

# Simultane Einbettungen außenplanarer Graphen

Bachelorarbeit von

**Annette Karrer**

An der Fakultät für Informatik  
Institut für Theoretische Informatik

Erstgutachter:	Prof. Dr. Dorothea Wagner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Peter Sanders
Betreuende Mitarbeiter:	Dipl.-Inform. Thomas Bläsius Dr. Ignaz Rutter

Bearbeitungszeit: 15. Februar 2013 – 6. Mai 2013



### **Statement of Authorship**

I hereby declare that this document has been composed by myself and describes my own work, unless otherwise acknowledged in the text.

Karlsruhe, 6. Mai 2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Bisherige Forschungen als Ausgangssituation . . . . .	2
1.1.1 Existenzaussagen simultaner Einbettungen . . . . .	2
1.1.2 Entscheidungsalgorithmen . . . . .	2
1.2 Gliederung und wissenschaftlicher Beitrag . . . . .	3
<b>2 Graphentheoretische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Außenplanare Graphen . . . . .	5
2.2 Wichtige Sätze für außenplanare Graphen . . . . .	5
2.3 Graphenzusammenhang und separierende Mengen . . . . .	6
2.4 Zweifach zusammenhängende Graphen und Teilgraphen . . . . .	7
2.5 Kreise . . . . .	8
2.6 Vektorraum der Kreise . . . . .	8
2.7 Kreisbasis . . . . .	8
2.8 Einbettungen . . . . .	10
2.8.1 Einbettungen auf der Sphäre . . . . .	10
2.8.2 Kombinatorische Einbettung . . . . .	11
2.8.3 Topologische Einbettung . . . . .	12
2.9 Simultanes Einbetten als Einbettungsproblem . . . . .	16
<b>3 Existenz simultaner Einbettungen bei zweifach zusammenhängendem Schnitt</b>	<b>19</b>
3.1 Eigenschaften zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen . . . . .	19
3.2 Existenz simultaner Einbettungen . . . . .	23
<b>4 Algorithmen für zweifach zusammenhängende Graphen</b>	<b>25</b>
4.1 Bestimmung aller simultanen Einbettungen bei zusammenhängendem Schnitt . . . . .	27
4.1.1 Einbettungen der Graphen via Sehnensvariablen . . . . .	27
4.1.2 Einbettungen des Schnittgraphen via Tripelvariablen . . . . .	30
4.1.2.1 Beschreibung von Kantenreihenfolgen durch Tupel . . . . .	30
4.1.2.2 Tripelvariablen . . . . .	31
4.1.3 Zusammenhang von Sehnens- und Tripelvariablen . . . . .	33
4.1.4 Beschreibung eines Algorithmus bei zusammenhängendem Schnitt . . . . .	35
4.1.5 Formulierung des Algorithmus durch ein lineares Gleichungssystem . . . . .	37
4.1.6 Beispiele . . . . .	39
4.2 Bestimmung aller simultanen Einbettungen bei beliebigem Schnitt . . . . .	42
4.2.1 Einbettungen des Schnittgraphen via Tripel- und Lagevariablen . . . . .	43
4.2.1.1 Relative Lagen von Zusammenhangskomponenten . . . . .	44
4.2.1.2 Relative Lagen von Knoten und Kreisen . . . . .	47
4.2.1.3 Relative Lagen von Knoten zu Kreisen aus einer planaren Kreisbasis . . . . .	49
4.2.1.4 Lagevariablen . . . . .	52
4.2.2 Zusammenhang von Sehnens- und Lagevariablen . . . . .	52

4.2.3 Beschreibung eines Algorithmus bei beliebigem Schnitt . . . . .	54
4.2.4 Formulierung des Algorithmus durch ein lineares Gleichungssystem . . .	56
<b>5 Verallgemeinerung auf Graphen mit einem Schnittknoten</b>	<b>61</b>
5.1 Planare Einbettungen des Eingangsgraphen mit Schnittknoten . . . . .	62
5.2 Konsekutivität der Kantenreihenfolge um den Schnittknoten . . . . .	65
5.3 Beschreibung eines Algorithmus mit zugelassenem Schnittknoten . . . . .	69
5.4 Formulierung des Algorithmus durch ein lineares Gleichungssystem . . . . .	69
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>73</b>
6.1 Zusammenfassung . . . . .	73
6.2 Ausblick . . . . .	74
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>

# 1. Einleitung

In vielen Gebieten wie bei der Analyse von Netzwerken hat man es oft mit verschiedenen Instanzen zu tun, deren unterschiedliche Beziehungen untereinander mit Hilfe von Graphen dargestellt werden. Ändern sich Beziehungen zwischen Instanzen, kann es erwünscht sein, mehrere zu verschiedenen Zeiten geltende Beziehungen in einer gemeinsamen Zeichnung darzustellen, um herauszufinden, wie sich eine Beziehung über eine gewisse Zeit hinweg verändert. In ähnlicher Weise kann es sein, dass man mehrere Beziehungen zwischen Instanzen betrachtet und diese in einer gemeinsamen Zeichnung abbilden möchte.

Die Frage, die sich stellt, ist, welche Anforderung man an eine gemeinsame Zeichnung solcher Graphen stellen möchte. Einerseits sollen die Beziehungen der einzelnen Graphen gut erkennbar sein. Die Zeichnung einzelner Graphen, die sich aus der gemeinsamen Zeichnung ergibt, soll also möglichst übersichtlich sein. Andererseits sollten die Zeichnungen der einzelnen Graphen aufeinander abgestimmt sein.

Wird besonderer Wert darauf gelegt, die Gemeinsamkeiten der betrachteten Graphen herauszustellen, so ist eine Zeichnung gesucht, aus der direkt geschlossen werden kann, zwischen welchen Instanzen sich die Beziehung über die Zeit hinweg nicht verändert, beziehungsweise zwischen welchen Instanzen alle betrachteten Beziehungen gelten. Auf diese Weise ergibt sich das Problem, eine Serie von Graphen so zu zeichnen, dass alle Knoten und Kanten gleich dargestellt werden, die im Schnitt aller Graphen enthalten sind.

Wir betrachten hier nur planare Graphen und fordern zusätzlich, dass in einer gemeinsamen Zeichnung aller Graphen jeder einzelne Graph planar eingebettet sein soll. Dann nennt sich das Problem, zu entscheiden, ob es eine solche simultane Zeichnung aller planaren Graphen aus der Serie gibt, *simultanes Einbetten mit festen Kanten* (SEFE). Sprechen wir in dieser Arbeit von simultanen Einbettungen, so sind damit stets simultane Einbettungen mit festen Kanten gemeint. Michael Jünger und Michael Schulz [JS09] haben gezeigt, dass das Problem zum Einbettungsproblem äquivalent ist, die Graphen so einzubetten, dass der gemeinsame Schnittgraph gleich eingebettet ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass das Problem SEFE nicht mit dem Spezialfall verwechselt werden sollte, in dem die Einbettung eines Graphen vorgegeben ist und geprüft werden soll, ob andere Graphen so eingebettet werden können, dass der Schnitt aller Graphen genauso wie in der vorgegebenen Einbettung eingebettet ist. Vielmehr müssen alle Einbettungen aufeinander abgestimmt werden. Eine passende Vorstellung dazu ist, die Graphen gleichzeitig einzubetten und alle Einbettungen so lange zu variieren und aneinander anzupassen, bis der gemeinsame Graph überall gleich eingebettet ist, sofern das überhaupt möglich ist.

## 1.1 Bisherige Forschungen als Ausgangssituation

Viele Arbeiten haben sich bereits mit dem Problem SEFE beschäftigt. Der Artikel von Bläsius, Kobourov und Rutter[BKR12] liefert einen Überblick über die bisherigen Forschungsergebnisse. Es wurde bereits gezeigt [GJP<sup>+</sup>06], dass das Problem SEFE für mehr als zwei planare Graphen NP-vollständig ist, während es für zwei planare Graphen nicht bekannt ist. Um der Antwort auf diese Frage Schritt für Schritt näher zu kommen, wurden spezielle Graphen und Graphklassen hinsichtlich dieser Fragestellung untersucht. Für diese wurde entweder gezeigt, dass es immer eine simultane Einbettung gibt, und Algorithmen zur Berechnung der simultanen Einbettungen angegeben, oder es wurde ein Beispiel angegeben, das zeigt, dass es nicht immer eine simultane Einbettung geben muss. Im Fall, dass es es nicht immer eine simultane Einbettung gibt, wurde oftmals gezeigt, dass das Problem SEFE entscheidbar ist, und im Falle der Existenz einer simultanen Einbettung wurden Algorithmen zur Berechnung der simultanen Einbettungen angegeben.

### 1.1.1 Existenzaussagen simultaner Einbettungen

Beispielsweise wurde für folgende Spezialfälle gezeigt, dass es immer eine simultane Einbettung gibt: Ist der eine Graph außenplanar und der andere ein Pfad oder ein Kreis, so gibt es immer eine simultane Einbettung [GL07]. Auch wenn zwei außenplanare Graphen gegeben sind und der Schnittgraph aus einer Vereinigung von Pfaden besteht, gibt es immer eine simultane Einbettung [GL07]. Weiter wurde ein Beispiel angegeben, das zeigt, dass zwei außenplanare Graphen nicht immer eine simultane Einbettung besitzen. [Fra07].

### 1.1.2 Entscheidungsalgorithmen

Betrachtet man Graphklassen, für die bekannt ist, dass nicht immer simultane Einbettungen existieren müssen, stellt sich die Frage, ob in polynomialer Zeit entschieden werden kann, ob es eine simultane Einbettung zweier solcher Graphen  $G_1$  und  $G_2$  gibt-, oder nicht. Um sich der Antwort dieser Frage anzunähern, wurden eingeschränkte Problemstellungen betrachtet, indem Forderungen an  $G_1$  und  $G_2$  und den Schnittgraphen gestellt wurden.

Dabei spielen die Einschränkungen an den Schnittgraphen eine wichtige Rolle. Denn sollen zwei Graphen simultan eingebettet werden, ist es von großer Bedeutung, auf welche Weisen der Schnittgraph eingebettet werden kann. Dabei ist es ein großer Unterschied, ob der Schnittgraph zusammenhängend ist oder nicht. Denn ist der Schnittgraph nicht zusammenhängend, müssen nicht nur die Einbettungsmöglichkeiten der einzelnen Zusammenhangskomponenten betrachtet werden, sondern auch, welche Lagen die Zusammenhangskomponenten zueinander haben können.

Die Arbeit [BR13a] konzentriert sich beispielsweise darauf, mit relativen Lagen der Zusammenhangskomponenten des Schnittgraphen umgehen zu können. Es wird in ihr gezeigt, dass das Problem SEFE für zwei planare Graphen entscheidbar ist, deren Schnitt aus disjunkten Kreisen besteht.

Die Arbeiten [BR13b], [ABF<sup>+</sup>12] und [HJL10] untersuchen Fälle, in denen der Schnittgraph mindestens zusammenhängend ist.

Die Arbeit [BR13b] zeigt, dass das Problem SEFE für zwei zweifach zusammenhängende planare Graphen in quadratischer Zeit lösbar ist, wenn der Schnittgraph zusammenhängend ist. In den Arbeiten [ABF<sup>+</sup>12] und [HJL10] wird gezeigt, dass das Problem SEFE für zwei planare Graphen in linearer Zeit entscheidbar ist, wenn der Schnittgraph zweifach zusammenhängend ist.

In der Arbeit [Sch13] wurden zugleich relative Lagen und die Einbettungen einzelner Zusammenhangskomponenten betrachtet. Besitzen alle Knoten des Schnittgraph höchstens



den Grad drei, oder besteht der Schnittgraph aus zweifach zusammenhängenden Zusammenhangskomponenten so ist es in polynomialer Zeit entscheidbar, ob es eine simultane Einbettung gibt, oder nicht.

## 1.2 Gliederung und wissenschaftlicher Beitrag

Da es für außenplanare Graphen nicht immer eine simultane Einbettung geben muss, stellt sich die Frage, ob es es möglich ist, für zwei außenplanare Graphen  $G_1$  und  $G_2$  in polynomialer Zeit zu entscheiden, ob sie so gezeichnet werden können, dass ihr Schnittgraph  $G_\cap$  in beiden Zeichnungen gleich dargestellt wird, oder nicht. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dieser Problemstellung.

Zunächst werden wir zeigen, dass zwei außenplanare Graphen mit zweifach zusammenhängendem Schnittgraphen immer eine simultane Einbettung besitzen. Davon ausgehend werden wir Schritt für Schritt Anforderungen an den Schnittgraphen aufgeben. Dabei schränken wir die Problemstellung dadurch ein, dass wir zweifach zusammenhängende Graphen betrachten. Auf diese Weise werden wir schließlich zeigen, dass für zwei zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen in quadratischer Zeit entscheidbar ist, ob es simultane Einbettungen gibt oder nicht. Im Falle der Existenz werden wir alle simultanen Einbettungen berechnen können. Abschließend werden wir den Fall betrachten, dass einer der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  aus zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken und einem Schnittknoten besteht, während der andere immer noch als zweifach zusammenhängend vorausgesetzt ist. Wir werden zeigen, dass auch in diesem Fall das Problem SEFE in quadratischer Zeit entscheidbar ist.

Insbesondere wird in dieser Arbeit für zweifach zusammenhängende Graphen gezeigt, wie gleichzeitig mit Einbettungen einzelner Zusammenhangskomponenten und relativen Lagen mehrerer Zusammenhangskomponenten umgegangen werden kann. Es sei darauf hingewiesen, dass die Arbeit von Schäfer [Sch13] diesen Spezialfall nicht abdeckt.

Diese Arbeit baut auf den Arbeiten von Bläsius und Rutter [BR13b], [BR13a] auf. Während die erste der beiden Arbeiten zeigt, dass für zwei zweifach zusammenhängende planare Graphen mit zusammenhängendem Schnitt das Problem SEFE in polynomialer Zeit entscheidbar ist, zeigt die zweite Arbeit, wie man mit verschiedenen Lagen von Zusammenhangskomponenten des Schnittgraphen umgehen kann. Es werden beide Arbeiten für den Spezialfall außenplanarer Graphen zusammengefügt, indem zugleich mit relativen Lagen und Einbettungen einzelner Zusammenhangskomponenten gearbeitet wird.

Dabei orientiert sich die Arbeit stark an der Arbeit von Bläsius und Rutter [BR13a], in der auf die relative Lagen von Zusammenhangskomponenten eingegangen wird. Wie dort besteht die Grundidee des Algorithmus darin, die Menge aller Einbettungen des Schnittgraphen, die durch Einbettungen von  $G_1$  induziert werden, und die Menge aller Einbettungen des Schnittgraphen, die durch Einbettungen von  $G_2$  induziert werden, zu schneiden. Im Schnitt dieser Mengen sind alle Einbettungen des Schnittgraphen enthalten, die von jeweils mindestens einer Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  induziert werden. Ist der Schnitt leer, kann es deshalb keine simultane Einbettung geben. Ist der Schnitt nicht leer, so entspricht jedes Paar von Einbettungen von  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$ , die eine Einbettung des Schnittgraphen aus der betrachteten Schnittmenge induzieren, einer simultanen Einbettung.

Um die planare Einbettung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  zu repräsentieren, wurde dabei in [BR13a] der SPQR-Baum [BT96] für zweifach zusammenhängende planare Graphen verwendet und wurden ausgehend von diesen Bedingungen aufgestellt, die zwei Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  genau dann erfüllen, wenn sie einer simultanen Einbettung entsprechen.

Wir gehen in dieser Arbeit genauso vor, nur, dass wir hier keine SPQR-Bäume benötigen, da sich Einbettungen zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen durch eine

Belegung boolescher Variablen beschreiben lassen, wie in Kapitel 4 gezeigt wird. Mit Hilfe dieser Beschreibungsmöglichkeit der Einbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  besteht der Algorithmus letztendlich aus dem Lösen eines linearen Gleichungssystems boolescher Variablen.

## 2. Graphentheoretische Grundlagen

Zum einheitlichen Verständnis definieren wir einige graphentheoretische Grundlagen entsprechend den Standardwerken [Die10] und [Vol91].

### 2.1 Außenplanare Graphen

Ein *planarer Graph*  $G$  ist ein Graph, der sich so in die Ebene zeichnen lässt, dass sich keine zwei Kanten schneiden. Wir nennen eine derartige Darstellung von  $G$  in der Ebene *planare Zeichnung* oder *schlicht Zeichnung*. Die eingezeichneten Kanten unterteilen dabei die Ebene in Regionen. Diese nennen wir *Facetten*. Die Menge der Kanten und Knoten, die an eine Facette  $f$  grenzt, bildet einen Teilgraphen von  $G$ . Wir nennen ihn *Rand der Facette*  $f$ . In der Ebene gibt es dabei stets eine unbeschränkte Facette. Diese Facette heißt *äußere Facette*. Die beschränkten Facetten heißen *innere Facetten*.

Ein *außenplanarer Graph* ist ein Graph, der sich so zeichnen lässt, dass alle Knoten im Rand einer Facette enthalten sind. In der Literatur bezeichnet man oft die Zeichnung eines außenplanaren Graphen als *außenplanar*, wenn in der Zeichnung alle Knoten an die äußere Facette grenzen. Da wir in dieser Arbeit der äußeren Facette keine Sonderrolle zukommen lassen wollen, bezeichnen wir eine Zeichnung als außenplanar, wenn alle Knoten an eine gemeinsame, aber beliebig gewählte Facette grenzen. Siehe dazu Abbildung 2.1.

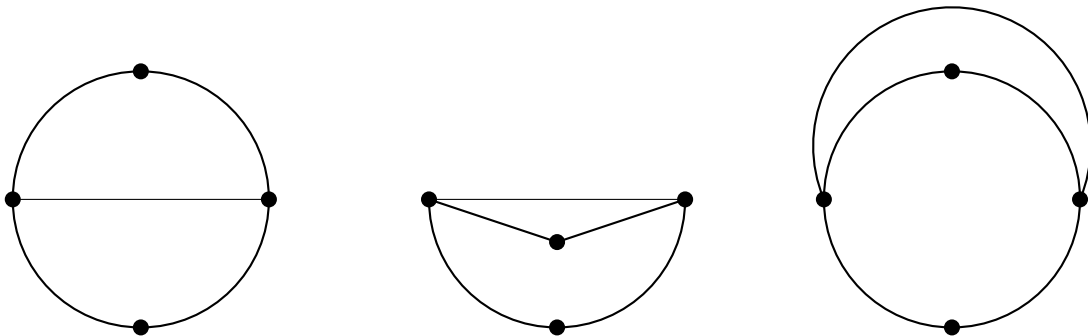


Abbildung 2.1: Drei Zeichnungen eines außenplanaren Graphen

### 2.2 Wichtige Sätze für außenplanare Graphen

Ein Graph  $G_k$  wird als Kontraktion eines anderen Graphen  $G$  bezeichnet, wenn man  $G$  ausgehend von  $G_k$  konstruieren kann, indem man nach und nach je einen Pfad aus  $G_k$

durch eine Kante ersetzt, wobei die Kante und der Pfad gleiche Endknoten besitzen müssen. in Graph  $G_u$  heißt Unterteilung eines anderen Graphen  $G$ , wenn man ihn ausgehend von  $G$  konstruieren kann, indem man in  $G$  nach und nach je eine Kante durch einen Pfad ersetzt, wobei die Kante und der Pfad die gleichen Endknoten besitzen müssen. Die Kontraktion jedes außenplanaren Graphen ist außenplanar.

Der Graph  $K_4$  ist der vollständige Graph mit vier Knoten. Er besteht aus vier Knoten, die paarweise durch eine Kante verbunden sind. Der Graph  $K_{2,3}$  ist der vollständig bipartite Graph mit zwei Partitionen, wobei eine zwei Knoten und die andere drei Knoten enthält. Wir erhalten diesen Graphen, indem wir fünf Knoten in zwei Mengen  $A$  und  $B$  partitionieren, so dass  $A$  zwei Elemente und  $B$  drei Elemente enthält. Wir definieren die Kantenmenge des Graphen, indem wir fordern, dass jeder Knoten aus  $A$  mit allen Knoten aus  $B$  verbunden ist. Es gibt dabei insbesondere keine Kante, die zwei Knoten aus der gleichen Menge miteinander verbindet. Siehe dazu Abbildung 2.2. Ein Graph ist genau dann außenplanar, wenn er weder eine Unterteilung von  $K_4$  noch von  $K_{2,3}$  als Teilgraphen enthält [CH67]. Ist  $G$  ein planarer Graph, dann gilt für die Anzahl  $f$  seiner Facetten, die Anzahl  $n$  seiner Knoten und die Anzahl  $m$  seiner Kanten in einer beliebigen Einbettung stets  $n - m + f = 2$  (Eulers Formel) [Die10, S. 103].

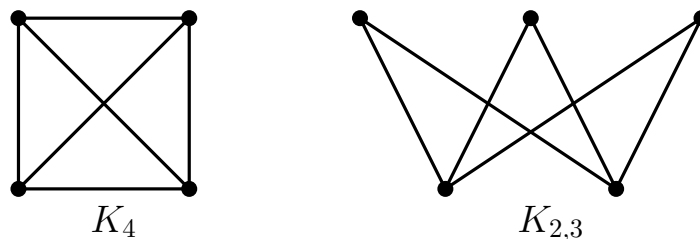


Abbildung 2.2: Drei Zeichnungen eines außenplanaren Graphen

### 2.3 Graphenzusammenhang und separierende Mengen

Ein Graph wird als *zusammenhängend* bezeichnet, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Pfad gibt, und *unzusammenhängend*, wenn er nicht zusammenhängend ist. Ist  $G$  ein unzusammenhängender Graph, so nennen wir seine maximalen zusammenhängenden Teilgraphen *Zusammenhangskomponenten*. Dabei ist die Maximalität bezüglich der Teilgraphenbeziehung gemeint. Eine Zusammenhangskomponente ist also ein zusammenhängender Teilgraph von  $G$ , der in keinem anderen zusammenhängenden Teilgraphen von  $G$  enthalten ist.

Einen zusammenhängenden Graphen, der keinen einfachen Kreis enthält, bezeichnet man als *Baum*. Jeder Baum ist außenplanar. Insbesondere ist ein Graph genau dann ein Baum, wenn es zwischen je zwei Knoten genau einen Pfad gibt.

Wir nennen eine  $k$ -elementige Knotenmenge  $S \subseteq V$   $k$ -separierende Menge, wenn der durch die Knotenmenge  $V \setminus S$  induzierte Teilgraph von  $G$  unzusammenhängend ist. Besitzt ein Graph keine  $k - 1$ -separierende Menge, so nennen wir den Graphen  $k$ -fach zusammenhängend. Ein Graph ist also  $k$ -fach zusammenhängend, wenn das Entfernen von  $k - 1$  beliebigen Knoten nicht dazu führt, dass der Graph unzusammenhängend wird. Nach dem Satz von Menger ([Die10, S. 76]) ist ein Graph genau dann  $k$ -fach zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Knoten  $k$  disjunkte Pfade gibt.

Besitzt  $G$  eine 1-separierende Menge, so besteht diese Menge aus einem Knoten  $v$ .  $v$  bezeichnen wir als *Schnittknoten*. Die Zusammenhangskomponenten des durch  $V \setminus \{v\}$  induzierten Teilgraphen von  $G$  heißen *Schnittkomponenten*. Besitzt  $G$  eine 2-separierende Menge, so besteht diese Menge aus zwei Knoten  $v$  und  $w$ . Dies ist dann ein *Paar separierender Knoten*

## 2.4 Zweifach zusammenhängende Graphen und Teilgraphen

Ein zweifach zusammenhängender Graph zeichnet sich dadurch aus, dass er keinen Schnittknoten enthält. Durch das Entfernen eines Knotens zerfällt der Graph also nicht in mehrere Schnittkomponenten. Solche Graphen haben einige hilfreiche Eigenschaften:

Jede Kante eines zweifach zusammenhängenden Graphen ist in einem einfachen Kreis enthalten (Satz von Menger).

