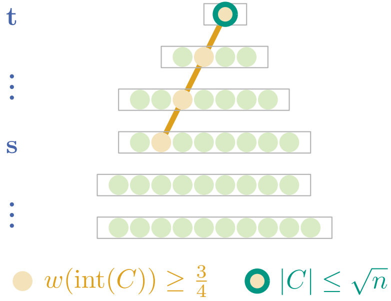


Äußere Facette von H

Haben Folge $C_0, \ldots, C_s$ geschachtelter Kreise mit:

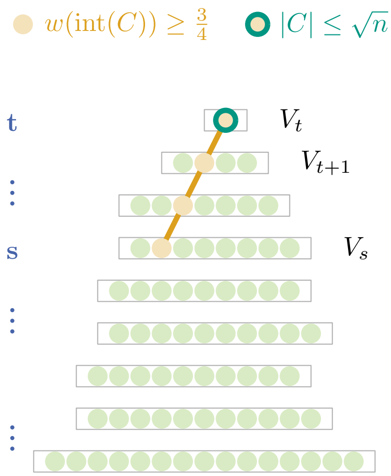
- C_i auf Level i
- $w(\text{int}(C_i)) \geq 3/4$
- $w(\text{int}(C)) < 3/4$ für in C_s geschachtelte Kreise C

- Betrachte Längen dieser Kreise:
  - $|C_0| = 3 \leq \sqrt{n}$
  - Sei $t \leq s$ **maximal**, sodass $|C_t| \leq \sqrt{n}$
- Also $|C_{t+1}|, \ldots, |C_s| > \sqrt{n}$ oder $s = t$.
- Entferne alle Knoten und Kanten in $\text{ext}(C_t)$.
- C_t wird die äußere Facette von H.
- Betrachte nur noch Hierarchie unter C_t.



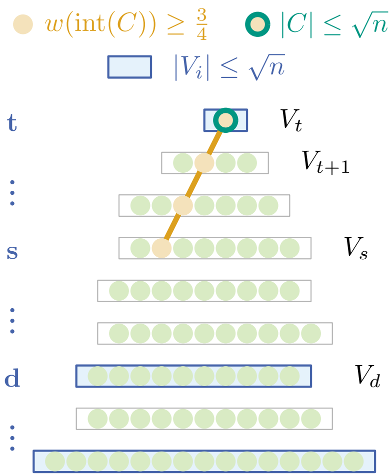
Konstruktion von Teilgraph H

- Sei V_i für $i \geq t$ die Knotenmenge aller Kreise von Level i die in C_t geschachtelt sind.



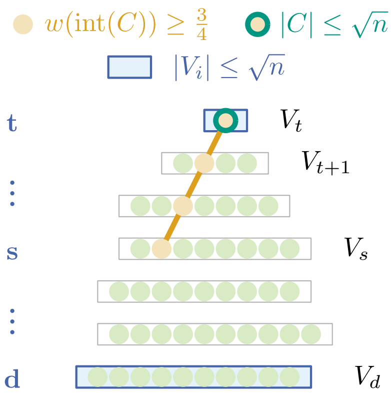
Konstruktion von Teilgraph H

- Sei V_i für $i \geq t$ die Knotenmenge aller Kreise von Level i die in C_t geschachtelt sind.
- Betrachte **minimales** $d > s$ mit $|V_d| \leq \sqrt{n}$ (falls so ein Level existiert)



Konstruktion von Teilgraph H

- Sei V_i für $i \geq t$ die Knotenmenge aller Kreise von Level i die in C_t geschachtelt sind.
- Betrachte **minimales** $d > s$ mit $|V_d| \leq \sqrt{n}$ (falls so ein Level existiert)
- Entferne $\mathrm{int}(C)$ für jeden Kreis C auf Level d unter C_t.