Der Rand einer Facette eines zweifach zusammenhängenden Graphen besteht stets aus einem einfachen Kreis.

Um dies zu erläutern, wählen wir einen Startknoten aus dem Rand einer Facette und durchlaufen den Rand der Facette in einer gewählten Richtung, bis wir wieder beim Startknoten ankommen. Entspricht der Rand keinem einfachen Kreis, so muss dabei mindestens ein Knoten  $v$  mehrfach durchlaufen worden sein. Entfernt man diesen Knoten, so zerfällt der Graph in mehrere Schnittkomponenten. Eine dieser Schnittkomponenten enthält alle Kanten und Knoten, auf die wir beim Durchlaufen des Facettenkreises nach dem ersten Durchlaufen und vor dem Zweiten Durchlaufen des Knotens  $v$  gestoßen sind. Eine andere Schnittkomponente enthält eine Teilmenge der restlichen Knoten und Kanten des Facettenrandes. Somit ist  $v$  ein Schnittknoten. Da ein zweifach zusammenhängender Graph niemals einen Schnittknoten enthalten kann, folgt, dass der Rand der Facette doch einem einfachen Kreis entsprochen haben muss.

Ein *maximaler zweifach zusammenhängender Teilgraph* von  $G$  ist ein zweifach zusammenhängender Teilgraph, der in keinem anderen zweifach zusammenhängenden Teilgraphen von  $G$  enthalten ist. Es ist möglich, jeden Graphen als Vereinigung seiner *Blöcke* zu beschreiben [Die10, S. 64]. Dabei ist ein Block ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Schnittknoten enthält. Ein Block ist also entweder ein isolierter Knoten, eine Brücke oder ein maximaler zweifach zusammenhängender Teilgraph von  $G$ . Dabei heißt eine Kante eines Graphen *Brücke*, wenn sie in keinem einfachen Kreis enthalten ist. Siehe dazu Abbildung 2.3. Betrachten wir eine  $k$ -separierende Menge, so sind ihre zweifach zusammenhängenden Schnittkomponenten zweifach zusammenhängende Blöcke.

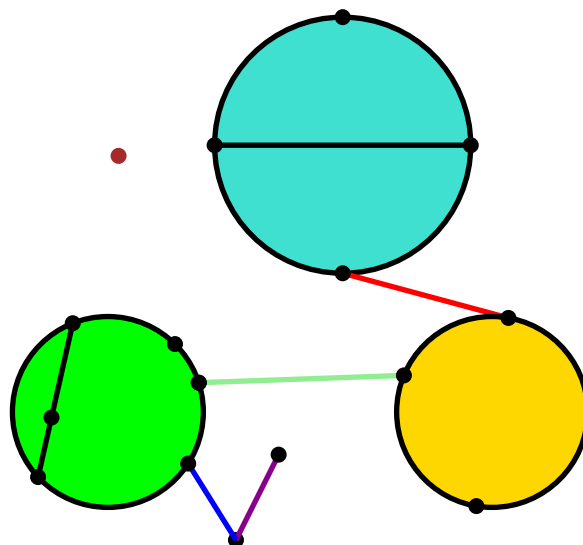


Abbildung 2.3: Die verschiedenen Blöcke des Graphen sind mit verschiedenen Farben markiert

## 2.5 Kreise

Ein Graph, in dem jeder Knoten einen geraden Grad besitzt, bezeichnen wir als Kreis. Ein Graph mit Knotenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und Kantenmenge  $E = \{(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$  heißt *einfacher Kreis*. Jeder einfache Kreis ist ein Kreis, und jeder Kreis entspricht der Vereinigung einfacher Kreise. Im Laufe der Arbeit werden wir auch einfache Kreise schlicht als *Kreise* bezeichnen, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, im welchen Sinne wir den Begriff gebrauchen.

Ein *Hamiltonkreis* eines Graphen ist ein einfacher Kreis, in dem alle Knoten des Graphen enthalten sind. Eine *Sehne* eines Kreises ist eine Kante, die zwei Knoten eines Kreises miteinander verbindet, dabei aber nicht im Kreis enthalten ist.

Die Kreise eines Graphen spielen eine wichtige Rolle, da durch sie viele Eigenschaften von Graphen bestimmt werden. Dies wird vor allem dadurch deutlich, dass die Menge der Kreise eines Graphen einen Vektorraum bilden.

## 2.6 Vektorraum der Kreise

Den Vektorraum der Kreise eines Graphen werden wir im Folgenden anlehnend an [LTT04, S. 31] und [KLM<sup>+</sup>09, S. 5] definieren.

Ist ein Kreis  $K$  in  $G$  als Teilgraph enthalten, so sagen wir kurz dazu, dass  $K$  ein Kreis von  $G$  ist, beziehungsweise, dass  $G$  den Kreis  $K$  enthält. Im Folgenden beschreiben wir jeden Kreis stets durch seine Kantenmenge. Es sei  $G$  ein beliebiger Graph und  $\mathcal{C}$  die Menge aller Kreise, die in  $G$  enthalten sind. Wir definieren zwei Verknüpfungen auf  $\mathcal{C}$ . Es seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei beliebige Kreise von  $G$  und  $E_1$  beziehungsweise  $E_2$  die Kantenmengen von  $K_1$  beziehungsweise  $K_2$ . Die Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  seien folgendermaßen auf  $\mathcal{C}$  definiert.  $K_1 + K_2 := (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$  und  $1 \cdot K_1 := K_1$ ;  $0 \cdot K_1 := \emptyset$ . Wir addieren also zwei Kreise eines Graphen, indem wir die Kantenmengen der Kreise vereinigen und anschließend Kanten, die in beiden Kreisen vorkommen, aus der Vereinigung entfernen. Die Summe zweier Kreise besteht also aus allen Kanten, die in genau einem der Kreise enthalten sind. Betrachten wir die Vereinigung der Kreise, in der wir noch keine Kanten entfernt haben, so haben alle Endknoten, die nur in einem Kreis enthalten sind, geraden Grad. Dies ist für die Endknoten einer Kante, die in beiden Kreisen enthalten ist, nicht der Fall. Denn beide Knoten besitzen zwar in ihrem jeweiligen Kreis geraden Grad, doch in der Vereinigung teilen sich beide Knoten eine inzidente Kante, sodass beide Knoten in der Vereinigung ungeraden Grad erhalten. Durch Entfernen der gemeinsamen Kante wird dies korrigiert, sodass anschließend jeder Knoten geraden Grad besitzt. Siehe dazu Abbildung 2.4. Somit entsteht durch Addition zweier Kreise stets ein Kreis. Weiterhin ist es egal, in welcher Reihenfolge man zwei Kreise addiert. Die Verknüpfung ist kommutativ. Addiert man die leere Menge und einen Kreis, so verändert sich nichts. Das neutrale Element bezüglich der Addition entspricht der leeren Menge. Die skalare Multiplikation  $\cdot$  lässt einen Kreis unverändert oder löscht den Kreis. Durch diese beiden Verknüpfungen wird die Menge  $\mathcal{C}$  zu einem Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{F}_2$ .

## 2.7 Kreisbasis

Wir betrachten einen beliebig eingebetteten zweifach zusammenhängenden planaren Graphen. Dessen Facetten werden stets von einfachen Kreisen umrandet. Nach [LTT04, S. 31] bildet die Menge aller einfachen Kreise, die die Facetten umranden, eine Basis von  $\mathcal{C}$ , wenn man aus dieser Menge einen beliebigen Kreis entfernt. Der entfernte Kreis entspricht dann der Summe aller anderen Kreise. Entfernt man die äußere Facette einer Einbettung, so

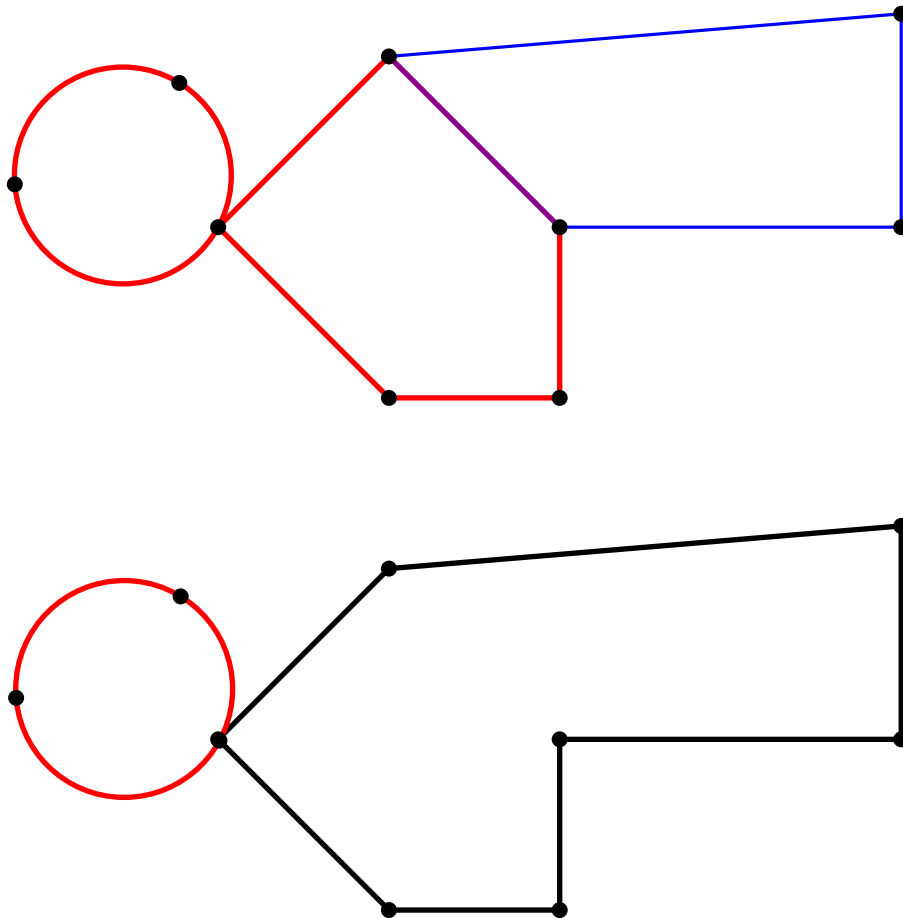


Abbildung 2.4: Es sind zwei Kreise dargestellt. Der rote Kreis entspricht der Vereinigung zweier einfacher Kreise. Der blaue Kreis ist ein einfacher Kreis. Die lila Kante ist gemeinsame Kante des roten und blauen Kreises. Unten sieht man den Kreis, der durch Addition des blauen und roten Kreises entsteht.

ist dies gut zu erkennen, da jede Kante aus dem Rand einer Facette, die nicht der äußeren Facette entspricht, in zwei Facettenrändern enthalten ist und somit beim summieren verschwindet.

Betrachten wir einen beliebigen planaren Graphen mit dem zugehörigen Vektorraum seiner Kreise  $\mathcal{C}$ , so sind alle Kreise des Graphen in der Vereinigung seiner zweifach zusammenhängenden Blöcke enthalten. Dabei bilden die Kreise eines zweifach zusammenhängenden Blocks einen Untervektorraum von  $\mathcal{C}$ . Da die zweifach zusammenhängenden Blöcke eines Graphen disjunkt sind, ist im Schnitt zweier Untervektorräume, die jeweils aus den Kreisen eines Blocks bestehen, nur das neutrale Element, das heißt, die leere Menge enthalten. Deshalb erhalten wir eine Kreisbasis des gesamten Graphen, indem wir die Basen der zweifach zusammenhängenden Blöcke vereinigen.

Wählen wir eine beliebige Einbettung des Graphen, so induziert sie stets Einbettungen seiner Blöcke. Mit Hilfe der induzierten Einbettungen können wir, wie beschrieben, Kreisbasen der einzelnen Blöcke finden. Wir vereinigen die Basen der zweifach zusammenhängenden Blöcke und erhalten eine Basis von  $\mathcal{C}$ . Nach Konstruktion ist dabei stets jede Kante des Graphen in höchstens zwei Basiskreisen enthalten. Insbesondere ist die Anzahl an Elementen in einer so konstruierten Kreisbasis linear in der Knotenzahl, da wir es mit planaren Graphen zu tun haben, für die Eulers Formel gilt.

Da wir die Basis mit Hilfe einer Einbettung  $\mathcal{E}$  gebildet haben, nennen wir eine derartige Basis *planare Kreisbasis*. Genauer wird nach [KLM<sup>+</sup>09, S. 10] eine Basis von  $\mathcal{C}$  planare Kreisbasis beziehungsweise 2-Basis genannt wird, wenn jede Kante des zugrunde liegenden Graphen in in höchstens zwei Kreisen der Basis enthalten ist.

## 2.8 Einbettungen

Graphen, die mehrere Kanten und Knoten besitzen, können auf viele verschiedene Weisen gezeichnet werden. Je nachdem, welche Eigenschaften zweier Zeichnungen man vergleicht, betrachtet man dabei intuitiv zwei Zeichnungen als gleich, während man andere als verschieden beurteilt. Siehe dazu Abbildung 2.5. Daher gibt es verschiedene Vorgehensweisen, die Zeichnungen eines Graphen zu klassifizieren. Eine Möglichkeit besteht darin, Eigenschaften herauszustellen, bezüglich derer man Zeichnungen miteinander vergleichen möchte und eine entsprechende Äquivalenzrelation auf der Menge der Zeichnungen eines Graphen zu definieren. Auf diese Weise werden alle Zeichnungen als gleich betrachtet, die bezüglich dieser Äquivalenzrelation in einer Äquivalenzklasse liegen.

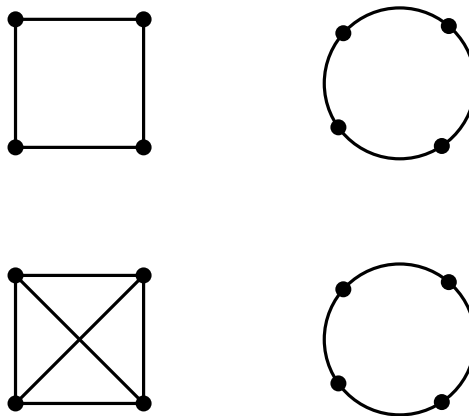


Abbildung 2.5: Während man intuitiv die beiden Zeichnungen in der ersten Reihe als ähnlich empfindet, erscheinen die beiden unteren Graphen verschieden.

Wird ein Graph *eingebettet*, so ordnet man dem Graphen einer Äquivalenzklasse zu. Die *Einbettung* eines Graphen entspricht dann dieser Äquivalenzklasse. Eine Zeichnung, die man Einbettung eines Graphen nennt, betrachtet man als Repräsentanten einer ganzen Äquivalenzklasse von Zeichnungen. Spricht man von verschiedenen Einbettungen, so ist damit stets gemeint, dass man Zeichnungen aus verschiedenen Äquivalenzklassen betrachtet. Es sei darauf hingewiesen, dass der Begriff *Einbettung* in der Literatur auch oft als Synonym für die Zeichnung eines Graphen verwendet wird.

### 2.8.1 Einbettungen auf der Sphäre

Zeichnet man einen Graphen in die Ebene, so erhält man stets eine unbeschränkte Facette, die äußere Facette genannt wird. Hat man eine beliebige Zeichnung gegeben, so kann man sie mittels der stereographischen Projektion auf die Sphäre projizieren, die Sphäre drehen, sodass eine spezielle Facette den Nordpol enthält und anschließend die Zeichnung wieder mit Hilfe der stereographischen Projektion in die Ebene projizieren. Die Facette, die den Nordpol auf der Sphäre enthält, wird auf diese Weise zur äußeren Facette. Somit kann jede Facette einer Zeichnung zur äußeren gemacht werden, ohne dabei in der Zeichnung selbst die Lagen von Kanten und Knoten zueinander oder die Reihenfolge der Kanten um die Knoten zu verändern. Siehe dazu Abbildung 2.6. Je nachdem, unter welchem Aspekt man die Zeichnungen eines Graphen betrachtet, kann es deshalb erwünscht sein, dass keiner



Facette die Sonderrolle zukommt, die äußere Facette einer Zeichnung zu sein. Gerade dann, wenn es wie in dieser Arbeit darum geht, verschiedene Graphen auf der Ebene gleich darzustellen, ist es nicht wichtig, welche Facette die äußere Facette einer Zeichnung ist.

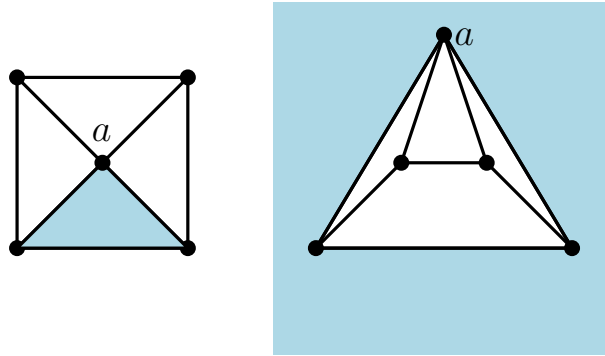


Abbildung 2.6: Die blau markierte Facette ist in der einen Zeichnung die äußere, in der anderen eine innere Facette.

Deshalb sollen in dieser Arbeit zwei Zeichnungen nicht unterschieden werden, die sich nur in ihrer äußeren Facette unterscheiden. Eine Möglichkeit, dies zu realisieren, besteht darin, die Eigenschaft zweier Zeichnungen, sich nur in der äußeren Facette zu unterscheiden, als Äquivalenzrelation zu begreifen. Eine andere Möglichkeit, den Umgang mit einer äußeren Facette zu umgehen, ist, die Zeichnungen eines Graphen nicht in der Ebene sondern auf der Sphäre zu betrachten. Denn auf der Sphäre ist jede Facette beschränkt, sodass es auf ihr keine äußere Facette geben kann. Wir werden deshalb im Folgenden Zeichnungen und damit auch Einbettungen stets auf der Sphäre betrachten. Da es allerdings einfacher ist, Zeichnungen auf Ebenen darzustellen, werden wir in Abbildungen Hin und Wider die äußere Facette einer Zeichnung berücksichtigen müssen.

### 2.8.2 Kombinatorische Einbettung

Wir verwenden zwei Äquivalenzrelationen von Zeichnungen, die häufig wie zum Beispiel auch von Jünber und Schulz [JS09] verwendet werden. Die erste Äquivalenzrelation wird dabei durch die Kantenreihenfolgen um alle Knoten in einer Zeichnung im Uhrzeigersinn beschrieben. Zwei Zeichnungen werden nach dieser Relation als äquivalent betrachtet, falls alle Reihenfolgen der Kanten um alle Knoten im Uhrzeigersinn gleich sind. Die *kombinatorische Einbettung* eines Graphen entspricht einer Äquivalenzklasse der betrachteten Relation. Sie ist also durch spezielle Reihenfolgen der Kanten um alle Knoten im Uhrzeigersinn gegeben. Siehe dazu Abbildung 2.7.

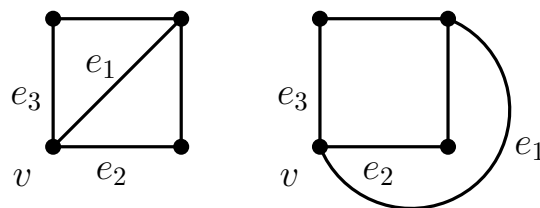


Abbildung 2.7: zwei verschiedene kombinatorische Einbettungen. Die Kantenreihenfolgen um  $v$  sind nicht gleich.

Dieser Einbettungsbegriff eignet sich gut zur Klassifizierung zusammenhängender Graphen. Denn hat man zwei Zeichnungen eines planaren Graphen gegeben, in der sich die Kantenreihenfolgen um alle Knoten nicht unterscheiden, so kann man die eine Zeichnung in die

andere überführen, ohne dabei die Kantenreihenfolgen zu verändern. Man beachte dabei, dass die Spiegelung einer Zeichnung nicht in der gleichen Äquivalenzklasse liegt, wie die ursprüngliche Zeichnung. Gespiegelte Zeichnungen werden nach diesem Einbettungsbegriff als verschieden angesehen. Siehe dazu Abbildung 2.8.

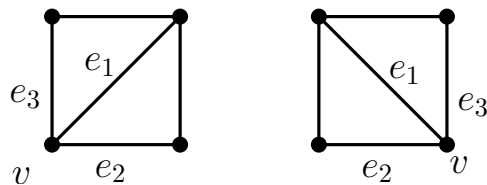


Abbildung 2.8: Durch das Spiegeln einer kombinatorischen Einbettung dreht sich die Kantenreihenfolge um jeden Knoten um.

### 2.8.3 Topologische Einbettung

Betrachtet man unzusammenhängende Graphen, so hat man es stets mit mehreren Zusammenhangskomponenten zu tun. Hat man zwei Zeichnungen eines unzusammenhängenden Graphen gegeben, die bezüglich der kombinatorischen Einbettung in der gleichen Äquivalenzklasse liegen, so müssen alle Kantenreihenfolgen um alle Knoten gleich sein. Dadurch wird jedoch nicht festgelegt, welche Lagen die Zusammenhangskomponenten zueinander haben. Es kann passieren, dass Zusammenhangskomponenten in zwei Zeichnungen in unterschiedlichen Facetten verschiedener Zusammenhangskomponenten eingebettet sind aber nach dem kombinatorischen Einbettungsbegriff trotzdem als äquivalent betrachtet werden. Siehe dazu Abbildung 2.9. Unter diesem Gesichtspunkt reicht der Begriff der kombinatorischen Einbettung für unzusammenhängende Graphen nicht aus.

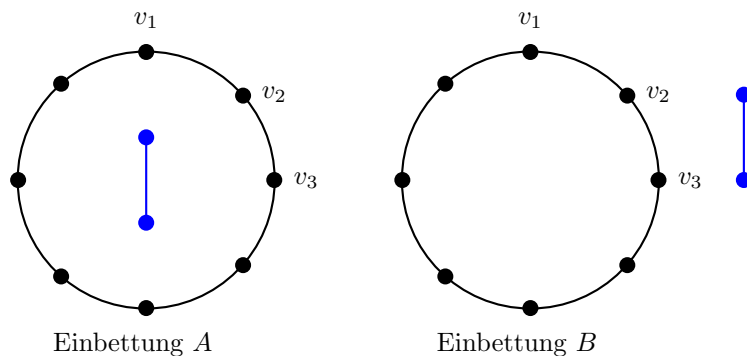


Abbildung 2.9: Alle Kantenreihenfolgen um alle Knoten in Einbettung A und B sind gleich, aber in Einbettung A und B liegt die blaue Kante auf verschiedenen Kreisseiten. Die Einbettungen sind also kombinatorisch gleich, aber nach dem Begriff der topologischen Einbettung verschieden.

Um eine Äquivalenzrelation zu definieren, die berücksichtigt, dass Zusammenhangskomponenten in verschiedenen Facetten eingebettet sein können und somit verschiedene relative Lagen zueinander haben können, müssen wir zunächst definieren, was mit relativen Lagen verschiedener Zusammenhangskomponenten gemeint ist. Dazu betrachten wir zunächst eine beliebige Zeichnung  $Z$  eines unzusammenhängenden Graphen  $G$  und eine Zusammenhangskomponente  $T$  von  $G$ . Entfernt man aus dieser Zeichnung alle Knoten und Kanten, die nicht in  $T$  enthalten sind, so erhält man eine Zeichnung von  $T$ . Diese bezeichnen wir mit  $Z|_T$ . Wir nennen die Facetten von  $Z|_T$  kurz *Facetten von  $T$*  und geben, falls nötig, die betrachtete Zeichnung des Graphen zusätzlich an.

Wir können die Zeichnung  $Z$  von  $G$  aus der Zeichnung von  $T$  wiedergewinnen, indem wir nach und nach die Zusammenhangskomponenten wieder einfügen. Dabei fügen wir die Zusammenhangskomponenten stets in eine Facette der Zeichnung  $Z|_T$  ein. Für jede Zusammenhangskomponente gibt es also eine Facette von  $Z|_T$ , in der die Zusammenhangskomponente enthalten ist. Betrachten wir die Facetten der ursprünglichen Zeichnung  $Z$ , so sind diese Facetten entweder schon in der Zeichnung  $Z|_T$  enthalten, oder sie sind durch das Hinzufügen der Zusammenhangskomponenten entstanden. Durch das Einfügen der Zusammenhangskomponenten werden also auch die Facetten der ursprünglichen Zeichnung  $Z$  nach und nach zur Zeichnung  $Z|_T$  hinzugefügt, sofern sie nicht ohnehin von Anfang an in ihr enthalten sind.

Auf diese Weise können wir eine Abbildung von der Menge der Zusammenhangskomponenten und der Facetten der Zeichnung  $Z$  in die Menge der Facetten von  $Z|_T$  definieren. Jede Facette von  $Z$ , ordnen wir sich selbst zu, falls sie in  $Z|_T$  enthalten ist. Ist sie in der Eingeschränkten Zeichnung nicht enthalten, so ordnen wir sie derjenigen Facette von  $Z|_T$  zu, in die sie eingefügt werden muss, um aus der Zeichnung  $Z|_T$  die Zeichnung  $Z$  wieder zu gewinnen. Auch jede Zusammenhangskomponente ordnen wir derjenigen Facette von  $Z|_T$  zu, in die sie eingefügt werden muss, um aus der Zeichnung  $Z|_T$  die Zeichnung  $Z$  wieder zu gewinnen. Die Zusammenhangskomponente  $T$  selbst wird auf eine beliebigen Facette abgebildet. Betrachtet man die Zeichnung in der Ebene, so kann diese Facette als äußere Facette gewählt werden. In einer derartigen Zeichnung ist die Zusammenhangskomponente ganz in dieser äußeren Facette enthalten.

Weisen wir den Facetten und Zusammenhangskomponenten aus der Zeichnung  $Z$  auf die beschriebene Weise je eine Facette der Zeichnung  $Z|_T$  zu, so sagen wir dazu, dass wir *die Zeichnung  $Z$  aus der Perspektive von  $T$  betrachten*. Betrachten wir eine Facette  $f$  von  $Z$  aus der Perspektive von  $T$ , sodass wir  $f$  einer Facette  $f'$  der Zeichnung  $Z|_T$  zuordnen, so nennen wir  $f'$  *eine  $f$  enthaltende Facette von  $T$*  und sagen, dass  $f$  *in der Facette  $f'$  von  $T$  enthalten ist*.

Nun können wir Relative Lagen zwischen Zusammenhangskomponenten definieren. Dabei sei die *Relative Lage einer Zusammenhangskomponente  $T_1$  bezüglich einer Zusammenhangskomponente  $T_2$*  durch die Facette  $f$  von  $T_2$  gegeben, wenn  $T_1$  aus der Perspektive von  $T_2$  betrachtet in der Facette  $f$  von  $T_2$  eingebettet ist. Siehe dazu 2.10.

Betrachten wir zwei Zusammenhangskomponenten in der Zeichnung  $Z$ , die an eine gemeinsame Facette  $f$  grenzen, so sagen wir dazu, sich diese Zusammenhangskomponenten die Facette  $f$  teilen.

Mit diesen Begriffen sind wir nun in der Lage, die *topologische Einbettung* eines Graphen zu definieren, wie sie in ähnlicher Weise von Michael Jünger and Michael Schulz [JS09] verwendet wird. Dazu wird für eine Zeichnung eines Graphen  $G$  ein zugehöriger Hilfsgraph konstruiert. Siehe dazu Abbildung 2.11. Dieser Hilfsgraph besitzt als Knotenmenge die Zusammenhangskomponenten des Graphen, sowie die Facettenmenge der betrachteten Zeichnung. Weiter erhält man alle Kanten des Hilfsgraphen, indem man eine Facette und eine Zusammenhangskomponente genau dann miteinander verbindet, wenn sie in der Zeichnung aneinander grenzen. Jede Kante verbindet also eine Zusammenhangskomponente und eine Facette miteinander. Für jede Kante betrachten wir nun die Zusammenhangskomponente  $T$  und die Facette  $f$ , die sie miteinander verbindet und beschriften sie mit der  $f$  enthaltenden Facette von  $T$ .

Der so konstruierte Hilfsgraph entspricht stets einem Baum. Daher bezeichnen wir ihn hier stets als *topologischen Baum*. Er legt eine Äquivalenzrelation für die Zeichnungen eines Graphen fest. Dabei werden bezüglich dieser Relation zwei Zeichnungen als äquivalent betrachtet, wenn sie den gleichen topologischen Baum besitzen.

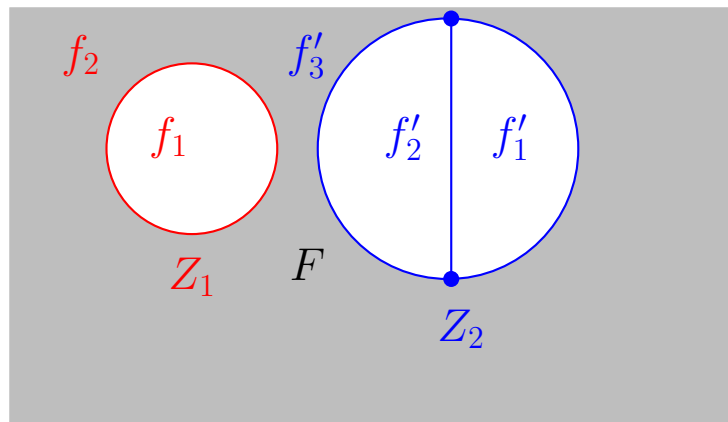


Abbildung 2.10: Betrachten wir die Zeichnung aus der Perspektive von  $Z_1$ , so erhalten wir die Facetten  $f_1$  und  $f_2$ . Aus der Perspektive von  $Z_2$  betrachtet erhalten wir die Facetten  $f'_1, f'_2$  und  $f'_3$ . Die Facetten  $f_2$  und  $f'_3$  sind  $F$  enthaltende Facetten bezüglich  $Z_1$  beziehungsweise  $Z_2$ . Sie teilen sich die Facette  $F$ . Die relative Lage von  $Z_1$  bezüglich  $Z_2$  ist die Facette  $f'_3$ . Die relative Lage von  $Z_2$  bezüglich  $Z_1$  ist die Facette  $f_2$ .

Es sei  $G$  ein Graph mit Zusammenhangskomponente  $T$ ,  $Z$  eine Zeichnung von  $G$  und  $F$  eine Facette von  $Z$ . Um zu erläutern, was der topologische Baum für Informationen enthält, betrachten wir zunächst eine Facette  $F$ , die im topologischen Baum als Knoten enthalten ist. Diese ist mit den angrenzenden Zusammenhangskomponenten verbunden. Die adjazenten Knoten einer Facette im topologischen Baum sind gerade diejenigen Zusammenhangskomponenten, die sich die Facette  $F$  in der Zeichnung  $Z$  teilen. Dabei ist die Facette  $F$  in je einer Facette der angrenzenden Zusammenhangskomponenten enthalten. Grenzt eine Facette an eine einzige Zusammenhangskomponente  $T$  an, so bedeutet dies, dass diese Facette in  $Z|_T$  und  $Z$  zugleich enthalten ist.

Als nächstes betrachten wir eine Zusammenhangskomponente  $T$ , die im topologischen Baum als Knoten enthalten ist. Zunächst ist  $T$  mit allen Facetten von  $Z$  verbunden, an die  $T$  angrenzt. Zusätzlich haben wir für jede dieser Facetten  $F$  die  $F$  enthaltende Facette von  $T$  als Kantenbeschriftung gegeben. Entfernen wir den Knoten  $T$  aus dem Topologischen Baum, so erhalten wir Teilbäume, die jeweils eine angrenzende Facette von  $T$  als Knoten enthalten. Jede Zusammenhangskomponente und jede Facette, die in einem dieser Teilbäume als Knoten enthalten sind, sind dabei aus der Perspektive von  $T$  aus betrachtet in genau einer Facette von  $T$  enthalten. Dies ist nach Konstruktion des topologischen Baumes gerade diejenige Facette, mit der die Kante beschriftet ist, die den Teilbaum mit dem Knoten  $T$  verbindet. Vom topologischen Baum lässt sich also für jede Facette und jede Zusammenhangskomponente der Zeichnung ablesen, in welcher Facette sie aus der Perspektive einer beliebig gewählten Zusammenhangskomponente enthalten sind. Siehe dazu Abbildung 2.12.

Betrachtet man zwei Zusammenhangskomponenten des Graphen, so lässt sich vom topologischen Baum die relative Lage der einen Zusammenhangskomponenten bezüglich der anderen folgendermaßen ablesen. Wollen wir die relative Lage einer Zusammenhangskomponente  $T_2$  bezüglich der Zusammenhangskomponente  $T_1$  bestimmen, so betrachten wir den Pfad, über den die beiden Zusammenhangskomponenten miteinander verbunden sind. Da es sich beim topologischen Baum um einen Baum handelt, ist dieser Pfad eindeutig. Entfernen wir  $T_1$  aus dem Graphen, so ist der Pfad, mit Ausnahme des entfernten Knotens, vollständig in einem der durch das Entfernen entstandenen Teilbäume enthalten. Alle Facetten und Zusammenhangskomponenten, die in diesem Teilbaum als Knoten enthalten sind, sind

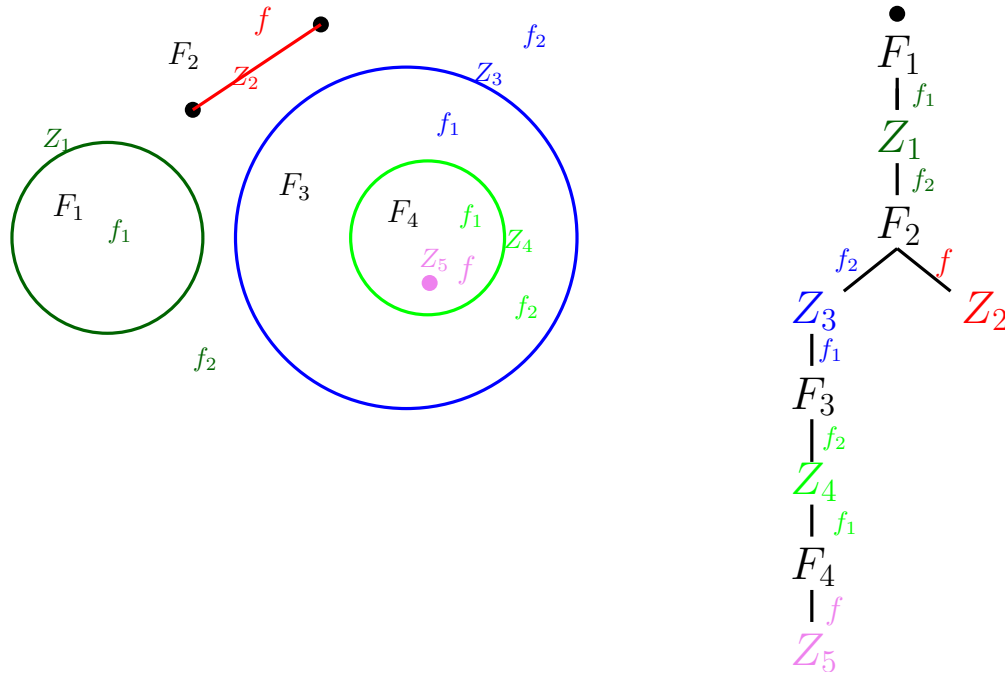


Abbildung 2.11: Rechts ist der zur Zeichnung links gehörige topologische Baum abgebildet. Dabei stehen die Buschtaben  $F_1, \dots, F_4$  für die Facetten der Zeichnung, während die farbigen kleinen Buchstaben  $f$  für die Facetten stehen, die man erhält, wenn man die Zeichnung aus der Perspektive der entsprechenden Zusammenhangskomponente betrachtet.

dabei in einer Facette von  $T_1$  eingebettet. Dies gilt auch für die Knoten des Pfades und deshalb auch für  $T_2$ . Somit gibt die Beschriftung der ersten Kante auf dem Pfad von  $T_1$  zu  $T_2$  die Relative Lage von  $T_2$  bezüglich  $T_1$  an. Siehe dazu Abbildung 2.11

Ein gegebener topologischer Baum legt also die relativen Lagen von Zusammenhangskomponenten fest. Umgekehrt wird in Kapitel 4.2 gezeigt, dass gegebene relative Lagen zwischen je zwei Zusammenhangskomponenten durch höchstens einen topologischen Baum realisiert werden. Dies macht deutlich, dass die Menge der zu einem Graphen gehörenden topologische Bäume alle verschiedenen Lagen von Zusammenhangskomponenten zueinander beschreibt, die möglich sind. Daher sind wir nun in der Lage, zwei Zeichnungen mittels ihrer topologischen Bäume als verschieden anzusehen, wenn die Zusammenhangskomponenten verschiedene Lagen zueinander besitzen.

Im Folgenden vergleichen wir daher Zeichnungen hinsichtlich ihrer kombinatorischen Einbettungen und ihrer zugehörigen topologischen Bäume und definieren dabei wie in [JS09] die *topologische Einbettung* eines Graphen durch die kombinatorischen Einbettungen der einzelnen Zusammenhangskomponenten des Graphen und durch einen topologischen Baum. Jede topologische Einbettung eines Graphen entspricht dabei wieder einer Äquivalenzklasse. Dabei betrachten wir die erweiterte Äquivalenzrelation, nach der zwei Zeichnungen als äquivalent gelten, wenn sie die gleichen Kantenreihenfolgen um ihre Knoten aufweisen und zusätzlich den gleichen topologischen Baum besitzen. Es sei angemerkt, dass jeder zusammenhängende Graph stets nur einen einzigen zugehörigen topologischen Baum besitzt. Deshalb liefert der topologische Baum für zusammenhängende Graphen keine neue Information. Deshalb entspricht in diesem Fall die kombinatorische Einbettung der topologischen Einbettung eines Graphen.

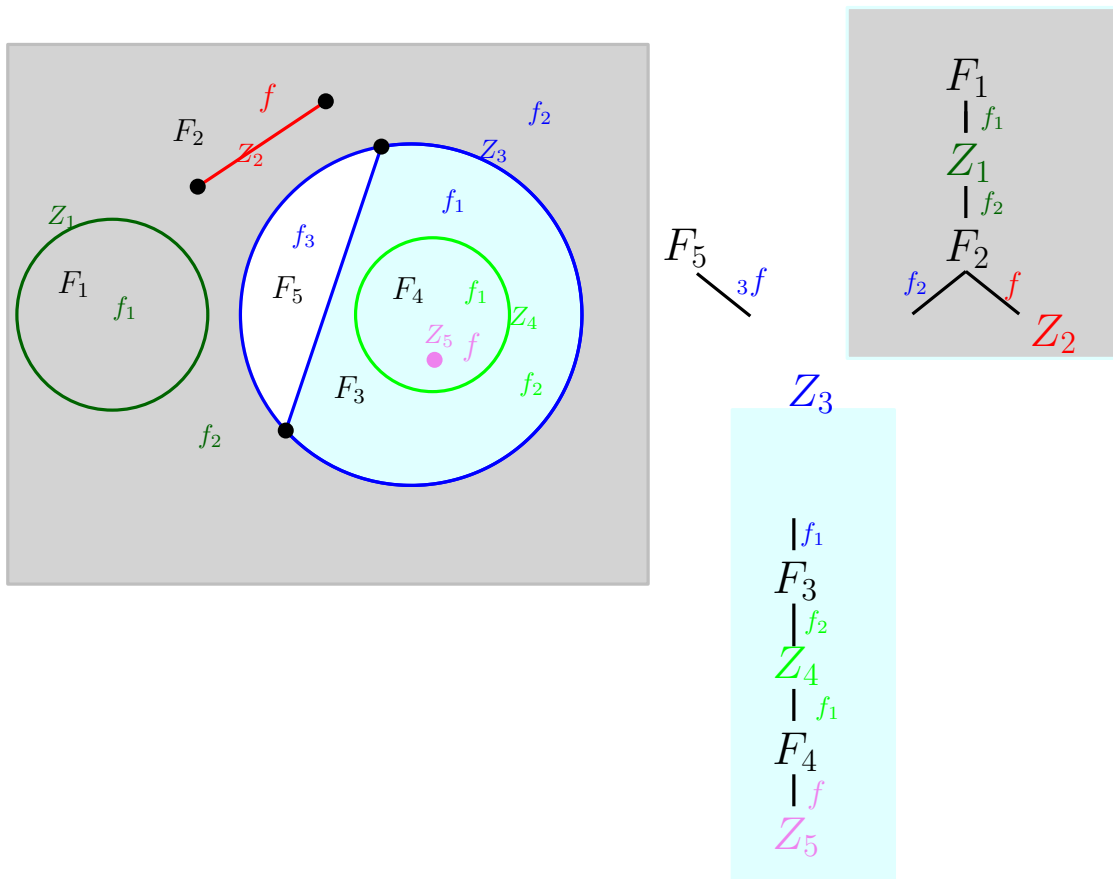


Abbildung 2.12: die weiße, graue und hellgrüne Facette sind die Facetten, die man erhält, wenn man die Zeichnung aus der Perspektive von  $Z_2$  betrachtet. Man sieht, dass die drei Teilbäume in der Zeichnung rechts jeweils einer Facette zugeordnet sind.

## 2.9 Simultanes Einbetten als Einbettungsproblem

Wir kommen auf das Problem zurück, um das es in dieser Bachelorarbeit geht. Für zwei Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit Schnittgraphen  $G_\cap = G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$  besteht das Problem *Simultanes Einbetten mit festen Kanten (SEFE)* darin, zu entscheiden, ob es eine planare Zeichnung von  $G_1$  und eine planare Zeichnung von  $G_2$  gibt, sodass der Schnittgraph  $G_\cap$  in beiden Zeichnungen gleich gezeichnet ist.

Hat man die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  gegeben und möchte Zeichnungen finden, sodass der Schnittgraph in beiden Zeichnungen gleich dargestellt wird, ergibt sich das Problem, dass es nicht einfach ist, mit Zeichnungen zu hantieren. Beispielsweise gelten zwei Zeichnungen des Schnittgraphen schon dann als verschieden, wenn sie sich nur in einer Kleinigkeit wie einem kleinen Bogen in einer Kante unterscheiden. Es ist aber offensichtlich, dass man solche Kleinigkeiten oft leicht berichtigen kann, sodass die Zeichnungen zu solchen werden, in denen der Schnittgraph tatsächlich gleich dargestellt ist.

Es drängt sich auf, dass man Zeichnungen so klassifizieren möchte, dass zwei Zeichnungen als äquivalent gelten, wenn man sie so ineinander überführen kann, dass sich keine wesentlichen Eigenschaften der Zeichnung verändern. Man sucht also einen passenden Einbettungsbegriff. Jünger and Schulz [JS09] haben gezeigt, dass der gesuchte Einbettungsbegriff der topologischen Einbettung entspricht. Denn das Problem SEFE ist zu folgendem Einbettungsproblem äquivalent. Dieser entspricht dabei der topologischen Einbettung.

Das *Einbettungsproblem SEFE* ist dadurch gegeben, dass für zwei planare Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit Schnittgraphen  $G_\cap$  entschieden werden soll, ob zwei topologische Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  der Graphen  $G_1$  beziehungsweise  $G_2$  existieren, sodass die induzierten Einbettungen  $\mathcal{E}_1|_{G_\cap}$  und  $\mathcal{E}_2|_{G_\cap}$  gleich sind.

Dabei erhält man für einen Graphen  $G$  die durch eine topologische Einbettung  $\mathcal{E}$  induzierte topologische Einbettung des Teilgraphen  $T$  dadurch, dass man aus einer die Einbettung  $\mathcal{E}$  repräsentierenden Zeichnung alle Kanten und Knoten entfernt, die nicht in  $T$  enthalten sind. Die entstandene Zeichnung  $Z$  ist dann ein Repräsentant der Einbettung von  $\mathcal{E}|_T$ . Die Kantenreihenfolgen um die Knoten in dieser Zeichnung und der zur Zeichnung gehörige topologische Baum bilden die durch  $\mathcal{E}$  induzierte topologische Einbettung von  $T$ .

Die Äquivalenz zum beschriebenen Einbettungsproblem vereinfacht den Umgang mit dem Problem SEFE stark, da wir Zeichnungen nur noch hinsichtlich ihrer topologischen Einbettungen untersuchen müssen. Im Folgenden betrachten wir daher SEFE stets als Einbettungsproblem. Sprechen wir von Einbettungen, so ist für zusammenhängende Graphen stets die kombinatorische Einbettung gemeint und für unzusammenhängende Graphen stets die topologische Einbettung. Zwei Einbettungen  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$ , die das Problem SEFE für zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  lösen, bezeichnen wir als *simultane Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$* . Wir schreiben eine simultane Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$ , die durch  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  gegeben ist, als Einbettungspaar  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$ .





### 3. Existenz simultaner Einbettungen bei zweifach zusammenhängendem Schnitt

In diesem Kapitel betrachten wir außenplanare Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit gemeinsamem Schnitt  $G_\cap = (V, E) = G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ . Mit Hilfe der Eigenschaften zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen werden wir zeigen, dass solche Graphen immer simultane Einbettungen besitzen.

Bevor wir mit der Untersuchung zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen beginnen, sei noch daran erinnert, dass das beschriebene Problem SEFE zum Einbettungsproblem äquivalent ist, bei dem man untersucht, ob zwei Graphen so eingebettet werden können, dass ihr Schnittgraph gleich eingebettet ist. Dabei wird der Begriff der topologischen Einbettung verwendet, der im Grundlagenkapitel 2.8.3 eingeführt wurde. Dieser ist für zusammenhängende Graphen mit dem Begriff der kombinatorischen Einbettung äquivalent. Siehe dazu 2.8.2. Ist ein Graph zusammenhängend, betrachten wir also zwei Zeichnungen als äquivalent, wenn die Reihenfolgen der Kanten um alle Knoten gleich sind. Wir werden zunächst stets mit der kombinatorischen Einbettung arbeiten.

#### 3.1 Eigenschaften zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen

**Lemma 3.1.** *Jeder außenplanare zweifach zusammenhängende Graph enthält genau einen Hamiltonkreis.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender außenplanarer Graph. Dann liegen in einer außenplanaren Einbettung alle Knoten an einer Facette an. Da  $G$  zweifach zusammenhängend ist, kann nur ein Kreis  $K$  diese Facette begrenzen. Somit bildet  $K$  einen Hamiltonkreis von  $G$ . Besteht  $G$  nur aus diesem Kreis, sind wir fertig.