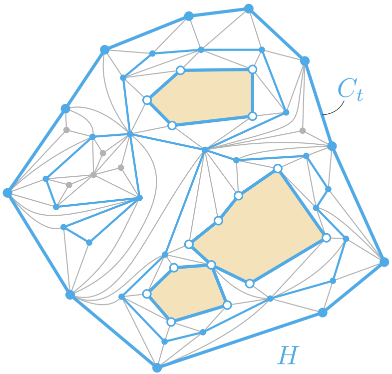


Konstruktion von Teilgraph H

- Sei V_i für $i \geq t$ die Knotenmenge aller Kreise von Level i die in C_t geschachtelt sind.
- Betrachte **minimales** $d > s$ mit $|V_d| \leq \sqrt{n}$ (falls so ein Level existiert)
- Entferne $\mathrm{int}(C)$ für jeden Kreis C auf Level d unter C_t.

Das ergibt unseren Teilgraphen H von G.

- Gewicht $w_H(f)$ einer Facette f von H ist Summe der Gewichte der Facetten aus denen f entstanden ist.



Konstruktion von Teilgraph H

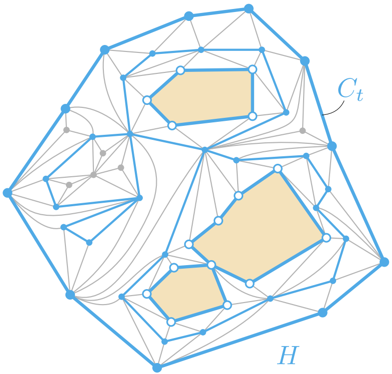
- Sei V_i für $i \geq t$ die Knotenmenge aller Kreise von Level i die in C_t geschachtelt sind.
- Betrachte **minimales** $d > s$ mit $|V_d| \leq \sqrt{n}$ (falls so ein Level existiert)
- Entferne $\mathrm{int}(C)$ für jeden Kreis C auf Level d unter C_t.

Das ergibt unseren Teilgraphen H von G.

- Gewicht $w_H(f)$ einer Facette f von H ist Summe der Gewichte der Facetten aus denen f entstanden ist.
- Wenn $w(\mathrm{int}(C)) \geq \frac{1}{4}$ für Kreis C aus Level d, dann:

  $|C| \leq |V_d| \leq \sqrt{n}$ und $w(\mathrm{int}(C)) < \frac{3}{4}$

  $\Rightarrow$ C ist $\frac{3}{4}$-balancierter Kreis-Separator in G ✓



Konstruktion von Teilgraph H

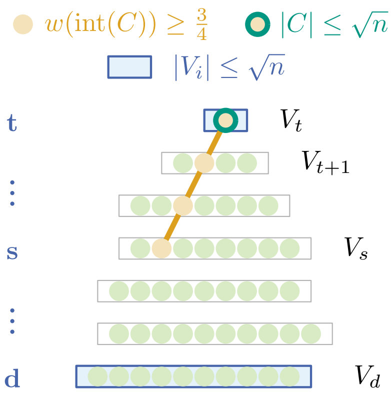
- Sei V_i für $i \geq t$ die Knotenmenge aller Kreise von Level i die in C_t geschachtelt sind.
- Betrachte **minimales** $d > s$ mit $|V_d| \leq \sqrt{n}$ (falls so ein Level existiert)
- Entferne $\mathrm{int}(C)$ für jeden Kreis C auf Level d unter C_t.

Das ergibt unseren Teilgraphen H von G.