Zu zeigen bleibt, dass es auch sonst keinen weiteren Hamiltonkreis in  $G$  gibt. Wir nehmen an, dass  $K'$  ein weiterer Hamiltonkreis in  $G$  ist. Dann muss  $K'$  mindestens eine Kante  $e = (a, b)$  enthalten, die nicht in  $K$  enthalten ist. Die Knoten  $a$  und  $b$  dürfen also auf  $K$  nicht adjazent sein, müssen jedoch in  $K$  enthalten sein, da  $K$  ein Hamiltonkreis ist. Somit muss  $K$  der Vereinigung zweier disjunkter Pfade  $P_1$  und  $P_2$  von  $a$  nach  $b$  entsprechen, die jeweils mindestens einen weiteren Knoten außer  $a$  und  $b$  enthalten müssen. Alle Knoten auf  $P_1$  und  $P_2$  müssen dabei auch im zweiten Hamiltonkreis  $K'$  enthalten sein. Damit müssen

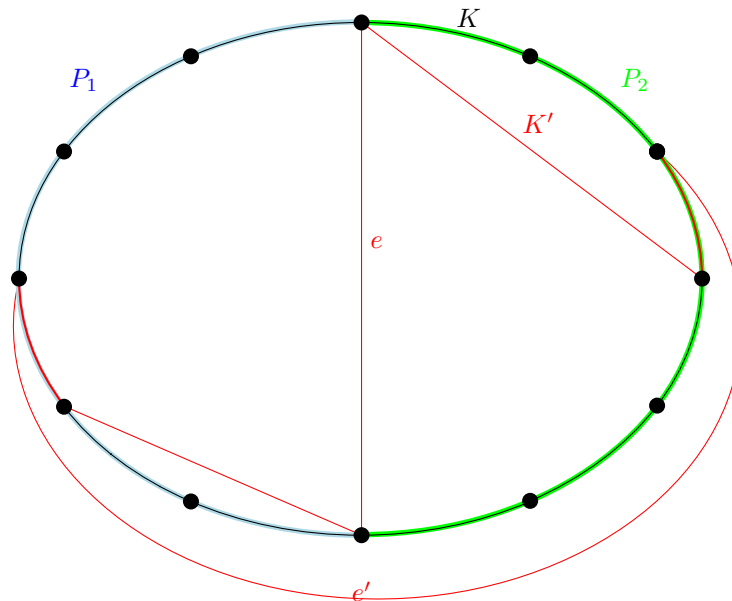


Abbildung 3.1: Der Kreis  $K$  bildet zusammen mit der Kante  $e$  und  $e'$  einen  $K_4$

die Knoten auf  $P_1$  und  $P_2$  auch in  $K'$  durch je zwei disjunkte Pfade miteinander verbunden sein.

Der eine dieser Pfade enthält dabei nach Voraussetzung stets die Kante  $e$ . Der andere Pfad darf die Kante  $e$  nicht enthalten, soll aber zwei Knoten aus den beiden Pfaden miteinander verbinden. Deshalb muss es außer der Kante  $e$  noch eine weitere Kante  $e'$  mit Endknoten auf  $P_1$  und  $P_2$  geben. Siehe dazu Abbildung 3.1.

Dann bildet aber der Hamiltonkreis  $K$  zusammen mit der Kante  $(a, b)$  und der Kante  $e'$  eine Unterteilung des  $K_4$ . Dies ist ein Widerspruch, denn der Graph  $K_4$  ist nicht außenplanar und kann somit nicht als Unterteilung in einem außenplanaren Graphen enthalten sein.  $\square$

Dieses Lemma zeigt, dass jeder zweifach zusammenhängende außenplanare Graph eine sehr klare Struktur hat. Denn dadurch, dass ein derartiger Graph immer einen eindeutigen Hamiltonkreis hat, liegen die Endknoten jeder Kante auf diesem Kreis. Jede Kante ist also entweder im Hamiltonkreis enthalten oder eine Sehne dieses Kreises. Ein zweifach zusammenhängender Graph lässt sich also durch seinen zugehörigen Hamiltonkreis und dessen Sehnen vollständig beschreiben. Betrachten wir im Folgenden einen zweifach zusammenhängenden Graphen, so können wir deshalb stets von seinem Hamiltonkreis und dessen Sehnen sprechen.

Auch die Sehnen weisen eine gewisse Struktur auf. Um diese zu beschreiben, betrachten wir zwei Sehnen eines beliebigen Kreises. Traversiert man den Kreis, so erhält man eine induzierte Folge der vier zu den Sehnen gehörenden Endknoten. Falls in dieser Knotenfolge immer Knoten verschiedener Kanten aufeinander folgen, nennen wir die Knoten dieser beiden Sehnen *alternierend*.

**Lemma 3.2.** *In einem außenplanaren Graphen besitzen keine zwei zu einem Kreis gehörige Sehnen alternierende Endknoten.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein außenplanarer Graph und  $K$  ein einfacher Kreis in  $G$ . Wir nehmen an, dass es zwei Sehnen  $(a, b)$  und  $(c, d)$  mit alternierenden Endknoten gibt. Das bedeutet, dass sich beim Traversieren des Kreises eine induzierte Knotenreihenfolge ergibt, in denen sich die Knoten verschiedener Sehnen abwechseln.

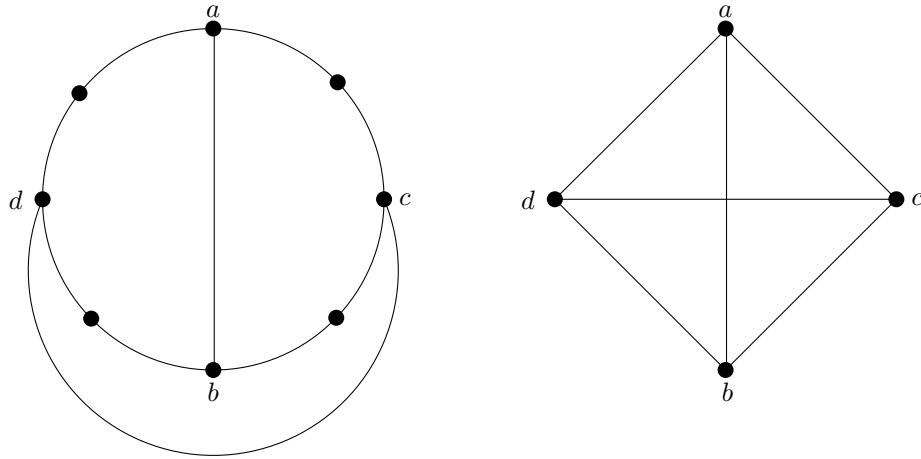


Abbildung 3.2: die Pfade zwischen den Knoten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  bilden zusammen mit den beiden Kreissehnen eine Unterteilung des  $K_4$  rechts im Bild

Dann bilden die vier Pfade zwischen je zwei dieser Knoten auf dem Kreis  $K$  zusammen mit den Kanten  $(a, b)$  und  $(c, d)$  eine Unterteilung des  $K_4$ . Siehe dazu Abbildung 3.2. Dies führt aber zum Widerspruch, da der Graph  $K_4$  nicht außenplanar ist, und somit in  $G$  nicht als Unterteilung enthalten sein kann.  $\square$

Dieses Lemma schränkt die möglichen Lagen der Sehnen zueinander stark ein. Es gibt sogar durch dieses Lemma eine Möglichkeit, die verschiedenen Einbettungen einer Sehne vollständig zu beschreiben. Dies wird im nächsten darauf aufbauenden Lemma herausgestellt. Da wir dabei die Lagen der Sehnen bezüglich des zugehörigen Hamiltonkreises betrachten, benötigen wir zuvor eine Definition, die die Lage von Kreisen und Kanten zueinander beschreibt.

Dafür ist es notwendig, dass man von einer rechten und linken Seite eines Kreises sprechen kann. Deshalb legen wir für jeden Kreis eine beliebige Orientierung fest. Dann bezeichnet die rechte Seite beziehungsweise die linke Seite des Kreises den Bereich, der rechter Hand beziehungsweise linker Hand des Kreises liegt, wenn man ihn nach der gewählten Orientierung durchläuft. Im Folgenden werde ein beliebiger, einfacher Kreis stets mit  $K$  bezeichnet. Weiter betrachten wir jeden einfachen Kreis als Kreis mit einer fest gewählten, aber beliebigen zugehörigen Orientierung. Bezüglich dieser Orientierung ist es möglich, Kanten und Knoten Lagen bezüglich eines Kreises zuzuordnen. Ähnlich wie Thomas Bläsius and Ignaz Rutter [BR13a] beschreiben wir die Lage einer Kante beziehungsweise eines Knotens  $x$  bezüglich eines Kreises in einer Einbettung  $\mathcal{E}$  durch:

$$\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(x) := \begin{cases} \text{rechts,} & \text{falls } x \text{ rechterhand von } K \text{ eingebettet ist} \\ \text{links,} & \text{falls } x \text{ linkerhand von } K \text{ eingebettet ist} \end{cases} \quad (3.1)$$

Falls klar ist, von welcher Einbettung oder von welchem Kreis die Rede ist, werden der Index  $\mathcal{E}$  beziehungsweise  $k$  weggelassen.

Diese Definition ist sehr hilfreich bei der Betrachtung von Einbettungen, und wir werden sie immer wieder verwenden. Nun zeigt das nächste Lemma, welche Einbettungsmöglichkeiten eine Sehnen in einem zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen besitzt.

**Lemma 3.3.** *Es sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender außenplanarer Graph. Die Endknoten jeder Sehne  $e$  des Hamiltonkreises von  $G$  liegen in  $G - e$  an genau zwei gemeinsamen Facetten an. Eine der Facetten liegt rechts und eine links des Kreises.*

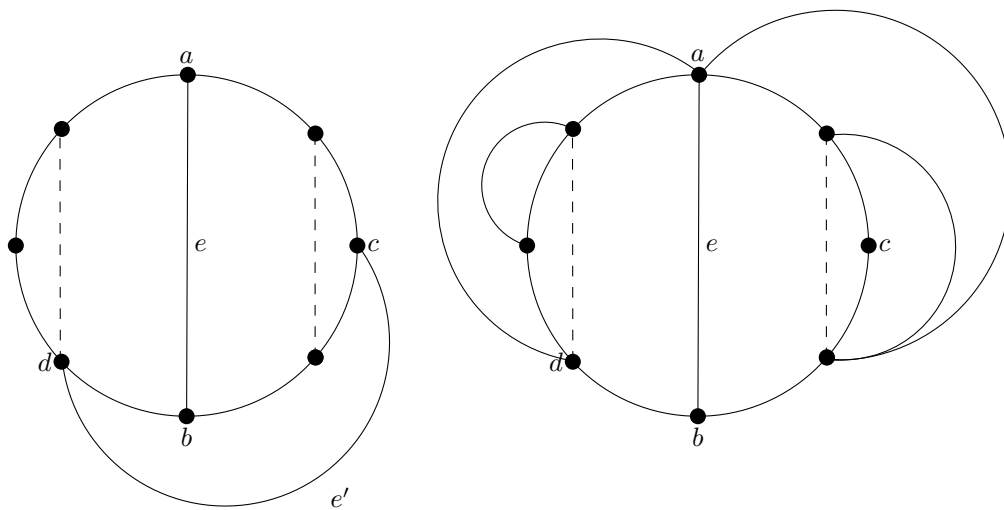


Abbildung 3.3: links:  $e$  und  $e'$  sind alternierend;  
rechts:  $a$  und  $b$  liegen an einer Facette an.

*Beweis.* Es sei  $K$  der Hamiltonkreis von  $G$  und  $\mathcal{E}$  eine beliebige planare Einbettung des Graphen. Weiter sei  $e = (a, b)$  eine Sehne von  $K$ . Zunächst zeigen wir, dass die Knoten  $a$  und  $b$  in  $G - e$  auf jeder Kreisseite von  $K$  an mindestens eine gemeinsame Facette grenzen und anschließend, dass es nicht mehr als zwei gemeinsame Facetten geben kann. Siehe dazu Abbildung 3.3

Es sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $e$  rechts von  $K$  eingebettet. In der durch  $\mathcal{E}$  induzierten Einbettung von  $G - e$  muss dann die Kante  $e$  wieder in eine Facette rechts von  $K$  einbettbar sein. Diese Facette muss deshalb in  $G - e$  an beide Knoten  $a$  und  $b$  angrenzen. Wir betrachten die andere Kreisseite von  $K$  und zeigen, dass auch hier mindestens eine Facette an  $a$  und  $b$  angrenzt. Da  $G$  nur aus  $K$  und Sehnen von  $K$  besteht, ist links von  $K$  entweder nichts eingebettet, oder Sehnen von  $K$ . Ist nichts eingebettet, bildet  $K$  die Grenze einer Facette, die  $a$  und  $b$  enthält. Interessant ist also nur der Fall, in dem links von  $K$  mindestens eine Sehne eingebettet ist. Wir betrachten die beiden Pfade, die  $a$  und  $b$  auf  $K$  miteinander verbinden. Dann befinden sich die Endknoten einer Sehne  $e'$  stets beide im selben Pfad. Denn lägen sie in verschiedenen Pfaden, so wären die Endknoten von  $e'$  und  $e$  auf  $K$  alternierend, was nach Lemma 3.2 nicht zulässig ist.

Nun lassen sich die beiden Pfade zusammen mit den angrenzenden Sehnen zu jeweils einer Kante kontrahieren. Im so kontrahierten Graph liegen in der durch  $\mathcal{E}$  induzierten Einbettung  $a$  und  $b$  an einer gemeinsamen Facette an. Deshalb müssen sie auch im nicht kontrahierten Graphen an einer gemeinsamen Facette angrenzen.

Nun zeigen wir, dass es nicht mehr als zwei gemeinsame Facetten geben kann, an die  $a$  und  $b$  in  $G - e$  grenzen: Wir nehmen an, dass  $a$  und  $b$  an drei gemeinsame Facetten grenzen. Der Rand jeder dieser Facetten wird durch einen einfachen Kreis gebildet, der  $a$  und  $b$  enthält. Dabei können je zwei dieser Kreise nicht gleich sein. Deshalb finden wir auf jedem der Kreise einen Knoten  $c, d$  beziehungsweise  $h$ , die voneinander verschieden sind und nicht mit  $a$  und  $b$  übereinstimmen. Dann gibt es in jedem dieser Kreise zwei Pfade, die die Knoten  $a$  und  $b$  jeweils mit dem Knoten  $c, d$  beziehungsweise  $h$  verbinden. Diese sechs Pfade bilden zusammen eine Unterteilung des Graphen  $K_{2,3}$ . Der Graph  $K_{2,3}$  ist aber nicht außenplanar, und somit kann  $G$  ihn nicht als Unterteilung enthalten.  $\square$

Möchte man einen zweifach zusammenhängenden Graphen einbetten, so kann man zunächst den Hamiltonkreis einbetten und nach und nach die Sehnen des Hamiltonkreises hinzufügen. Dann gibt es auf einer Kreisseite immer genau eine Einbettungsmöglichkeit einer Sehne, da

man sie nur innerhalb der entsprechenden an die Endknoten grenzenden Facette einbetten kann. Somit kann man jede Sehne immer nur auf zwei verschiedene Weisen einbetten.

### 3.2 Existenz simultaner Einbettungen

Im Folgenden seien  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  zwei außenplanare Graphen mit gemeinsamem Schnitt  $G_\cap = (V, E) = G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ . Mit den beschriebenen Eigenschaften zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen können wir nun zeigen, dass zwei außenplanare Graphen, deren Schnittgraph zweifach zusammenhängend sind, immer eine simultane Einbettung besitzen.

**Lemma 3.4.** *Es gibt höchstens zwei außenplanare Einbettungen eines zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen. Dabei entspricht die eine Einbettung der Spiegelung der anderen.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender außenplanarer Graph. Dann besteht  $G$  aus seinem nach Lemma 3.1 eindeutig bestimmten Hamiltonkreis  $K$  und dessen Sehnen. Hat  $K$  keine Sehnen, entspricht  $G$  einem einfachen Kreis und wir sind fertig, denn Kreise besitzen auf der Sphäre genau eine Einbettung, die dann auch ihrer Spiegelung entspricht.

Im folgenden besitze  $K$  mindestens eine Sehne. Weil in jeder außenplanaren Einbettung der Kreis  $K$  den Rand einer Facette bilden muss, lässt sich jede außenplanare Einbettung als Einbettung beschreiben, in der alle Sehnen von  $K$  auf einer Kreisseite liegen. Um eine außenplanare Einbettung von  $G$  zu erhalten, betten wir zunächst  $K$  ein. Dabei gibt es, wie schon beschrieben, keine Einbettungswahl. Anschließend betten wir nach und nach die Sehnen von  $K$  ein. Da wir dabei stets zweifach zusammenhängende, außenplanare Graphen erhalten, lässt sich jedes Mal das Lemma 3.3 anwenden.

Nach diesem Lemma gibt es für die erste Sehne genau zwei Facetten, in die sie eingebettet werden kann. Eine davon liegt links, die andere rechts von  $k$ . Alle anderen Sehnen müssen auf der gleichen Kreisseite wie diese erste Sehne eingebettet werden. Dann folgt wiederum aus dem Lemma, dass es für keine von ihnen eine Einbettungswahl gibt.

Falls  $K$  mindestens eine Sehne besitzt, ergeben sich also genau zwei Einbettungsmöglichkeiten von  $G$ . Da in diesem Fall gespiegelte Einbettungen von  $G$  nicht gleich sind, muss die eine Einbettung die gespiegelte Einbettung der anderen sein.  $\square$

**Korollar 3.5.** *Zwei außenplanare Graphen mit zweifach zusammenhängendem Schnitt besitzen immer eine simultane Einbettung.*

*Beweis.* Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei außenplanare Graphen und  $G = G_1 \cap G_2$  zweifach zusammenhängend. Weiter sei  $\mathcal{E}_1$  eine außenplanare Einbettung von  $G_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  eine außenplanare Einbettung von  $G_2$  und  $\tilde{\mathcal{E}}_2$  die Spiegelung von  $\mathcal{E}_2$ . Da  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  außenplanare Einbettungen sind, sind auch  $\mathcal{E}_1|_G$  und  $\mathcal{E}_2|_G$  außenplanare Einbettungen. Da  $G$  zusätzlich als zweifach zusammenhängend vorausgesetzt ist, folgt aus Lemma 3.4, dass es höchstens zwei außenplanare Einbettungsmöglichkeiten von  $G$  gibt, wobei eine davon der Spiegelung der anderen entspricht. Das heißt, es gilt:

$$\mathcal{E}_1|_G = \mathcal{E}_2|_G \text{ oder } \mathcal{E}_1|_G = \tilde{\mathcal{E}}_2|_G$$

Somit haben wir eine simultane Einbettung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  gefunden. Siehe dazu das Beispiel in Abbildung 3.4.  $\square$

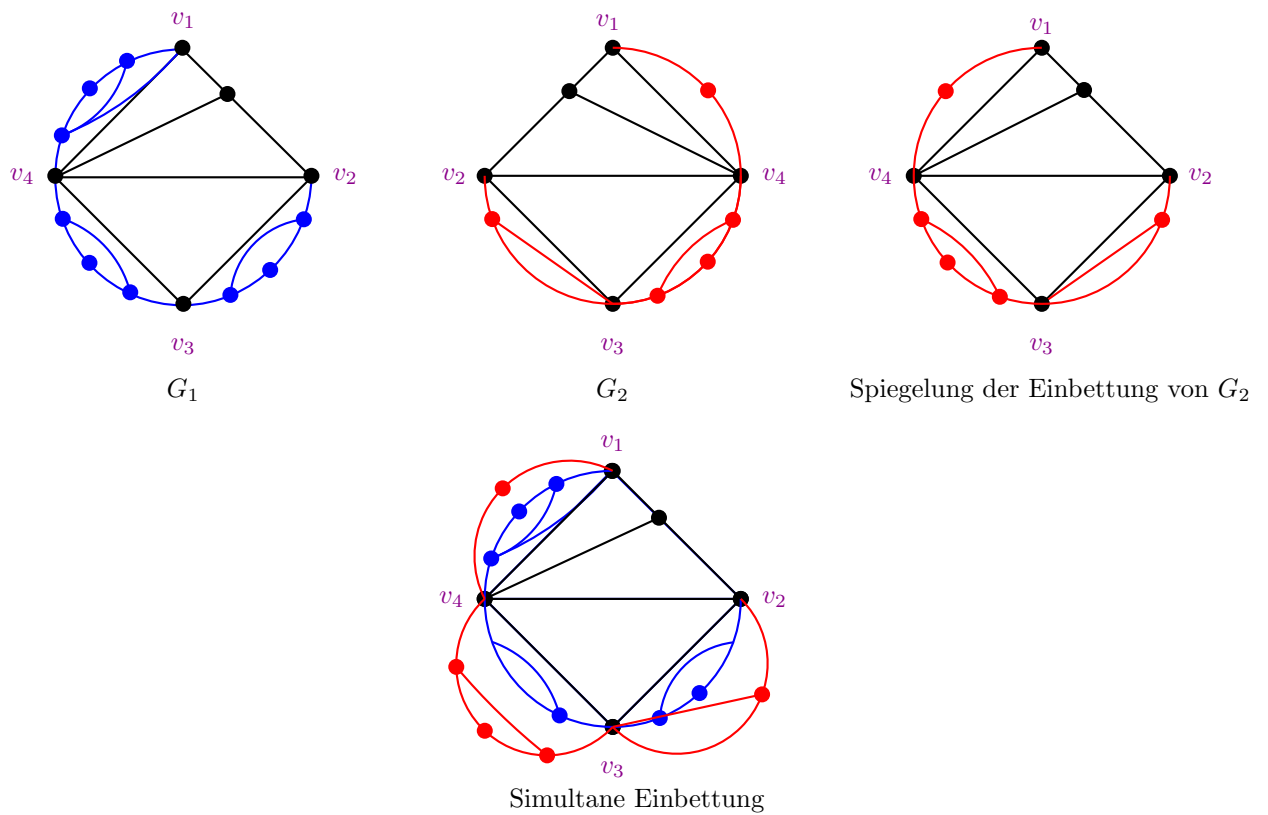


Abbildung 3.4: In der außenplanaren Einbettung von  $G_1$  links oben und in der gespiegelten außenplanaren Einbettung von  $G_2$  rechts oben ist der gemeinsame schwarz eingezeichnete Graph gleich eingebettet.

## 4. Algorithmen für zweifach zusammenhängende Graphen

Im Folgenden soll der gemeinsame Graph  $G_\cap$  der außenplanaren Graphen  $G_1$  und  $G_2$  nicht mehr als zweifach zusammenhängend vorausgesetzt werden. Dass es hier nicht immer eine simultane Einbettung von  $G_\cap$  gibt, zeigt das Beispiel aus Abbildung 4.1.

Um dort eine simultane Einbettung zu erhalten, müssen wir zwei planare Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  finden, in denen der gemeinsame Graph  $G_\cap$  gleich eingebettet ist. Darstellbar ist das durch eine gemeinsame Zeichnung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ , für die gilt, dass sich keine zwei Kanten desselben Graphen kreuzen, und zusätzlich der gemeinsame Graph  $G_\cap$  planar eingebettet ist. In der Abbildung sieht man zwei Zeichnungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ , wobei jeweils der gemeinsame Graph schwarz und dick gezeichnet ist. Beide Graphen haben nur zwei Einbettungen. Eine, in der die Kreissehne links, und eine, in der die Kreissehne rechts des Kreises liegt. Die eine Einbettung wird durch die obigen durchgezogenen Linien beschrieben, die andere durch die jeweils gepunktete Linie angedeutet. Zeichnet man nun  $G_1$  planar-, und fügt dann die Kanten von  $G_2$  zur Zeichnung hinzu, so ist in den Abbildungen unten zu sehen, dass es keine Möglichkeit gibt,  $G_2$  kreuzungsfrei zu zeichnen, egal welche planare Zeichnung von  $G_1$  man zugrunde legt.

Da es im Fall, dass der Schnittgraph nicht zweifach zusammenhängend ist, nicht immer eine simultane Einbettung geben muss, beschäftigt sich dieses Kapitel mit der Frage, ob es in polynomialer Zeit entscheidbar ist, ob zwei außenplanare Graphen eine simultane Einbettung besitzen, oder nicht. Dazu schränken wir diese Problemstellung ein, indem wir von den Graphen  $G_1$  und  $G_2$  fordern, zweifach zusammenhängend zu sein. Auf diese Weise können wir mit den Eigenschaften zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen arbeiten, die schon in Kapitel 3.2 sehr hilfreich waren.

Zusätzlich setzten wir im ersten Unterkapitel 4.1 voraus, dass der Schnittgraph  $G_\cap$  zusammenhängend ist. Für diesen Spezialfall wird ein Algorithmus beschrieben, der in polynomialer Zeit entscheidet, ob zwei Graphen eine simultane Einbettung besitzen, oder nicht. Weiter können im Falle der Existenz alle simultanen Einbettungen berechnet werden. Im zweiten Unterkapitel 4.2 betrachten wir den Fall, dass der Schnittgraph unzusammenhängend ist und erweitern den Algorithmus aus dem vorherigen Unterkapitel. Insgesamt wird gezeigt, dass für zwei zweifach zusammenhängende Graphen in quadratischer Zeit entschieden werden kann, ob sie simultan eingebettet werden können oder nicht. Im Falle der Existenz können alle simultanen Einbettungen in quadratischer Zeit berechnet werden.

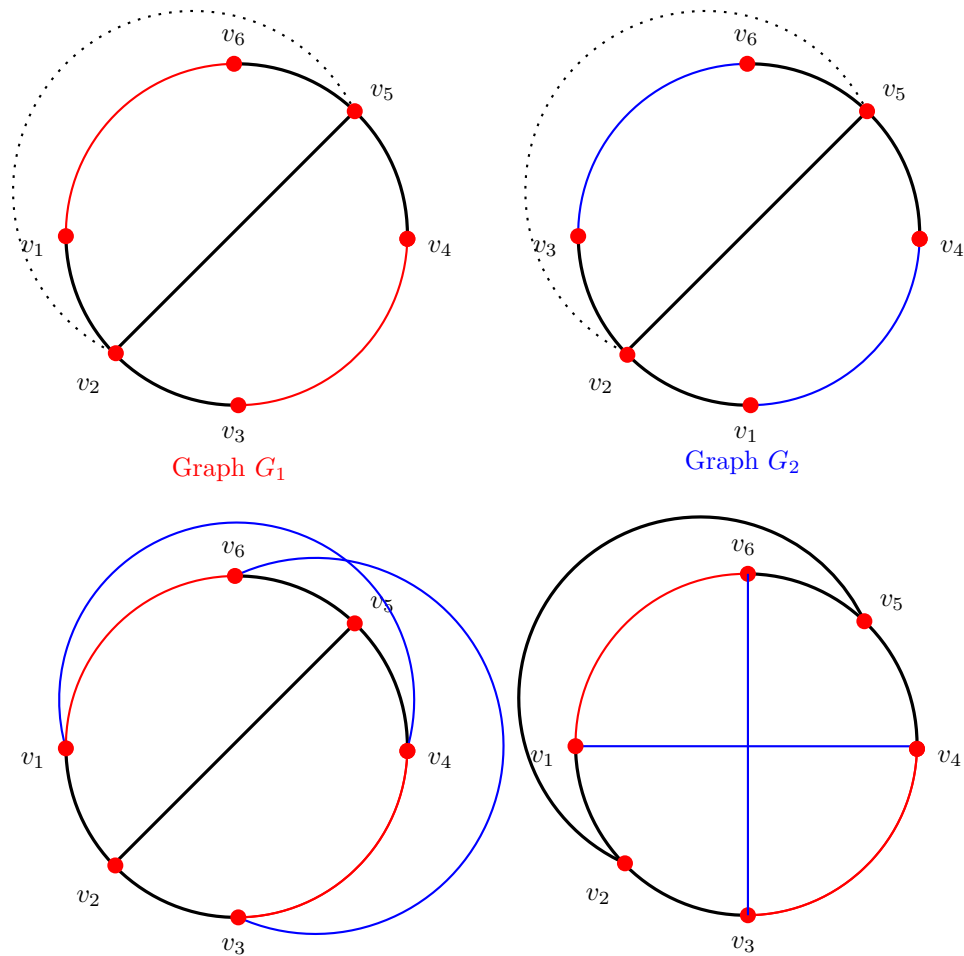


Abbildung 4.1: Der gemeinsame Schnittgraph ist stets schwarz gezeichnet. In gemeinsamen Zeichnungen unten lässt sich der Graph  $G_2$  nicht kreuzungsfrei einbetten.

Dabei werden wir untersuchen, welche Einbettungen des Schnittgraphen durch Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  induziert werden. Denn induzieren eine Einbettung  $\mathcal{E}^1$  von  $G_1$  und eine Einbettung  $\mathcal{E}^2$  von  $G_2$  die gleiche Einbettung des Schnittgraphen, so ist der Schnittgraph in  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  gleich eingebettet und wir haben eine simultane Einbettung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  gefunden.

Die Grundidee ist also, die Menge der durch die Einbettungen von  $G_1$  induzierten planaren Einbettungen von  $G_\cap$  und die Menge der durch die Einbettungen von  $G_2$  induzierten planaren Einbettungen von  $G_\cap$  zu schneiden. Denn liegt eine Einbettung des Schnittgraphen im Schnitt dieser beiden Mengen, so entsprechen die zugehörigen Einbettungen von  $G_1$  beziehungsweise  $G_2$  einer simultanen Einbettung beider Graphen. Ist der Schnitt der beiden beschriebenen Mengen leer, kann es keine simultane Einbettung geben.

Wir gehen folgendermaßen vor. Als erstes wird für einen zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen  $G = (V, E)$  mit  $|V| = n$  und  $|E| = m$  beschrieben, wie man ausgehend von einer beliebigen planaren Einbettung von  $G$  alle anderen planaren Einbettungen des Graphen erhält, indem man die Einbettungen einzelner Sehnen verändert. Dabei nutzen wir die Eigenschaften, die wir zu Beginn des Kapitels herausgestellt haben. Wir werden zeigen, dass wir jede planare Einbettung durch die Lagen der  $m - n$  Sehnen bezüglich des zum Graphen gehörigen Hamiltonkreises beschreiben können. Da sich die Lage einer Sehne bezüglich des Hamiltonkreises als boolesche Variable ausdrücken lässt, führt dies



zum Resultat, planare Einbettungen durch die Belegung von  $m - n$  booleschen Variablen beschreiben zu können. Diese Variablen werden wir *Sehnenvariablen* nennen.

Anschließend kehren wir zu unserem anfangs gestellten Problem zurück. Es sollen nun die Menge der durch die Einbettungen von  $G_1$  induzierten planaren Einbettungen von  $G_\cap$  und die Menge der durch die Einbettungen von  $G_2$  induzierten planaren Einbettungen von  $G_\cap$  geschnitten werden. für je zwei Einbettungen  $\mathcal{E}^1$  von  $G_1$  und  $\mathcal{E}^2$  von  $G_2$  müssen wir also die induzierten Einbettungen des Schnittgraphen miteinander vergleichen, um heraus zu finden, ob sie einander entsprechen.

Dabei wissen wir, dass wir die Einbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  durch eine Belegung ihrer Sehnenvariablen beschreiben können. Wir können sie jedoch nicht verwenden, um induzierte Einbettungen des Schnittgraphen von  $G_1$  und  $G_2$  zu vergleichen. Denn die Sehnenvariablen hängen von dem jeweiligen Hamiltonkreis von  $G_1$  beziehungsweise  $G_2$  ab. Zwischen ihnen gibt es keinen direkten Zusammenhang.

Um die Einbettungen des Schnittgraphen vergleichen zu können, kommen wir deshalb auf die Definition der kombinatorischen Einbettung zurück. Zwei Zeichnungen eines zusammenhängenden Graphen werden dabei dann als äquivalent betrachtet, wenn die Reihenfolge der Kanten um jeden Knoten übereinstimmt. Wir werden beschreiben, wie man durch eine Belegung weiterer boolescher Variablen die planare Einbettung eines zusammenhängenden Graphen beschreiben kann. Diese booleschen Variablen nennen wir *Tripelvariablen*, welche jeweils die Reihenfolge dreier Kanten um jeden Knoten des gemeinsamen Graphen beschreiben. Mit Hilfe dieser Tripelvariablen können wir induzierte Einbettungen des Schnittgraphen vergleichen.

Wir werden feststellen, dass es dabei einen starken Zusammenhang zwischen Sehnen- und Tripelvariablen gibt. Dadurch wird es möglich sein, ein lineares Gleichungssystem für die Sehnenvariablen von  $G_1$  und  $G_2$  zu formulieren. Jede Lösung dieses Gleichungssystems induziert eine simultane Einbettung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ . Ist das Gleichungssystem nicht lösbar, so gibt es keine simultane Einbettung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ .

## 4.1 Bestimmung aller simultanen Einbettungen bei zusammenhängendem Schnitt

Im Folgenden seien  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  zwei zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen mit zusammenhängendem Schnitt  $G_\cap = (V, E) = G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ . Wir werden für diesen Fall einen Algorithmus beschreiben, der alle simultanen Einbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  in quadratischer Zeit berechnen kann.

### 4.1.1 Einbettungen der Graphen via Sehnenvariablen

Es sei  $G = (V, E)$  ein außenplanarer, zweifach zusammenhängender Graph mit  $|V| = n$  und  $|E| = m$ . Wir wollen einen Weg finden, die Einbettungen des Graphen  $G = (V, E)$  durch Sehnenvariablen beschreiben zu können.

Jede planare Einbettung eines zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen  $G$  besteht nach Lemma 3.1 aus einem Hamiltonkreis  $K$  und zugehörigen Sehnen. Für jede dieser Sehnen gibt es nach Lemma 3.3 genau zwei Einbettungsmöglichkeiten, eine links und eine rechts von  $K$ . Starten wir mit einer beliebigen Einbettung des Graphen, ist es deshalb auf genau eine Art und Weise möglich, eine Sehne so neu planar einzubetten, dass sie anschließend auf der anderen Kreisseite liegt. Diese Operation, aus einer planaren Einbettung eine andere planare Einbettung zu gewinnen, indem man die Lage einer einzigen Sehne  $e$  bezüglich des Kreises  $K$  verändert, heiße *Kante  $e$  umlegen*. Klar ist, dass das Umlegen einer Sehne die Lagen der anderen Sehnen bezüglich des Kreises  $K$  nicht beeinflusst.

Ist für jede Sehne vorgegeben, ob sie links von  $K$  oder rechts von  $K$  eingebettet sein soll, so können wir ausgehend von einer beliebigen planaren Einbettung die Sehnen so umlegen, dass sie anschließend die geforderten Lagebedingungen erfüllen. Ausgehend von einer planaren Einbettung können wir deshalb durch Kantenumlegungen die Lagen aller Sehnen variieren.

Dies lässt sich auch folgendermaßen beschreiben: In jeder Einbettung liegt ein Teil der Sehnen links von  $K$  und der andere Teil der Sehnen rechts von  $K$ . Dies entspricht einer Partition der Sehnenmenge von  $K$ . Das Umlegen einer Sehne verändert diese Partition, und zwar so, dass zur einen Menge ein Element hinzukommt, während die andere Menge ein Element verliert. Weil man jede Sehne nach und nach umlegen kann, kann man durch Kantenumlegungen jede mögliche Partition der Sehnenmenge von  $K$  erzeugen.

Wir werden nun zeigen, dass jede Partition einer Einbettung des Graphen entspricht, was bedeutet, dass wir ausgehend von einer Einbettung durch Kantenumlegungen alle planaren Einbettungen erhalten können.

Es beschreibe nun  $\Omega_G$  die Menge aller planaren Einbettungen von  $G$ ,  $S_K$  die Mengen aller Sehnen des Kreises  $K$  und  $\mathcal{E}_S$  diejenige Einbettung von  $G$ , in der alle Sehnen aus einer Sehnenmenge  $S$  rechts von  $K$  und alle restlichen Sehnen aus der Menge  $S_K \setminus S$  links von  $K$  eingebettet seien.

Die auf diese Weise eingebettete Sehnenmenge  $S$  liefert dann eine Partition von  $S_K$ . Es gilt folgender Satz.

**Satz 4.1.** *Es sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender, außenplanarer Graph mit Hamiltonkreis  $K$ . Dann ist*

$$\begin{aligned} f: \mathcal{P}(S_K) &\rightarrow \Omega_G \\ S &\mapsto \mathcal{E}_S \end{aligned}$$

eine Bijektion.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von  $f$ , anschließend Injektivität und Surjektivität. Dabei verwenden wir vor allem die beiden gezeigten Resultate, dass ein zweifach zusammenhängender außenplanarer Graph stets höchstens zwei außenplanare Einbettungen besitzt, und dass sich jede Sehne eines zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen auf zwei Weisen einbetten lässt.

#### **Wohldefiniertheit:**

Es sei  $S$  eine Sehnenmenge von  $K$ . Zu zeigen ist, dass es genau eine Einbettung von  $G$  gibt, in der alle Sehnen aus  $S$  rechts von  $K$  und die restlichen Sehnen aus  $S_K \setminus S$  links von  $K$  eingebettet sind. Hat  $K$  keine Sehnen, so besteht  $G$  nur aus einem Kreis und dieser besitzt eine eindeutige Einbettung. Wir müssen also nur noch den Fall betrachten, dass  $K$  mindestens eine Sehne besitzt.

Dazu betten wir zunächst den Teilgraphen  $T = K \cup S = (V, E(K) \cup S)$  ein. Die Einbettung, in der alle Sehnen aus  $S$  rechts von  $K$  eingebettet sind, entspricht dabei einer außenplanaren Einbettung von  $T$ . Nach Lemma 3.4 gibt es höchstens zwei außenplanare Einbettungen von  $T$ . Weiter folgt aus dem Beweis des Lemmas, dass die beiden außenplanaren Einbettungen den Einbettungen entsprechen, in denen die Sehnen von  $K$  auf nur einer Kreisseite verlaufen. Es gibt also nur eine Einbettung von  $T$ , in der alle Sehnen aus  $S$  rechts von  $K$  eingebettet sind.

Auch  $T' = K \cup (S_K \setminus S) = (V, E(K) \cup S_K \setminus S)$  ist außenplanar und zweifach zusammenhängend. Somit gibt es mit gleicher Begründung wie oben genau eine Möglichkeit, die Sehnen aus  $S_K \setminus S$  links von  $K$  einzubetten.

die gesuchte Einbettung von  $G$  setzt sich aus den beschriebenen Einbettungen von  $T$  und  $T'$  zusammen. Haben wir den Hamiltonkreis  $K$  eingebettet, haben wir daher genau eine Möglichkeit, alle Sehnen aus  $S$  rechts von  $K$  einzubetten und anschließend alle Sehnen von  $S_K \setminus S$  links von  $K$  einzubetten. Jeder Sehnenmenge wird somit durch die Abbildung  $f$  genau eine Einbettung zugeordnet.

**Injektivität:**

Gegeben seien zwei verschiedene Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  des Graphen  $G$  aus dem Bild von  $f$ . Dann muss es in beiden Einbettungen mindestens einen Knoten  $v$  geben, für den die Reihenfolge der ausgehenden Kanten von  $v$  verschieden sind. Dabei liegen zwei dieser ausgehenden Kanten auf  $K$ , während die restlichen Kanten Sehnen von  $K$  sind. Nach Lemma 3.3 gibt es für jede Sehne von  $K$  genau zwei Einbettungsmöglichkeiten, nämlich eine rechts und eine links von  $K$ , während Kreiskanten in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  gleich eingebettet sein müssen, da  $K$  auf der Sphäre nur eine Einbettung besitzt. Sollen nun die Kantenreihenfolgen um  $v$  in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  verschieden sein, heißt das, dass mindestens eine von  $v$  ausgehende Sehne in den beiden Einbettungen auf verschiedenen Kreisseiten eingebettet sein muss. Dann unterscheiden sich die Sehnenmengen rechts von  $K$  um mindestens eine Sehne. Die Sehnenmengen rechts von  $K$  sind aber gerade diejenigen Sehnenmengen, die durch  $f$  auf die Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  beziehungsweise  $\mathcal{E}_2$  abgebildet werden. Somit folgt, dass die Urbilder zweier verschiedener Einbettungen aus dem Bild von  $f$  stets verschieden sind.

**Surjektivität:**

Da in jeder Einbettung von  $G$  der Kreis  $K$  eingebettet sein muss, lassen sich stets die Sehnen rechts von  $K$  und links von  $K$  aus einer gegebenen Einbettung ablesen. Dann liefern die Sehnen rechts von  $K$  ein Urbild der Abbildung  $f$ .  $\square$

Nun können wir aus jeder Partition der Sehnenmenge des Hamiltonkreises  $K$  eine zugehörige planare Einbettung von  $G$  finden und umgekehrt zu jeder planaren Einbettung die zugehörige Partition angeben. Insbesondere entspricht die Mächtigkeit der Potenzmenge aller Sehnen von  $K$  der Anzahl der Einbettungen von  $G$ . Es gibt also  $2^{m-n}$  verschiedene Einbettungen.

Jede Partitionierung der Sehnenmenge  $S_K$  lässt sich durch die Belegung boolescher Variablen repräsentieren. Dazu definieren wir für Sehne  $e$  eines Kreises  $K$  die boolesche *Sehnenvariable*  $x_e$  bezüglich der Einbettung  $\mathcal{E}$ :

$$x_e^{\mathcal{E},K} := \begin{cases} 1, & \text{pos}_K(e) = \text{rechts } \mathcal{E} \\ 0, & \text{pos}_K(e) = \text{links in der Einbettung} \end{cases} \quad (4.1)$$

Falls aus dem Kontext klar ist, auf welchen Kreis oder auf welche Einbettung sich die Variablen beziehen, werden die entsprechenden Indizes  $K$  und  $\mathcal{E}$  im Folgenden weggelassen.

Aus der Belegung dieser  $m-n$  Variablen lässt sich ablesen, welche Sehnen rechts und welche Sehnen links von  $K$  liegen. Umgekehrt lässt sich aus jeder Partition die entsprechende Belegung der  $m-n$  Variablen bestimmen. Jede Belegung der Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_K$  entspricht also einer Partition von  $S_K$ .

Nach Satz 4.1 induziert deshalb die Belegung der Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_K$  eine planare Einbettung von  $G$ , und umgekehrt legt jede planare Einbettung von  $G$  eine Variablenbelegung aller  $x_e$ ,  $e \in S_K$  fest.

Zum Schluss soll noch bemerkt werden, dass insbesondere das Spiegeln einer Einbettung durch Umlegen von Sehnen realisierbar sein muss. Beim Spiegeln einer Einbettung drehen sich alle Reihenfolgen der zu einem Knoten inzidenten Kanten um. Betrachtet man die zu einem Knoten  $v$  inzidenten Kanten, so bestehen diese aus Kreissehnen und zwei auf dem Kreis  $K$  liegenden Kanten. Bestimmt man die eine Kreiskante zur Referenzkante, so muss sich die Reihenfolge jeder Sehne zur anderen Kreiskante beim Spiegeln verändern. Da dies aber nur durch das Umlegen der entsprechenden Sehne realisierbar ist, muss man deshalb jede Sehne genau einmal umlegen. Somit entspricht das Umlegen aller Sehnen gerade dem Spiegeln der ursprünglichen Einbettung.

### 4.1.2 Einbettungen des Schnittgraphen via Tripelvariablen

Wir kommen auf unsere ursprüngliche Fragestellung zurück. Das heißt, wir betrachten zwei zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  und suchen eine simultane Einbettung des Schnitts  $G_\cap = (V, E) = G_1 \cap G_2$ . Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, können wir alle Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  und somit auch alle induzierten Einbettungen des Schnittes  $G_\cap = G_1 \cap G_2$  bestimmen. Findet man zwei Einbettungen von  $G_1$  beziehungsweise  $G_2$ , die eine gleiche Einbettung von  $G$  induzieren, so haben wir eine simultane Einbettung gefunden. Das zu lösende Problem ist, wie man die beiden Mengen der durch  $G_1$  beziehungsweise  $G_2$  induzierten Einbettungen des Schnittgraphen effizient schneiden kann. Dazu müssen wir einen Weg finden, induzierte Einbettungen miteinander vergleichen zu können. Da die Sehnenvariablen, mit deren Hilfe die Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  beschrieben werden können, von ihrem zugehörigen Hamiltonkreis abhängen, können wir sie nicht verwenden, um Einbettungen miteinander zu vergleichen.

Wir kommen deshalb auf den Begriff der Kombinatorischen Einbettung zurück, bei dem zwei Einbettungen eines Graphen als gleich bewertet werden, wenn für jeden Knoten des Graphen die Reihenfolge der inzidenten Kanten übereinstimmt. Wir durchlaufen dabei die Kanten stets im Uhrzeigersinn. Demzufolge kann man alle durch  $G_1$  induzierten Einbettungen von  $G$  mit den von  $G_2$  induzierten Einbettungen vergleichen, indem man jeweils alle Kantenreihenfolgen auf Gleichheit untersucht. Darauf wollen wir genauer eingehen.

#### 4.1.2.1 Beschreibung von Kantenreihenfolgen durch Tupel

Wir betrachten die Kantenreihenfolgen um die Knoten eines Graphen. Diese sind zirkulär. Möchte man die Reihenfolge von  $s$  Kanten um  $v$  beschreiben, so kann man beginnend mit einer Referenzkante die aufeinander folgenden Kanten aufzählen. Dabei können die aufeinander folgenden Knoten in ein  $s$ -Tupel geschrieben werden. Eine zu einem  $s$ -Tupel gehörige Kantenreihenfolge erhält man dann, indem man aufeinanderfolgende Tupeleinträge in der zugehörigen Kantenreihenfolge aufeinander folgen lässt und zusätzlich das erste Tupelelement auf das letzte folgen lässt. Das erste Element soll stets der Referenzkante entsprechen. Da man alle  $s$  Kanten als Referenzkante wählen kann, lässt sich jede Kantenreihenfolge durch  $s$  verschiedene Tupel beschreiben. Ist nur die zu einem Tupel gehörige Reihenfolge interessant, ist es irrelevant, für welche Referenzkante man sich entscheidet, beziehungsweise welches Tupel gewählt wird, um die entsprechende Reihenfolge zu repräsentieren. Siehe dazu Abbildung 4.2

Ziel ist es nun, die Reihenfolge der Kanten um einen Knoten durch eine Menge von Tupeln zu beschreiben, die jeweils möglichst wenig Elemente enthalten sollen. Hat man keine zirkuläre, sondern eine lineare Reihenfolge gegeben, in der das erste Element der Folge nicht auf das letzte folgt, so kann man die Reihenfolge durch Zweiertupel beschreiben. Das ist bei einer zirkulären Reihenfolge nicht der Fall. Tupel aus zwei Elementen liefern keine Information, da zwei Kanten um  $v$  immer aufeinander folgen, egal, wie sie angeordnet sind. Wir wollen die

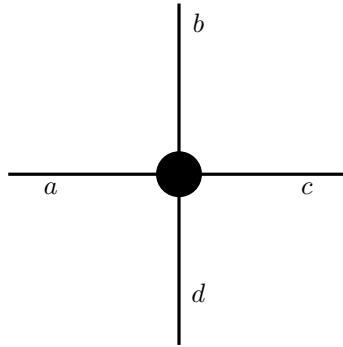


Abbildung 4.2: die Reihenfolge der Kanten lässt sich durch die folgenden vier Tupel beschreiben:  $(a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, b, a, b), (d, a, b, c)$

Beschreibung einer zirkulären Reihenfolge auf den linearen Fall zurück führen. Haben wir eine zirkuläre Reihenfolge gegeben, bestimmen wir daher eine der Kanten zur Referenzkante und betrachten jede Reihenfolge von Kanten ausgehend von dieser Referenzkante. Wir geben, in welcher Reihenfolge zwei Kanten von der Referenzkante aus gesehen in der gewählten Orientierung aufeinander folgen. Da dadurch von der Referenzkante aus gesehen die Lage einer Kante bezüglich jeder anderen Kante eindeutig definiert ist, wird damit eine eindeutige Kantenreihenfolge definiert. Die Reihenfolge zweier Kanten bezüglich einer Referenzkante lässt sich dabei durch ein Tripel beschreiben. In diesem Tripel soll der erste Eintrag stets der gewählten Referenzkante entsprechen. Der Zweite Eintrag besteht dann aus derjenigen Kante, die als erstes auf die Referenzkante folgt und im dritten Eintrag steht diejenige Kante, die von der Referenzkante aus gesehen auf die Kante im zweiten Tupteleintrag folgt. Wir betrachten alle Tripel, die sich auf diese Weise ergeben. Dabei kommt in  $s$  Tripeln die Referenzkante zweimal vor. Da diese Tripel keine Information liefern, braucht man sie nicht zu betrachten. Wir fassen das beschriebene Vorgehen folgendermaßen zusammen.