- Gewicht $w_H(f)$ einer Facette f von H ist Summe der Gewichte der Facetten aus denen f entstanden ist.
- Wenn $w(\mathrm{int}(C)) \geq \frac{1}{4}$ für Kreis C aus Level d, dann:

  $|C| \leq |V_d| \leq \sqrt{n}$ und $w(\mathrm{int}(C)) < \frac{3}{4}$

  $\Rightarrow$ C ist $\frac{3}{4}$-balancierter Kreis-Separator in G ✓



Konstruktion von Teilgraph H

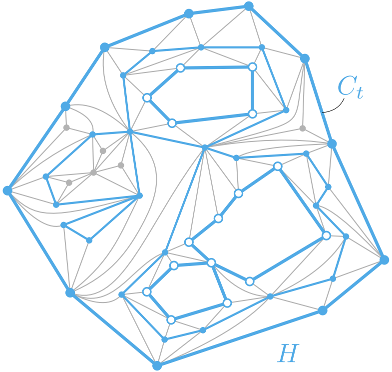
- Sei V_i für $i \geq t$ die Knotenmenge aller Kreise von Level i die in C_t geschachtelt sind.
- Betrachte **minimales** $d > s$ mit $|V_d| \leq \sqrt{n}$ (falls so ein Level existiert)
- Entferne $\mathrm{int}(C)$ für jeden Kreis C auf Level d unter C_t.

Das ergibt unseren Teilgraphen H von G.

- Gewicht $w_H(f)$ einer Facette f von H ist Summe der Gewichte der Facetten aus denen f entstanden ist.
- Wenn $w(\mathrm{int}(C)) \geq \frac{1}{4}$ für Kreis C aus Level d, dann:

  $|C| \leq |V_d| \leq \sqrt{n}$ und $w(\mathrm{int}(C)) < \frac{3}{4}$

  $\Rightarrow$ C ist $\frac{3}{4}$-balancierter Kreis-Separator in G ✓
- Also o.B.d.A. $w_H(f) < \frac{1}{4}$ für jede Facette f von H.



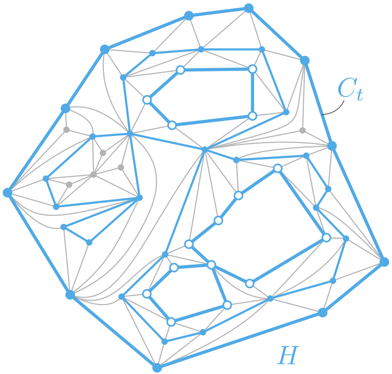
Beweis des Planar Cycle-Separator – Allgemeiner Fall

Satz (Planar Cycle-Separator).

Sei $\alpha = \frac{3}{4}$, G trianguliert, $w(f) < \frac{1}{4}$ für jedes $f \in F$.
$\Rightarrow$ Es gibt $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ Knoten, der in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden kann.

Strategie:

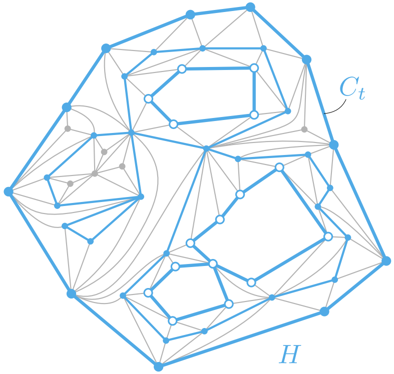
- Finde Teilgraphen H ✓ von G, sodass:
  - Jede Facette in H hat Gewicht kleiner als $\frac{1}{4}$. ✓
  - H hat Spannbaum T mit $\mathrm{diam}(T) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
  - Maximalgrad des Dualbaums T^* von T ist höchstens 3.
- Wende dann das Lemma auf T an. Das geht!
- Erhalte $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C mit $|C| \leq \mathrm{diam}(T) + 1 = \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ✓



Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T von H mit:

- $\mathrm{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$



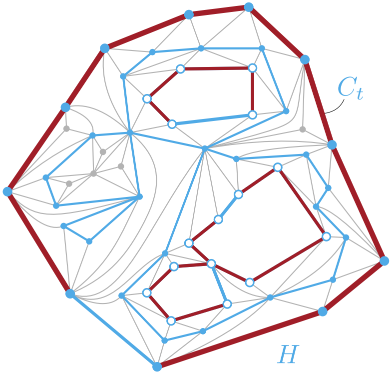
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T von H mit:

- $\mathrm{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$

Wähle für Baum T:

- Alle außer einer Kante von C_t.
- Alle außer einer Kante für jedes C auf Level d.