Jede Reihenfolge von  $s$  zu einem Knoten  $v$  inzidenten Kanten  $e_1, \dots, e_s$  kann durch die Reihenfolgen folgender dreielementiger Kantenmengen bezüglich einer Referenzkante  $e_1$  angegeben werden:

$$T_v := \left\{ \bigcup \{e_1, e_i, e_j\} \text{ mit } i \neq j, \quad i, j \in \{2, \dots, s\} \right\}. \quad (4.2)$$

Kombinatorisch ergibt sich, dass die Menge  $T_v$  aus  $\frac{s^2-s}{2} - s$  Elementen besteht. Da sich jede Reihenfolge einer Kantenmenge  $\{e_1, e_i, e_j\}$  bezüglich der Referenzkante  $e_1$  durch ein Tripel beschreiben lässt, lässt sich jede Reihenfolge durch  $\frac{s^2-s}{2} - s$  Tripel angeben. Siehe dazu das Beispiel in Abbildung 4.4.

Man beachte, dass die Umkehrung nicht gilt. Zum Beispiel erfüllen die Tripel  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $(e_1, e_3, e_4)$  und  $(e_1, e_4, e_2)$  aus Abbildung 4.3 zwar alle Bedingungen, die wir an die Menge  $T_v$  gestellt haben, aber es gibt keine Reihenfolge der vier Kanten, die allen drei geforderten Reihenfolgen genügt. Zum allgemeinen Begriff der zyklischen Ordnung siehe beispielsweise [Hun16].

#### 4.1.2.2 Tripelvariablen

Für drei zirkulär angeordnete Kanten gibt es zwei verschiedene Kantenreihenfolgen, sodass es für drei Kanten zwei verschiedene Tripel bezüglich einer Referenzkante gibt, die diese beiden Reihenfolgen beschreiben. Daher lässt sich die zirkuläre Reihenfolge dreier Kanten  $e$ ,  $f$  und  $g$  mit Referenzkante  $e$  durch eine boolesche Variable ausdrücken.

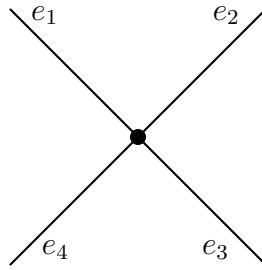


Abbildung 4.3: die Tripel  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $(e_1, e_3, e_4)$  und  $(e_1, e_4, e_2)$  erzeugen keine gültige Reihenfolge der vier abgebildeten Kanten.

Wir definieren für je drei verschiedene zu einem Knoten  $v$  inzidenten Kanten  $e$ ,  $f$  und  $g$  aus der Kanten- beziehungsweise Knotenmenge eines beliebigen Graphen bezüglich einer Einbettung  $\mathcal{E}$  folgende *Tripelvariable* mit der Referenzkante  $e$ :

$$t_{e,f,g}^{\mathcal{E}} = \begin{cases} 1, & \text{In } \mathcal{E} \text{ ist die Kantenreihenfolge um } v \text{ gegeben durch } (e, f, g) \\ 0, & \text{In } \mathcal{E} \text{ ist die Kantenreihenfolge um } v \text{ gegeben durch } (e, g, f) \end{cases} \quad (4.3)$$

Dabei wird impliziert, auf welchen Knoten sich die Tripelvariable bezieht, da drei verschiedene Kanten stets höchstens einen gemeinsamen Endknoten haben können. Ist klar, in welcher Einbettung die drei Kanten betrachtet werden, wird der Index  $\mathcal{E}$  weggelassen.

Da wir im Folgenden induzierte Einbettungen von  $G_{\cap}$  betrachten, sind für uns dabei nur die Variablen zu drei Kanten interessant, die in  $G_{\cap}$  liegen. Es sei hier darauf hingewiesen, dass es egal ist, ob wir eine Tripelvariable dreier Kanten aus  $G_{\cap}$  in den induzierten Einbettungen  $\mathcal{E}_1|_{G_{\cap}}$  beziehungsweise  $\mathcal{E}_2|_{G_{\cap}}$  betrachten oder in den ursprünglichen Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$ , da Reihenfolge dreier Kanten aus dem gemeinsamen Graphen  $G$  in den ursprünglichen Einbettungen und in den davon induzierten Einbettungen gleich sind.

Da wir nun die Reihenfolge dreier Kanten durch die entsprechende Tripelvariable ausdrücken, benötigen wir im Folgenden die Tripelschreibweise zur Beschreibung der Reihenfolge nicht mehr. Sprechen wir im Folgenden von Kantentripeln, so ist dabei stets die dreielementige Menge der entsprechenden Kanten gemeint.

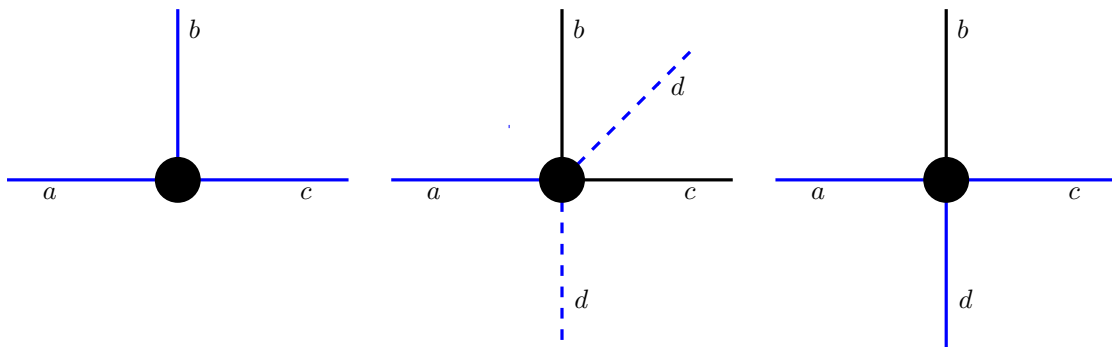


Abbildung 4.4: Konstruktion der Tripelreihenfolge, die durch die drei Tripel  $(a, b, c)$ ,  $(a, b, d)$  und  $(a, c, d)$  gegeben ist. Wir durchlaufen die Tripel stets im Uhrzeigersinn. In der ersten Zeichnung wird das erste Tripel betrachtet, in der zweiten Zeichnung die ersten beiden Tripel, in der dritten Zeichnung werden alle Tripel mit einbezogen. Das jeweils neu hinzugekommene Tripel ist blau, die möglichen Kantenlagen sind blau gestrichelt.

**Lemma 4.2.** *In einer Einbettung  $\mathcal{E}$  lässt sich die Reihenfolge der Kanten um einen Knoten  $v$  stets durch eine Variablenbelegung aller Tripelvariablen  $t_{\tau}^{\mathcal{E}}$  mit  $\tau \in T_v$  beschreiben. Jede solche Variablenbelegung repräsentiert dabei höchstens eine Kantenreihenfolge um  $v$ .*

*Beweis.* Es seien  $e_1, \dots, e_s$  die zu  $v$  inzidenten Kanten. Weiter sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Reihenfolge um  $v$  bezüglich einer fest gewählten Orientierung durch das  $s$ -Tupel  $(e_1, \dots, e_s)$  gegeben. Dann repräsentieren die Tripelvariablen  $t_{e_1, e_i, e_j}$  mit  $\{t_{e_1, e_i, e_j}\} \in T_v$  die Reihenfolge der Kanten  $e_i$  und  $e_j$  von  $e_1$  aus gesehen. Insbesondere ist für jede Kante aus  $\{e_1, \dots, e_s\}$  durch die Belegung dieser Variablen festgelegt, in welcher Reihenfolge sie, die Referenzkante und alle anderen Kanten aufeinander folgen. Damit induzieren die Tripelvariablen bezüglich der Kantentripel aus der Menge  $T_v$  die Kantenreihenfolge  $(e_1, \dots, e_s)$ .

Nun sei eine Variablenbelegung der Tripelvariablen bezüglich der Kantenmengen aus  $T_v$  vorgegeben. Wir nehmen an, dass es zwei verschiedene induzierte Reihenfolgen  $R_1$  und  $R_2$  der Kanten  $e_1, \dots, e_s$  um  $v$  herum gibt. Dann muss es mindestens zwei Kanten geben, deren Reihenfolge sich ausgehend von der Referenzkante  $e_1$  in  $R_1$  und  $R_2$  unterscheidet. Dann sind die durch diese beiden Kanten und die Referenzkante induzierten Tripel, die die jeweiligen Kantenreihenfolgen beschreiben, bezüglich  $R_1$  und  $R_2$  verschieden. Dann ist aber auch die entsprechende Belegung der Tripelvariable verschieden und beide Reihenfolgen können nicht durch die gleiche Variablenbelegung beschrieben worden sein.  $\square$

**Korollar 4.3.** *Jede kombinatorische Einbettung eines Graphen  $G$  lässt sich durch eine Belegung aller Tripelvariablen  $t_\tau^\mathcal{E}$  mit  $\tau \in \bigcup_{v \in G} T_v$  repräsentieren. Jede solche Variablenbelegung repräsentiert höchstens eine kombinatorische Einbettung des Graphen.*

*Beweis.* Eine kombinatorische Einbettung wird durch die Reihenfolgen der benachbarten Kanten um die Knoten des Graphen bestimmt. In Lemma 4.2 wurde gezeigt, dass sich die Reihenfolge um einen Knoten  $v$  durch eine Variablenbelegung der Tripelvariablen bezüglich der Kantentripel aus der Menge  $T_v$  repräsentieren lässt. Somit lässt sich jede kombinatorische Einbettung durch die Reihenfolgen aller Tripel aus  $\bigcup_{v \in G} T_v$  und somit durch eine entsprechende Belegung der Tripelvariablen beschreiben. Weiter repräsentiert nach Lemma 4.2 jede Variablenbelegung der Tripelvariablen bezüglich der Menge  $T_v$  höchstens eine Kantenreihenfolge um den Knoten  $v$ . Deshalb kann jede Belegung von Tripelvariablen höchstens eine Einbettung von  $G$  repräsentieren.  $\square$

### 4.1.3 Zusammenhang von Sehnen- und Tripelvariablen

Ziel war es, zwei induzierte Einbettungen des Schnittgraphen  $G_\cap$  miteinander vergleichen zu können, was bedeutet, dass die Kantenreihenfolgen um die Knoten des Schnittgraphen miteinander verglichen werden müssen. Um zwei verschiedenen Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  auf Gleichheit zu untersuchen, können wir beide Einbettungen durch eine Belegung der Tripelvariablen beschreiben diese Belegung vergleichen. Führt man dies für zwei Einbettungen durch, so kann man in quadratischer Zeit je zwei induzierte Einbettungen des Schnittgraphen auf Gleichheit untersuchen. Da man dies für alle induzierten Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  durchführen müsste, um alle simultanen Einbettungen zu erhalten und es exponentiell viele induzierte Einbettungen geben kann, ist das zu aufwendig.

Deshalb gehen wir anders vor. Dabei ist die entscheidende Beobachtung, dass die Beschreibung planarer Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  durch die Sehnenvariablen  $x_e$ , die nach Gleichung 4.1 einer Sehne die relative Lage bezüglich des zugehörigen Kreises zuordnet, den Umgang mit den verschiedenen Einbettungen stark vereinfacht. Wir setzen die Sehnenvariablen, und die durch die Gleichung 4.3 definierten Tripelvariablen miteinander in Bezug.

Dazu betrachten wir zunächst in einer Einbettung eines beliebigen zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen mit nach Lemma 3.1 eindeutig bestimmtem Hamiltonkreis  $K$  ein Kantentripel  $e, f, g$  mit gemeinsamen Endknoten  $v$ . Da jede Kante des Tripels den

Knoten  $v$  als Endknoten besitzt, muss der Hamiltonkreis den Knoten  $v$  und drei weitere zu den Kanten  $e$ ,  $f$  und  $g$  gehörige Knoten  $v_e$ ,  $v_f$  und  $v_g$  enthalten. Traversieren wir den Kreis, erhalten wir eine induzierte Knotenreihenfolge der vier Knoten auf  $K$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll dabei auf  $v$  der Knoten  $v_e$ , darauf der Knoten  $v_f$  und darauf der Knoten  $v_g$  folgen. Dann nennen wir  $v_e$  *ersten Knoten*,  $v_g$  *zweiten Knoten* oder auch *mittleren Knoten* und  $v_f$  *dritten Knoten*. Entsprechend nennen wir  $e$  *erste Kante*,  $f$  *zweite Kante* oder auch *mittlere Kante* und  $g$  *dritte Kante*.

Im Folgenden betrachten wir alle booleschen Variablen stets als Körperelemente von  $\mathbb{F}_2$ .

**Lemma 4.4.** *Für einen zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen mit zugehörigem Hamiltonkreis gilt für je drei, zu einem gemeinsamen Knoten inzidente Kanten  $\{e, f, g\}$  und für je zwei Einbettungen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}'$  stets:*

$$(t_{e,f,g}^{\mathcal{E}} = x_f^{\mathcal{E}}) \iff (t_{e,f,g}^{\mathcal{E}'} = x_f^{\mathcal{E}'}) \quad (4.4)$$

wobei  $f$  der mittleren Kante des Tripels bezüglich des Hamiltonkreises entspricht.

*Beweis.* Es sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender außenplanarer Graph mit Hamiltonkreis  $K$ . Zunächst kann die mittlere Kante des Tripels  $t_{e,f,g}$  in jeder beliebigen Einbettung bezüglich  $K$  niemals im Kreis  $K$  enthalten sein. Denn traversiert man den Kreis  $K$ , so erhält man eine induzierte Knotenreihenfolge der Endknoten von  $e$ ,  $f$  und  $g$ . Per Definition stößt man beim Traversieren des Kreises ausgehend von  $v$  zuerst auf den ersten, dann auf den mittleren und anschließend auf den dritten Knoten. Weil  $v$  höchstens zwei inzidente Kreiskanten hat, können nur die erste oder dritte Kante Kreiskanten sein. Für die mittlere Kante  $f$  ist also eine zugehörige Sehnvariable  $x_f$  definiert, die die Lage von  $f$  bezüglich  $K$  angibt.

Nun betrachten wir die Belegung der Variablen  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}}$  und  $x_f$ , die durch  $\mathcal{E}$  induziert wird. Da beides boolesche Variablen sind, gilt entweder  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}} = x_f^{\mathcal{E}}$  oder  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}} = x_f^{\mathcal{E}} + 1$ . Gilt die letzte Gleichung, ist dies gleichbedeutend damit, dass beide Variablen unterschiedlich belegt sind. Wir müssen nun zeigen, dass in beiden Fällen die Gleichungen gültig bleiben, wenn wir die durch eine Einbettung  $\mathcal{E}'$  induzierten Variablenbelegungen von  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}'}$  und  $x_f^{\mathcal{E}'}$  betrachten.

Da die Belegung der Variablen  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}}$  und  $x_f^{\mathcal{E}}$  nur von der Einbettung des Teilgraphen  $T := (V(K), E(K) \cup \{e, f, g\})$  abhängt, betrachten wir die möglichen Einbettungen dieses Graphen. Da zwei der Kanten aus dem Tripel Kreiskanten sein können, besteht  $T$  aus dem Kreis  $K$  und einer bis drei Sehnen. Der Graph  $T$  ist ein zweifach zusammenhängender, außenplanarer Graph. Somit erhalten wir alle Einbettungen des Graphen ausgehend von einer Einbettung von  $T$  durch Kantenumlegungen. Wir untersuchen nun, wie sich die Variablenbelegungen von  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}}$  und  $x_f^{\mathcal{E}}$  verändern, wenn wir Sehnen von  $K$  umlegen.

Klar ist, dass sich die Variable  $x_f^{\mathcal{E}}$  genau dann verändert, wenn man die Sehne  $f$  umlegt und dass das Umlegen anderer Sehnen die Variablenbelegung von  $x_f^{\mathcal{E}}$  nicht beeinflusst. Die Frage ist also, wie sich beim Umlegen von den Sehnen die Variable  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}}$  verhält.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass zwei Kanten des Tripels auf  $K$  liegen. Das heißt, dass die erste und die zweite Kante des Tripels auf  $K$  liegen, während die mittlere Kante keine Kreiskante ist. Dann besitzt  $T$  zwei Einbettungen. In der einen Einbettung liegt die mittlere Kante rechts von  $K$ , und in der anderen Einbettung liegt die mittlere Kante links von  $K$ . Da dies verschiedene Einbettungen sind, müssen die Kantenreihenfolgen um mindestens einen Knoten in beiden Einbettungen verschieden sein. Dabei kann es sich nur um die Endknoten der mittleren Sehne handeln, da alle anderen Kanten Ausgangsgrad zwei haben. Da sich durch das Umlegen der mittleren Sehne die Lage bezüglich des Kreises



$K$  verändert, verändern sich die Kantenreihenfolgen um beide Endknoten von  $f$ . Somit führt das Umlegen der mittleren Kante in diesem Fall zur Veränderung der Variable  $t_{e,f,g}^v$ .

Nun betrachten wir den Fall, dass die erste und die zweite Kante keine Kreiskanten sein müssen. Dazu ist die Beobachtung hilfreich, dass sich der Kreis  $K$  aus zwei disjunkten Pfaden von  $v$  zum mittleren Knoten des Tripels zusammensetzt und sich auf dem einen dieser Pfade der erste Knoten und auf dem anderen der zweite Knoten befindet. Wir betrachten die beiden disjunkten Teilpfade von  $v$  zum ersten beziehungsweise zweiten Knoten des Tripels. Dann hat keiner der Knoten auf diesen Pfaden inzidente Sehnen. Somit haben alle Knoten Knotengrad zwei und können somit zu einer Kante kontrahiert werden. Sollte dabei eine Doppelkante entstehen, so entfernen wir diese.

Zuletzt erhalten wir einen Graphen, in dem die erste und zweite Tripelkante auf dem Kreis liegen und die mittlere Kante immer noch rechts oder links vom Kreis verläuft. Dabei hat sich die Tripelreihenfolge nicht verändert, da in beiden kontrahierten Teilgraphen nur jeweils eine Tripelkante enthalten war. Das zeigt, dass die Tripelvariable unabhängig von der Lage der ersten und zweiten Kante ist. Die mittlere Kante verändert durch Umlegen allerdings die Tripelreihenfolge, wie im ersten Fall schon gezeigt wurde. Siehe dazu Abbildung 4.5.

Ausgehend von einer Einbettung  $\mathcal{E}$  haben wir damit gezeigt, dass sich mit dem Verändern einer Tripelvariable auch die entsprechende Sehnenvariable verändert und umgekehrt. Verändert sich eine Tripelvariable nicht, so haben wir gezeigt, dass auch die entsprechende Sehne nicht umgelegt wird.

Haben wir in der Einbettung  $\mathcal{E}$  die Gleichung  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}} = x_f^{\mathcal{E}}$  oder  $t_{e,f,g}^{\mathcal{E}} = x_f^{\mathcal{E}} + 1$  gegeben, so folgt, dass sie in beiden Fällen in jeder beliebigen anderen Einbettung  $\mathcal{E}'$  gültig bleibt, die man durch Kantenumlegungen erhält. Da dies nach Satz 4.1 alle Einbettungen des Graphen sind, folgt die Behauptung.  $\square$

Dieses Lemma hat zur Folge, dass sich jede Tripelvariable stets mit Hilfe einer Sehnenvariable ausgedrückt werden kann. Zu jedem Tripel gibt es also eine Sehne, die in jeder Einbettung entweder den gleichen Wert wie die Sehne annimmt oder immer einen anderen Wert annimmt. Das Umlegen einer Sehne führt also stets zur Veränderung der Tripelvariable und umgekehrt.

Dieses Lemma wenden wir im Folgenden an, um ausgehend von zwei Referenzeinbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  simultane Einbettungen zu erzeugen, sofern es eine gibt. Dabei sei darauf hingewiesen, dass obige Äquivalenz zwar für die Variablen bezüglich aller Kanten und Tripel aus  $G_1$  beziehungsweise  $G_2$  gültig ist, wir uns aber stets nur für die Variablen bezüglich Kanten und Knoten des gemeinsamen Graphen  $G_{\cap}$  interessieren.

#### 4.1.4 Beschreibung eines Algorithmus bei zusammenhängendem Schnitt

Mit Hilfe der Resultate dieses Kapitels können wir nun das Problem SEFE für zwei außen-planare zweifach zusammenhängende Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit zusammenhängendem Schnitt  $G_{\cap} = (V, E) = G_1 \cap G_2$  mit  $|V| = n$  und  $|E| = m$  mit einer Laufzeit in  $O(n^2)$  lösen.

Wie in Kapitel 3.2 gezeigt, bestehen die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  aus je einem Hamiltonkreis  $K_1$  und  $K_2$  und deren zugehörigen Sehnen. Weiter haben wir zu Beginn des Kapitels 4.1.1 gezeigt, dass wir ausgehend von einer festen Einbettung von  $G_1$  beziehungsweise  $G_2$  durch Sehnenumlegungen alle anderen Einbettungen des jeweiligen Graphen erhalten können. Dabei verändert man durch das Umlegen einer Sehne dessen relative Lage zum entsprechenden Hamiltonkreis.

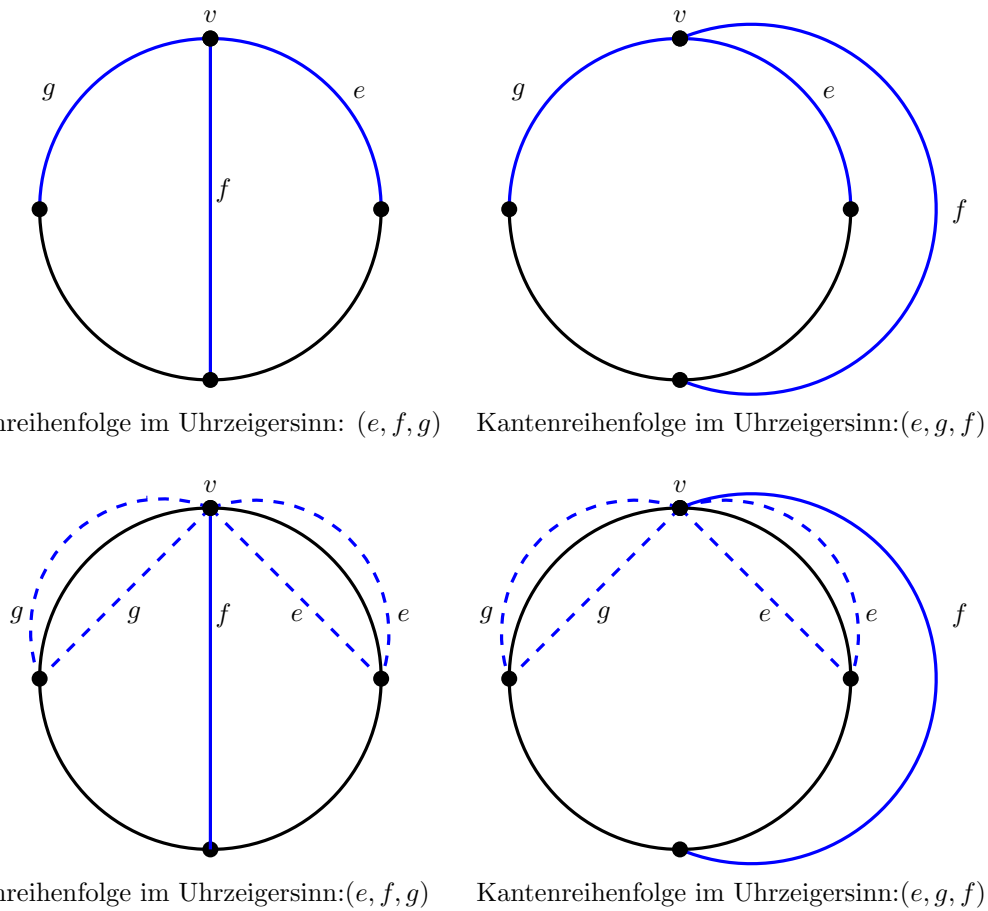


Abbildung 4.5: oben: Veränderung der Kantenreihenfolge durch Umlegen der mittleren Kante  $f$ ;  
 unten: Die Einbettungsmöglichkeiten der ersten und zweiten Kante  $e$  beziehungsweise  $g$  (blau gestrichelt) beeinflussen die Reihenfolge nicht.

Für eine simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  muss gelten, dass die Reihenfolgen der Kanten um jeden Knoten von  $G_\cap$  in  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  gleich sind. Aus Lemma 4.2 folgt, dass sich jede Kantenreihenfolge um einen Knoten durch entsprechende Reihenfolgen von Tripeln beschreiben lässt. Deshalb reicht es, zu gewährleisten, dass diese Kantentripel in beiden Einbettungen die gleiche Reihenfolge aufweisen. Aus Lemma 4.4 folgt, dass die Reihenfolge eines Tripels von genau einer Sehne des entsprechenden Hamiltonkreises abhängt. Das bedeutet, dass sich durch das Umlegen der entsprechenden Sehne die Reihenfolge des Tripels verändert. Somit können für jedes Tripel durch das Umlegen oder Nicht-Umlegen der entsprechenden Sehne beide möglichen Tripelreihenfolgen erzeugt werden.

Die Grundidee ist nun, mit zwei festen Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  zu starten, die entsprechenden Reihenfolgen der Tripel zu vergleichen, und je nachdem, ob sie in den beiden Einbettungen gleich sind-, oder nicht, die Sehnen so umzulegen, dass die Tripelreihenfolgen anschließend übereinstimmen. Wenn wir nach und nach alle möglichen Sehnenenumlegungen vornehmen, die die richtigen Tripelreihenfolgen erzeugen, können wir auf diese Weise alle simultanen Einbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  erhalten, sofern es eine simultane Einbettung gibt. Gibt es keine simultane Einbettung, erzeugen zwei Tripel an eine Sehne widersprüchliche Forderungen. In diesem Fall führt jedes Umlegen der entsprechenden Sehne dazu, dass eine Tripelreihenfolge in den betrachteten Einbettungen verschieden wird.

Wir können die Reihenfolgen von Tripeln durch boolesche Tripelvariablen beschreiben und die Lagen der Sehnen zu ihren Hamiltonkreisen durch boolesche Sehnenvariablen. Siehe

dazu die Gleichungen 4.3 und 4.1. Das Verändern einer Tripelreihenfolge entspricht dem Verändern der Belegung der entsprechenden Tripelvariable und das Umlegen einer Sehne dem Verändern der Belegung der entsprechenden Sehnenvariablen.

Aus Satz 4.1 folgt, dass wir jede Einbettung der Eingangsgraphen  $G_1$  und  $G_2$  durch eine Belegung der zu den Graphen gehörigen Sehnenvariablen beschreiben können. Deshalb können wir jede simultane Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  durch eine entsprechende Belegung der Sehnenvariablen von  $G_1$  und  $G_2$  beschreiben. Auf dieser Grundlage können wir nun das beschriebene Verfahren durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems boolescher Variablen realisieren.

Wir wählen speziell die beiden außenplanaren Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$ , in denen alle Sehnen von  $K_1$  beziehungsweise  $K_2$  rechts von  $K_1$  beziehungsweise  $K_2$  eingebettet sind. Diese Einbettung lässt sich nach Definition der Sehnenvariablen durch diejenige Variablenbelegung beschreiben, in der alle Sehnenvariablen den Wert 1 haben. Das Wählen der Einbettungen bedeutet also, dass wir allen Sehnenvariablen den Wert 1 zuweisen. Wir nennen diese Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  beziehungsweise  $\mathcal{E}_2$ .

Nun vergleichen wir die Einbettungen des Schnittgraphen in  $\mathcal{E}_1$  beziehungsweise  $\mathcal{E}_2$ . Wie bereits beschrieben, reicht es dabei, für jeden Knoten  $v$  des Schnittgraphen  $G_\cap$  die Reihenfolge der Kantentripel aus der Menge  $T_v$  aus Lemma 4.2 zu vergleichen.

Stimmt die Reihenfolge eines solchen Tripels in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  überein, so ist dies nicht widersprüchlich zu einer simultanen Einbettung. Auch wenn wir die Reihenfolge der Tripel in beiden Einbettungen verändern, bleibt die für eine simultane Einbettung geforderte Gleichheit der Tripelreihenfolgen in beiden Einbettungen erhalten. Für die zu dem Tripel gehörenden Sehnen von  $G_1$  und  $G_2$  bedeutet dies, dass wir ihre Lage bezüglich ihres jeweiligen Hamiltonkreises entweder in beiden Einbettungen oder in keiner der beiden Einbettungen verändern wollen. In  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  sind Sehnenvariablen rechts ihres Hamiltonkreises eingebettet. Deshalb fordern wir im betrachteten Fall für eine simultane Einbettung, dass die Sehnen von  $G_1$  und  $G_2$  entweder beide rechts oder beide links von ihrem Hamiltonkreis eingebettet sind. Da die Sehnenvariablen in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  alle den Wert 0 haben, ist dies gleichbedeutend damit, dass beide Sehnenvariablen entweder den Wert 0 beibehalten oder auf den Wert 1 gesetzt werden. Dies entspricht dem Fordern der Gleichheit beider Sehnenvariablen.

Entsprechend fordern wir Ungleichheit der Sehnenvariablen, wenn sich die Reihenfolge eines Tripels, und somit die zugehörige Tripelvariable in beiden Einbettungen unterscheidet.

#### 4.1.5 Formulierung des Algorithmus durch ein lineares Gleichungssystem

Es seien  $v_1, \dots, v_n$  die Knoten des gemeinsamen Graphen  $G_\cap$ . Weiter bezeichnen wir die Menge aller Kantentripel bezüglich einer gewählten Referenzkante, für die eine Belegung der zugehörigen Tripelvariablen die Reihenfolge der Kanten um den Knoten  $v_i$  nach Lemma 4.2 festlegt, mit  $T_i$ . Die mittlere Kante einer Tripelvariablen  $t$  bezüglich eines Kantentripels  $\tau$  in einer Einbettung  $\mathcal{E}$  nennen wir  $m(\tau, \mathcal{E})$ . Das ist diejenige Sehnenvariable, durch die sich die Tripelvariable  $t_\tau^\mathcal{E}$  nach Lemma 4.4 ausdrücken lässt. Wir fassen das beschriebene Vorgehen durch das Aufstellen eines linearen Gleichungssystems boolescher Variablen zusammen.

Die Sehnenvariablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  und  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  einer simultanen Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  müssen bezüglich der Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$x_{m(\tau, \mathcal{E}^1)} = \begin{cases} x_{m(\tau, \mathcal{E}^2)} & \text{für } t_\tau^{\mathcal{E}^1} = t_\tau^{\mathcal{E}^2} \\ x_{m(\tau, \mathcal{E}^2)} + 1 & \text{für } t_\tau^{\mathcal{E}^1} \neq t_\tau^{\mathcal{E}^2} \end{cases} \text{ für alle } \tau \in \bigcup_{i=1}^n T_i \quad (4.5)$$

Man beachte, dass in obigem Gleichungssystem die Sehnenvariablen  $m(\tau, \mathcal{E}_1)$  und  $m(\tau, \mathcal{E}_2)$  gleiche, aber auch verschiedene Sehnenvariablen sein können.

**Lemma 4.5.** *Für zwei zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit zusammenhängendem Schnittgraphen ist eine Belegung ihrer zugehörigen Sehnenvariablen genau dann in der Lösungsmenge des LGS 4.5 enthalten, wenn sie eine simultane Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  induziert.*

*Beweis.* Es bezeichne  $K_1$  den Hamiltonkreis von  $G_1$  und  $K_2$  den Hamiltonkreis von  $G_2$ . Es gilt nach Satz 4.1, dass sich jede simultane Einbettung durch die Belegung der Sehnenvariablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  und  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  repräsentieren lässt. Somit wird eine simultane Einbettung, sofern sie existiert, stets von einer Sehnenvariablenbelegung induziert.

Es sei eine Belegung der Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  und  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  gegeben, die eine simultane Einbettung induziert. Wir haben also eine zu den Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  gehörige Einbettung  $\mathcal{E}_1$  und eine zu den Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  gehörige Einbettung  $\mathcal{E}_2$  gegeben, für die die Gleichheit  $\mathcal{E}_1|_{G_\cap} = \mathcal{E}_2|_{G_\cap}$  erfüllt ist. Das ist nach Korollar 4.3 dann der Fall, wenn die Reihenfolgen der Tripel aus  $\bigcup_{i=1}^n T_i$  in beiden Einbettungen  $\mathcal{E}_1|_G$  und  $\mathcal{E}_2|_G$  gleich sind. Das LGS formuliert die geforderte Gleichheit jeder dieser Tripelreihenfolgen durch die entsprechende Gleichung ihrer nach Lemma 4.4 zugehörigen Sehnenvariablen. Damit muss die gegebene Variablenbelegung obiges Gleichungssystem erfüllen. Die Belegung befindet sich also in der Lösungsmenge des LGS.

Umgekehrt induziert jede Variablenbelegung aus der Lösungsmenge des LGS 4.5 eine simultane Einbettung. Denn wir haben nach Korollar 4.3 dann eine simultane Einbettung  $(E^1, E^2)$  gegeben, wenn für alle Tripel, die im LGS 4.5 betrachtet werden, gewährleistet ist, dass ihre entsprechenden Kantenreihenfolgen in  $E^1$  und  $E^2$  übereinstimmen. Für jedes dieser Tripel formuliert obiges LGS die geforderte Gleichheit durch die nach Lemma 4.4 zu den jeweiligen Tripelvariablen gehörenden Sehnenvariablen.  $\square$

**Satz 4.6.** *Das Problem SEFE für zwei zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen mit zusammenhängendem Schnitt lässt sich mit einer Laufzeit in  $O(n^2)$  lösen.*

*Beweis.* Da wir nach Lemma 4.5 alle simultanen Einbettungen zweier zweifach zusammenhängender, außenplanarer Graphen durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems erhalten, lässt sich das Problem SEFE in polynomialer Zeit lösen. Zu zeigen bleibt, dass die Laufzeit in  $O(n^2)$  liegt. Im obigen LGS erhalten wir für jedes Tripel einer Mengen  $T_v$  eine Gleichung. Dabei ist die Anzahl der Elemente von  $T_v$  quadratisch in der Anzahl inzidenter Kanten von  $v$ . Deshalb liegt die Anzahl der Gleichungen des obigen LGS in  $O(\sum_{v \in G} \deg(v)^2) \in O((\sum_{v \in G} \deg(v))^2) = O(m^2)$ . Da für planare Graphen gilt, dass die Kantenanzahl linear in der Knotenanzahl ist, liegt die Gleichungsanzahl in  $O(n^2)$ . Durch obige Gleichungen werden boolesche Variablen miteinander verglichen. Damit entspricht die Lösungsfindung des obigen linearen Gleichungssystems dem Lösen des Problems 2Sat mit entsprechenden Klauseln. Dabei entspricht eine Gleichung der Form  $x_{m(\tau, \mathcal{E}_1)} = x_{m(\tau, \mathcal{E}_2)}$  der Klausel  $C = \{x_{m(\tau, \mathcal{E}_1)} \vee \overline{x_{m(\tau, \mathcal{E}_2)}}, \overline{x_{m(\tau, \mathcal{E}_1)}} \vee x_{m(\tau, \mathcal{E}_2)}\}$  und eine Gleichung der Form  $x_{m(\tau, \mathcal{E}_1)} = x_{m(\tau, \mathcal{E}_2)} + 1$  der Klausel  $C = \{x_{m(\tau, \mathcal{E}_1)} \vee x_{m(\tau, \mathcal{E}_2)}, \overline{x_{m(\tau, \mathcal{E}_1)}} \vee \overline{x_{m(\tau, \mathcal{E}_2)}}\}$ . Da 2Sat nach [EIS76] in linearer Zeit lösbar ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Es sei angemerkt, dass, falls der Schnittgraph kein einfacher Kreis ist und es eine simultane Einbettung gibt, diese niemals eindeutig ist. Denn zwei Einbettungen, die eine gemeinsame Einbettung des Schnittgraphen induzieren, lassen sich spiegeln. Außerdem kann es passieren, dass durch obiges lineare Gleichungssystem an manche Sehnenvariablen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  keine Bedingungen gestellt werden. Diese dürfen dann beliebig gewählt werden. Das heißt, dass die zugehörigen Sehnen beliebig umgelegt werden dürfen und dass das Umlegen jeder dieser Sehnen eine weitere simultane Einbettung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  ergibt.

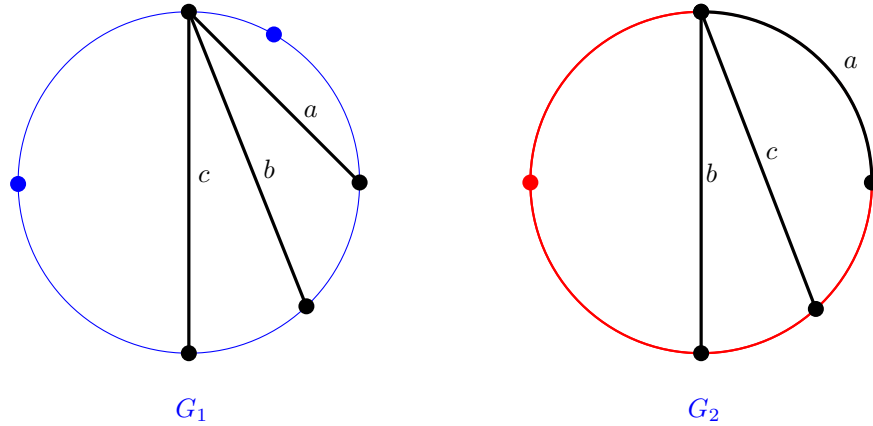


Abbildung 4.6: Außenplanare Einbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ .

#### 4.1.6 Beispiele

Wir betrachten dazu folgendes Beispiel aus Abbildung 4.6.

Dort sind zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit ihren Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  aus dem Algorithmus dargestellt, denn wie man sieht, sind alle Sehnen rechts von den jeweiligen Hamiltonkreisen eingebettet, wenn man sie im Uhrzeigersinn durchläuft. Dabei hat das Kantentripel  $\{a, b, c\}$  in den Einbettungen verschiedene Kantenreihenfolgen, sodass wir für die entsprechenden Sehnenvariablen Ungleichheit fordern müssen. Die mittlere Kante des Tripels bezüglich des Hamiltonkreises von  $G_1$  ist  $b$ . Die mittlere Kante des Tripels bezüglich des Hamiltonkreises von  $G_2$  ist  $c$ . Wir erhalten für die entsprechenden Sehnenvariablen folgende Gleichung für eine simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$ .

$$x_b^{\mathcal{E}^1} = x_c^{\mathcal{E}^2} + 1$$

Da der Schnittgraph keine weiteren Tripel enthält, entspricht diese Gleichung schon dem gesamten obigen Gleichungssystem. Die Lösung dieser Gleichung liefert alle simultanen Einbettungen des Graphen. Diese erhält man also, wenn man die Hamiltonkreise der beiden Graphen einbettet und beliebig Kanten umlegt, dabei jedoch stets beachtet, dass die Sehnen  $c$  und  $b$  in den jeweiligen Einbettungen immer auf verschiedenen Kreisseiten der entsprechenden Hamiltonkreise liegen müssen. Siehe dazu Abbildung 4.7.

Wir betrachten das Beispiel in Abbildung 4.1 vom Beginn des Abschnitts. Die beiden dort angegebenen Graphen besitzen keine simultane Einbettung. Wir betrachten die außenplanaren Einbettungen der Graphen, in denen alle Sehnen rechts des Hamiltonkreises liegen, wenn wir ihn im Uhrzeigersinn durchlaufen; siehe Abbildung 4.8. Wir betrachten dabei die beiden in den Zeichnungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  gelb untermalten Kantentripel des Schnittgraphen. Das Kantentripel  $\{a', b, c'\}$  hat in den Einbettungen der beiden Graphen die gleiche Reihenfolge. Wir fordern also Gleichheit der zugehörigen Sehnenvariablen. Das Kantentripel  $\{a, b, c\}$  hat in den Einbettungen der beiden Graphen verschiedene Reihenfolgen. Wir fordern daher Ungleichheit der zugehörigen Sehnenvariablen. Da in beiden Kantentripeln die Kante  $b$  die mittlere Kante bezüglich beider Hamiltonkreises ist, muss eine simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} x_b^{\mathcal{E}^1} &= x_b^{\mathcal{E}^2} && \text{für die geforderte Gleichheit der Tripelreihenfolge rechts oben} \\ x_b^{\mathcal{E}^1} &= x_b^{\mathcal{E}^2} + 1 && \text{für die geforderte Gleichheit der Tripelreihenfolge links unten} \end{aligned}$$

Da sich diese Gleichungen widersprechen, ist das lineare Gleichungssystem wie erwartet nicht lösbar.

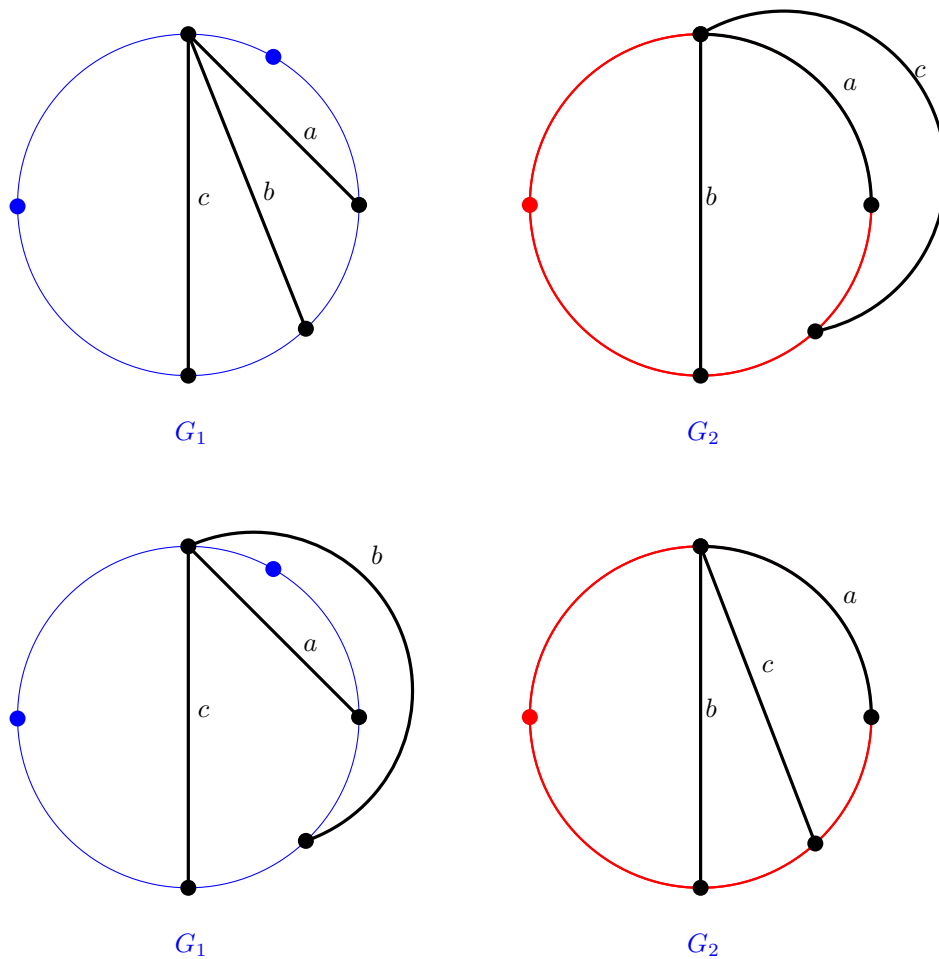


Abbildung 4.7: Es sind zwei verschiedene simultane Einbettungen abgebildet. Oben hat man dafür die Einbettung von  $G_2$  angepasst, unten die Einbettung von  $G_1$ . Wir erhalten aus beiden simultanen Einbettungen weitere simultane Einbettungen, indem wir Sehnen so umlegen, dass die gegebenen Kantenreihenfolgen erhalten bleiben. In beiden Fällen kann man dabei in der Einbettung  $G_1$  die Kanten  $c$  und  $a$  umlegen und in der Einbettung von  $G_2$  die Kante  $b$ . Das sind alle Sehnen, die bezüglich dem betrachteten Tripel nicht der mittleren Sehne entsprechen und umlegbar sind. Insgesamt gibt es also für  $G_1$  und  $G_2$  8 simultane Einbettungen.

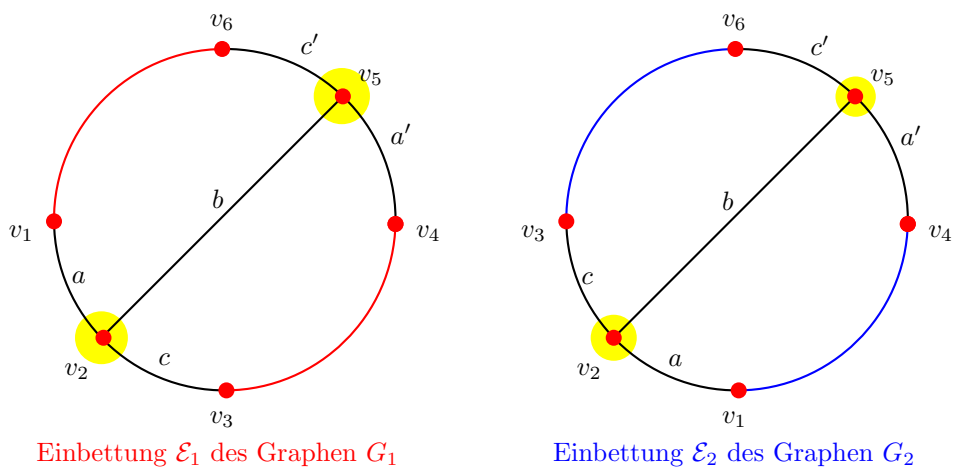


Abbildung 4.8:  $G_1$  und  $G_2$  besitzen keine simultane Einbettung. Dies lässt sich an der Reihenfolge der gelb unterlegten Tripel erkennen.