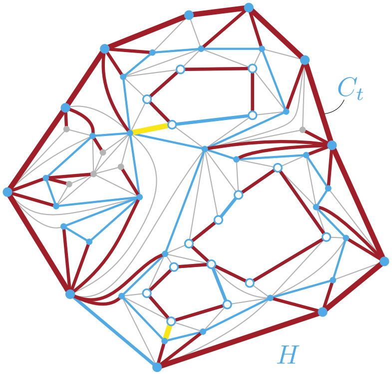
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\operatorname{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$

Wähle für Baum T:

- Alle außer einer Kante von C_t.
- Alle außer einer Kante für jedes C auf Level d.
- Für jede Komponente auf Level d eine Kante zu Level $d-1$.
- Für jeden Knoten in V_i für $t < i < d$ wähle eine Kante zu Level $i-1$.



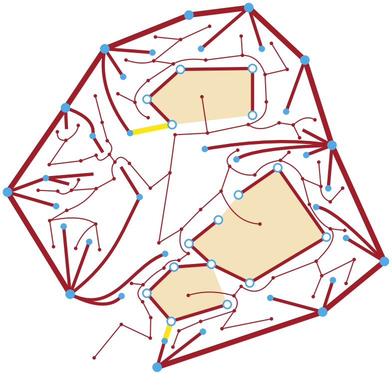
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\operatorname{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$

Maximalgrad von T^*:

- Dreiecksfacetten haben sowieso Maximalgrad 3.
- Die inneren Kreisfacetten und die äußere Facette sind nach Konstruktion von T nur zu einer anderen Facette in T^* benachbart.



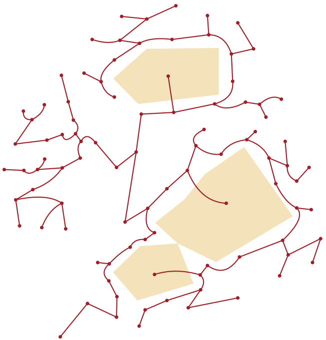
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\operatorname{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$ ✓

Maximalgrad von T^*:

- Dreiecksfacetten haben sowieso Maximalgrad 3.
- Die inneren Kreisfacetten und die äußere Facette sind nach Konstruktion von T nur zu einer anderen Facette in T^* benachbart.



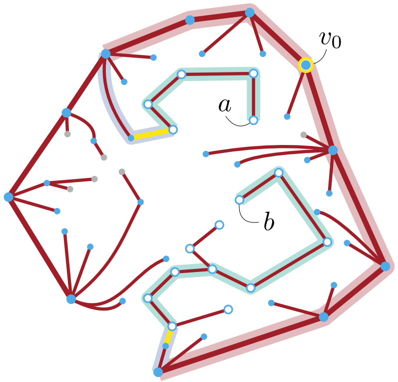
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\operatorname{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$ ✓

Durchmesser von T:

- Wähle Wurzel v_0 von T auf C_t.
- Jeder Knoten v kommt entlang T in höchstens $|V_d| + (d-t) + |C_t|$ Schritten zu v_0.
- Wir haben $|V_d| \leq \sqrt{n}$ und $|C_t| \leq \sqrt{n}$.



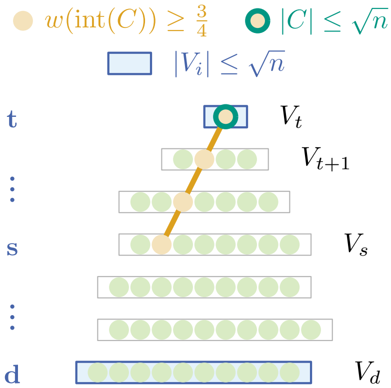
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\operatorname{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ✓
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$ ✓

Durchmesser von T:

- Wähle Wurzel v_0 von T auf C_t.
- Jeder Knoten v kommt entlang T in höchstens $|V_d| + (d-t) + |C_t|$ Schritten zu v_0.
- Wir haben $|V_d| \leq \sqrt{n}$ und $|C_t| \leq \sqrt{n}$.
- $(d-t) \leq \sqrt{n}$, da $|V_i| > \sqrt{n}$ für alle $t < i < d$.
- Insgesamt also $\operatorname{diam}(T) \leq 6\sqrt{n}$.



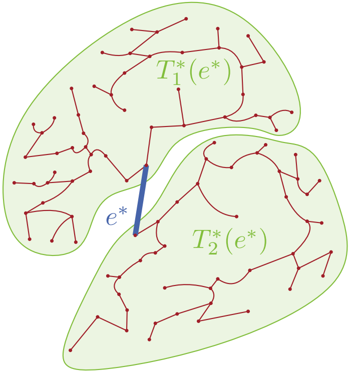
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\mathrm{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ✓
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$ ✓

$\Rightarrow$ Lemma liefert α-balancierten Kreis-Separator durch einen Fundamentalkreis C von T.

- $|C| \leq 2 \cdot \mathrm{diam}(T) + 1 = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.



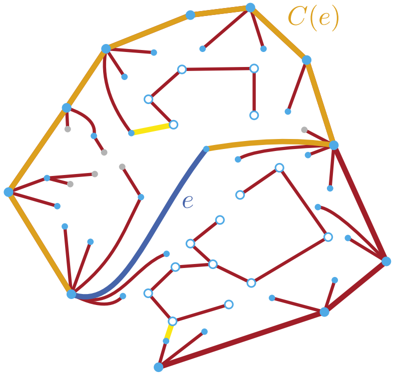
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\text{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ✓
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$ ✓

$\Rightarrow$ Lemma liefert α-balancierten Kreis-Separator durch einen Fundamentalkreis C von T.

- $|C| \leq 2 \cdot \text{diam}(T) + 1 = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.



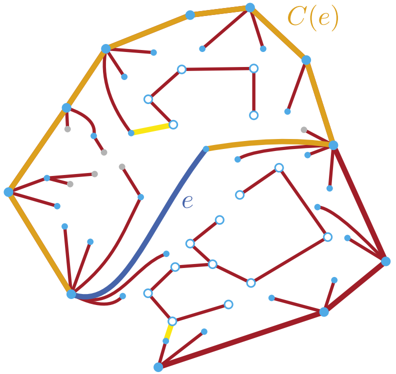
Konstruktion von Spannbaum T

Wir brauchen Spannbaum T ✓ von H mit:

- $\mathrm{diam}(T) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ ✓
- Maximalgrad des Dualbaums $\Delta(T^*) \leq 3$ ✓

$\Rightarrow$ Lemma liefert α-balancierten Kreis-Separator durch einen Fundamentalkreis C von T.

- $|C| \leq 2 \cdot \mathrm{diam}(T) + 1 = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
- Der Beweis ist algorithmisch umsetzbar.
  - Greedy-Algorithmus für das Lemma
  - Breitensuche für die Hierarchie
- Laufzeit ist $\mathcal{O}(n)$. ✓



Planar Separator – Übersicht

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (Kreis-Variante des Planar-Separator).

Jede planare Triangulierung $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten, Facettenmenge F und einer Gewichtsfunktion $w\colon V \cup E \cup F \to [0, 1]$ sodass $w(V \cup E \cup F) = 1$ hat einen $\frac{3}{4}$-balancierten Kreis-Separator C der Größe $|V(C)| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Satz (Planar-Separator-Theorem).

Jeder planare Graph mit $n \geq 5$ Knoten hat einen $\frac{3}{4}$-balancierten Separator S der Größe $|S| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
Dieser kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.