## 4.2 Bestimmung aller simultanen Einbettungen bei beliebigem Schnitt

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Algorithmus aus dem letzten Kapitel, sodass wir das Problem SEFE auch dann für zwei außenplanare zweifach zusammenhängende Graphen  $G_1$  und  $G_2$  lösen können, wenn ihr Schnittgraph  $G_\cap = G_1 \cap G_2$  nicht mehr als zusammenhängend vorausgesetzt ist.

Grundlage des Algorithmus bei zusammenhängendem Schnittgraphen  $G_\cap$  war, dass wir jede Zeichnung des gemeinsamen Graphen durch seine kombinatorische Einbettung ausreichend gut beschreiben konnten. Ist der Graph nicht mehr zusammenhängend, sind nicht nur die Reihenfolgen der Kanten um die Knoten des Graphen dafür entscheidend, ob zwei Einbettungen als äquivalent gelten, oder nicht, sondern auch die relativen Lagen verschiedener Zusammenhangskomponenten zueinander. Dies hat zur Folge, dass der Begriff der kombinatorischen Einbettung nicht mehr ausreicht, um die möglichen Zeichnungen von  $G_\cap$  zu klassifizieren. Dies ist in der Abbildung 2.9 verdeutlicht. Darum arbeiten wir ab jetzt mit der sogenannten topologischen Einbettung, die im Grundlagenkapitel 2.8.3 eingeführt wurde.

Ziel ist es also,  $G_1$  und  $G_2$  im topologischen Sinne simultan einbetten. Im Fall, dass es eine derartige simultane Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  gibt, sollen dabei alle simultanen Einbettungen berechnet werden können. Siehe dazu Beispiel 4.9. Der gemeinsame Graph ist dort stets schwarz eingezeichnet. In der obersten Reihe sind zwei Einbettungen zu sehen, in dem der Schnittgraph zwar die gleiche kombinatorische Einbettung besitzt, nicht aber die gleiche topologische Einbettung. Dies sieht man daran, dass die schwarz eingezeichnete Kante in beiden Einbettungen auf verschiedenen Seiten des schwarzen Dreiecks liegt. Durchläuft man das Dreieck so, dass man mit dem Knoten  $a$  beginnt, dann auf den Knoten  $b$  stößt und schließlich über den Knoten  $c$  wieder zu  $a$  gelangt, so liegt die schwarze Kante in der Abbildung von  $G_1$  rechts und in der Abbildung von  $G_2$  links vom Dreieck. Durch Kantenumlegungen werden in der zweiten Reihe die topologischen Einbettungen gleich. Die Einbettungen in der dritten Reihe entsprechen denen der zweiten Reihe, da sich die Einbettungen von  $G_2$  nur in der Wahl der äußeren Facette unterscheiden. Unten ist eine simultane Einbettung beider Graphen dargestellt.

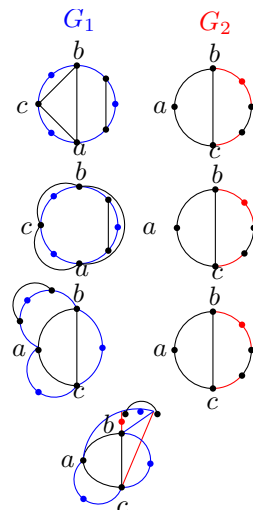


Abbildung 4.9: simultane Einbettung zweier Graphen mit unzusammenhängendem Schnittgraphen. Dieser ist stets schwarz gezeichnet.



Dazu soll das lineare Gleichungssystem aus dem vorherigen Kapitel 4.5 so erweitert werden, dass dessen Lösungsmenge auch für den Fall, dass  $G_\cap$  unzusammenhängend ist, alle simultanen Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$  induziert.

Durch das Gleichungssystem 4.5 aus dem letzten Kapitel haben wir die Menge der durch  $G_1$  induzierten Einbettungen des Schnittgraphen und die Menge der durch  $G_2$  induzierten Einbettungen des Schnittgraphen geschnitten und dadurch alle simultane Einbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  berechnen können. Dazu hatten wir ausgenutzt, dass wir die induzierten Einbettungen des Schnittgraphen durch ihre zugehörigen Tripelvariablen miteinander vergleichen konnten. Da der Schnittgraph hier nicht mehr zusammenhängend ist, reicht es nicht mehr aus, nur Tripelvariablen zweier induzierter Einbettungen zu vergleichen.

Deshalb beschäftigen wir uns zunächst mit dem Begriff der topologischen Einbettung. Wir werden zeigen, dass sie durch die kombinatorische Einbettung eines Graphen und die Lagen der Knoten zu allen Kreisen des Graphen beschreibbar ist. Davon ausgehend werden wir feststellen, dass es dabei genügt, die Kreise einer planaren Kreisbasis zu betrachten. Dies führt zum Resultat, dass sich, wie erhofft, die Einbettung des Schnittgraphen auch dann durch eine Belegung boolescher Variablen beschreiben lässt, wenn er nicht mehr als zusammenhängend vorausgesetzt ist. Diese booleschen Variablen setzen sich aus den Tripelvariablen aus dem letzten Kapitel und sogenannten Lagevariablen zusammen. Die Tripelvariablen beschreiben die kombinatorische Einbettung des Graphen, während die Lagevariablen die relative Lage der Knoten des Schnittgraphen zu den Kreisen aus einer gewählten planaren Kreisbasis beschreiben.

Wir werden feststellen, dass Lagevariablen und Sehnvariablen, ähnlich wie Tripelvariablen und Sehnvariablen, stark zusammenhängen. Dadurch wird es möglich sein, das lineare Gleichungssystem 4.5 aus dem letzten Unterkapitel durch Gleichungen von Sehnvariablen so erweitern, dass dessen Lösungsmenge auch dann alle simultanen Einbettungen induziert, wenn der Schnittgraph nicht zusammenhängend ist.

### 4.2.1 Einbettungen des Schnittgraphen via Tripel- und Lagevariablen

Da in diesem Kapitel der Schnittgraph  $G_\cap$  nicht mehr als zusammenhängend vorausgesetzt ist, können wir seine Einbettung nicht mehr nur durch die Reihenfolge der Kanten um seine Knoten beschreiben. Wir brauchen einen erweiterten Einbettungsbegriff. Dabei verwenden wir die sogenannte *topologische Einbettung* von Graphen, die im Grundlagenkapitel 2.8.3 eingeführt wurde.

Dabei haben wir die topologische Einbettung eines Graphen mit Hilfe der *Betrachtung einer Zeichnung aus der Perspektive einzelner Zusammenhangskomponenten* definiert. Eine Zeichnung  $Z$  aus der Perspektive einer Zusammenhangskomponente  $T$  zu betrachten, bedeutet, jeder Facette und Zusammenhangskomponente der Zeichnung  $Z$  eine Facette der auf  $T$  eingeschränkten Zeichnung  $Z|_T$  zuzuordnen. Dabei werden die Zusammenhangskomponenten und Facetten von der Zeichnung  $Z$  denjenigen Facetten der eingeschränkten Zeichnung  $Z|_T$  zugeordnet, denen sie entsprechen oder in die sie eingefügt werden müssen, um aus der eingeschränkten Zeichnung  $Z|_T$  die Zeichnung  $Z$  zu erhalten. Dabei nennen wir die Facetten von  $Z|_T$  kurz *Facetten von  $T$*  und geben, falls nötig, die zu Grunde liegende Zeichnung  $Z$  zusätzlich an. Betrachten wir eine Facette  $F$  von  $Z$  aus der Perspektive von  $T$ , sodass wir  $F$  einer Facette  $f'$  der Zeichnung  $Z|_T$  zuordnen, so nennen wir  $f'$  die  *$F$  enthaltende Facette von  $T$*  und sagen, dass  $F$  in der Facette  $f'$  von  $T$  enthalten ist. Grenzen zwei Facetten in  $Z$  an eine gemeinsame Facette  $F$ , so sagen wir, dass sich diese Zusammenhangskomponenten die Facette  $F$  teilen. 2.10

Auf Grundlage dieser Begriffe ist im Grundlagenkapitel die relative Lage zweier Zusammenhangskomponenten definiert. Die relative Lage einer Zusammenhangskomponente  $T_1$

bezüglich der Zusammenhangskomponente  $T_2$  ist durch die Facette  $f$  gegeben, wenn  $T_1$  aus der Perspektive von  $T_2$  betrachtet in der Facette  $f$  von  $T_2$  eingebettet ist. Die Relative Lage zweier Zusammenhangskomponenten  $T_1$  und  $T_2$  zueinander setzt sich aus der relativen Lage von  $T_1$  bezüglich  $T_2$  und der relativen Lage von  $T_2$  bezüglich  $T_1$  zusammen. Siehe dazu 2.10.

Wir kommen nun zum Begriff der topologischen Einbettung zurück. Zwei Zeichnungen gelten nach dem Begriff der topologischen Einbettung als äquivalent, wenn die kombinatorischen Einbettungen aller Zusammenhangskomponenten übereinstimmen und die zugehörigen topologischen Bäume beider Zeichnungen gleich sind. Der zu einer Zeichnung gehörende topologische Baum besitzt als Knotenmenge die Facetten der Zeichnung und die Zusammenhangskomponenten des Graphen. Wir nennen Knoten eines topologischen Baumes *Komponentenknoten*, wenn sie einer Zusammenhangskomponente entsprechen, und *Facettenknoten*, wenn sie einer Facette entsprechen. Bezeichnen wir einen Komponentenknoten oder einen Facettenknoten mit einem Buchstaben, so verwenden wir ihn auch für die zugehörige Zusammenhangskomponente beziehungsweise für die zugehörige Facette. Dabei wird aus dem Zusammenhang deutlich gemacht, ob gerade von einem Knoten oder einer Zusammenhangskomponente beziehungsweise Facette gesprochen wird.

Um den topologischen Baum zu konstruieren, verbindet man einen Komponentenknoten und einen Facettenknoten dann miteinander, wenn sie in der Zeichnung aneinander grenzen. Anschließend wird jede Kante, die einen Facettenknoten  $F$  und einen Komponentenknoten  $Z$  miteinander verbindet, mit der  $F$  enthaltenden Facette von  $T$  beschriftet. Dies ergibt stets einen Baum. Siehe dazu das Beispiel aus den Abbildungen 2.11.

#### 4.2.1.1 Relative Lagen von Zusammenhangskomponenten

Wie im Grundlagenkapitel dargelegt, kann man vom topologischen Baum der betrachteten Zeichnung ablesen, welche relativen Lagen je zwei Zusammenhangskomponenten zueinander haben. Dazu betrachtet man im Baum denjenigen Pfad, über den die beiden Zusammenhangskomponenten miteinander verbunden sind. Die beiden benachbarten Knoten der Zusammenhangskomponenten auf diesem Pfad entsprechen den beiden Facetten, die die relative Lage der Zusammenhangskomponenten zueinander bestimmen. Siehe dazu Abbildung 2.11.

Wir zeigen nun in Lemma 4.7, dass die relativen Lagen von Zusammenhangskomponenten zueinander zusammen mit der kombinatorischen Einbettung eines Graphen den zugehörigen topologischen Baum und damit die zugehörige topologische Einbettung festlegen, sofern es eine derartige topologische Einbettung gibt. Beim Beweis des Lemmas 4.7 wird uns dabei folgende Definition helfen.

Wir sagen, dass in einer Zeichnung eines Graphen die Zusammenhangskomponente  $Z$  zwei Zusammenhangskomponenten  $Z_1$  und  $Z_2$  voneinander trennt, wenn es in  $Z$  einen einfachen Kreis gibt, bezüglich dem  $Z_1$  und  $Z_2$  auf verschiedenen Kreisseiten liegen. Insbesondere sind dann aus der Perspektive von  $Z$  betrachtet  $Z_1$  und  $Z_2$  in verschiedenen Facetten von  $Z$  eingebettet. Das bedeutet für den zur Zeichnung gehörigen topologischen Baum, dass im Pfad, der  $Z_1$  und  $Z_2$  miteinander verbindet, der Knoten  $Z$  enthalten sein muss. Ist umgekehrt  $Z$  im Pfad enthalten, der  $Z_1$  und  $Z_2$  im topologischen Baum miteinander verbindet, so bedeutet dies, dass aus der Perspektive von  $Z$  aus betrachtet  $Z_1$  und  $Z_2$  in verschiedenen Facetten von  $Z$  eingebettet sind und es somit einen Kreis in  $Z$  geben muss, bezüglich dem  $Z_1$  und  $Z_2$  auf verschiedenen Kreisseiten liegen. Zwei Zusammenhangskomponenten  $Z_1$  und  $Z_2$  werden also genau dann durch eine Zusammenhangskomponente  $Z$  getrennt, wenn diese im Pfad von  $Z_1$  zu  $Z_2$  enthalten ist.

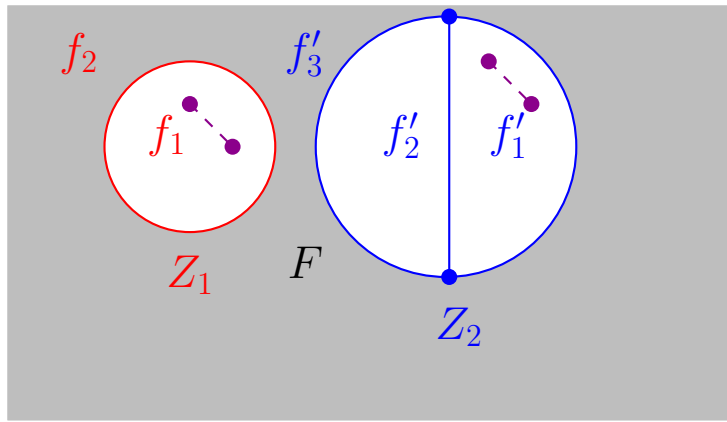


Abbildung 4.10: Die lilane Kante mit Facette  $\bar{f}$  kann nicht so eingebettet werden, dass die relative Lage zwischen ihr und  $Z_1$  durch die Facetten  $f_1$  und  $\bar{f}$  gegeben ist und gleichzeitig die relative Lage zwischen  $Z_3$  und  $Z_2$  durch die Facetten  $f'_1$  und  $\bar{f}$  gegeben ist. Im Bild ist  $Z_3$  in den Facetten gestrichelt dargestellt, in die sie gleichzeitig eingebettet sein müsste.

**Lemma 4.7.** *Gibt es zu einem Graphen eine topologische Einbettung, die eine gegebene kombinatorische Einbettung und gegebene relative Lagen je zweier Zusammenhangskomponenten zueinander realisiert, so ist sie eindeutig.*

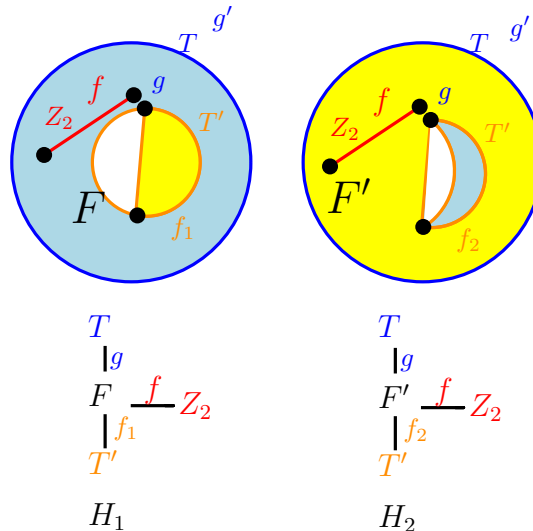


Abbildung 4.11: Die Hilfsgraphen unterscheiden sich in der Beschriftung der Ausgangskante von  $T'$

*Beweis.* Es seien zu einem Graphen  $G$  eine kombinatorische Einbettung  $\mathcal{E}$  gegeben, sowie relative Lagen je zweier Zusammenhangskomponenten zueinander. In Abbildung 4.10 ist zu sehen, dass es nicht immer eine zugehörige topologische Einbettung geben muss. Im Folgenden betrachten wir nur den Fall, dass es eine zugehörige topologische Einbettung gibt, und zeigen durch einen Widerspruchsbeweis, dass sie in diesem Fall eindeutig ist.

Es seien  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  zwei topologische Einbettungen von  $G$ , die die kombinatorische Einbettung  $\mathcal{E}$  induzieren und beide die gegebenen relativen Lagen je zweier Zusammenhangskomponenten realisieren. Wir nehmen an, dass sich  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  unterscheiden.

Die topologische Einbettung eines Graphen lässt sich durch eine kombinatorische Einbettung und einen topologischen Baum beschreiben. Da  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  nach Voraussetzung die gleiche kombinatorische Einbettung  $\mathcal{E}$  induzieren, unterscheiden sie sich nicht in ihrer kombinatorischen Einbettung. Deshalb müssen ihre zugehörigen topologischen Bäume verschieden sein.

Es sei  $B_1$  der topologische Baum von  $\mathcal{E}_1$  und  $B_2$  der topologische Baum von  $\mathcal{E}_2$ . Beide Bäume enthalten die Zusammenhangskomponenten von  $G$ , sowie die Facetten aus  $\mathcal{E}_1$  beziehungsweise  $\mathcal{E}_2$  als Knoten. Wir betrachten die Facettenknoten von  $B_1$  und  $B_2$ . Jeder dieser Knoten ist in  $B_1$  beziehungsweise  $B_2$  mit mindestens einem Komponentenknoten verbunden. Gäbe es zu jedem Facettenknoten des einen Baumes einen Facettenknoten des anderen Baumes, sodass beide Facettenknoten zu den gleichen Komponentenknoten adjazent wären und weiter alle inzidenten Kanten gleich beschriftet wären, so würden sich beide Bäume höchstens in der Namensgebung der Facettenknoten unterscheiden. Da es bei der Betrachtung von Graphen auf die Namensgebung nicht ankommt, wären in diesem Fall beide topologischen Bäume gleich.

Damit muss es in einem der Bäume mindestens einen Facettenknoten  $F$  geben, der zusammen mit seinen adjazenten Knoten einen Teilbaum induziert, der im anderen Baum nicht enthalten ist. Siehe dazu Abbildung 4.15. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dieser Teilbaum  $H_1$  in  $B_1$  enthalten, in  $B_2$  aber nicht. Wir wählen nun einen Komponentenknoten  $T$  von  $G$ , der in  $H_1$  über eine Kante  $e$  mit  $F$  verbunden ist. Die Kante  $e$  ist mit der  $F$  enthaltenden Facette  $g$  von  $T$  beschriftet. Da die Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  die gleichen kombinatorischen Einbettungen der Zusammenhangskomponenten induzieren, muss es auch in  $\mathcal{E}_2$  mindestens eine Facette geben, die aus der Perspektive von  $T$  betrachtet in  $g$  enthalten ist. Deshalb muss im Baum  $B_2$  die Zusammenhangskomponente  $T$  enthalten sein, sowie eine ausgehende Kante  $e'$  von  $T$ , die mit  $g$  beschriftet ist. Wir wählen den zu  $e'$  inzidenten Facettenknoten  $F'$  in  $B_2$  und betrachten den durch  $F'$  und dessen adjazente Knoten induzierten Teilbaum  $H_2$  aus  $B_2$ .

**Fall 1:  $F'$  ist in  $H_2$  zu den gleichen Knoten adjazent wie  $F$  in  $H_1$ .**

Ist  $F'$  in  $B_2$  zu den gleichen Knoten adjazent-, wie  $F$  in  $B_1$ , so muss die Beschriftung der Kanten von  $H_1$  und  $H_2$  verschieden sein, da sich sonst  $H_1$  und  $H_2$  höchstens durch die Namensgebung der Facettenknoten  $F$  und  $F'$  unterscheiden würden. Da die Kanten  $e$  und  $e'$  in  $H_1$  und  $H_2$  gleich beschriftet sind, muss es in  $H_1$  und  $H_2$  mindestens einen weiteren Komponentenknoten  $T'$  geben, der in  $H_1$  und in  $H_2$  über je eine Kante verbunden ist, die in  $B_1$  und  $B_2$  verschieden beschriftet sein müssen. Dann ist aus der Perspektive von  $T'$  die Zusammenhangskomponente  $T$  in verschiedenen Facetten eingebettet. Dies führt aber dazu, dass  $T$  in  $\mathcal{E}_1$  eine andere relative Lage zu  $T'$  hat, als in  $\mathcal{E}_2$ . Dies widerspricht den Voraussetzungen an  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$ . Siehe dazu 4.11

**Fall 2:  $F'$  ist in  $H_2$  nicht zu den gleichen Knoten adjazent wie  $F$  in  $H_1$**

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $F$  in  $H_1$  zu einem Komponentenknoten  $T'$  adjazent, während in  $H_2$  der Facettenknoten  $F'$  nicht zu  $T'$  adjazent sei. Da der Komponentenknoten  $T'$  auch in  $B_2$  enthalten sein muss, muss er in  $B_2$  über einen Pfad mit  $F'$  verbunden sein, der mindestens einen weiteren Komponentenknoten  $T''$  enthalten muss.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass dieser Pfad auch den Komponentenknoten  $T$  enthält, der nach Konstruktion in  $H_1$  zu  $F$  und in  $H_2$  zu  $F'$  adjazent ist. Dann ist in  $B_1$  aus der Perspektive von  $T$  betrachtet die Zusammenhangskomponente  $T'$  in der Facette  $g$  eingebettet, während in  $B_2$  die Zusammenhangskomponente  $T'$  nicht in  $g$  eingebettet sein kann, da der Pfad, der  $T$  und  $T'$  in  $B_2$  miteinander verbindet, die Kante  $e'$  nicht enthält. Siehe dazu Abbildung 4.15. .

Nun betrachten wir den Fall, dass der Pfad in  $H_2$ , der  $F'$  mit  $T'$  verbindet, den Knoten  $T$  nicht enthält. Dann muss dieser Pfad einen weiteren Komponentenknoten  $T''$  enthalten, der zu  $F'$  adjazent ist. Insgesamt muss dann der Pfad in  $B_2$ , der  $T$  und  $T'$  miteinander verbindet, den Komponentenknoten  $T$ , den zu  $T$  adjazenten Facettenknoten  $F'$ , den zu  $F'$  adjazenten Komponentenknoten  $T''$  und mindestens eine weitere zu  $T''$  adjazenten Facettenknoten  $\bar{F}$  enthalten, über den  $T''$  schließlich über einen Pfad mit  $T'$  verbunden ist. Siehe dazu Abbildung Siehe dazu 4.14.

Dann muss aber die Zusammenhangskomponente  $T''$  in der zugehörigen Zeichnung an die Facette  $F$  und  $\bar{F}$  grenzen, die verschieden sind. Aus der Perspektive von  $T''$  sind deshalb  $T$  und  $T'$  in verschiedenen Facetten enthalten.  $T$  und  $T'$  werden also von  $T''$  voneinander getrennt. In  $B_1$  werden aber  $T$  und  $T'$  nicht voneinander getrennt, sondern sie teilen sich die Facette  $F$ . Aus der Perspektive von  $T''$  betrachtet müssen deshalb  $T$  und  $T'$  nach dem topologischen Baum  $B_2$  in der gleichen Facette enthalten sein.

Damit unterscheiden sich die die relativen Lagen von  $T$  zu  $T''$  und  $T'$  zu  $T''$  in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$ . Dies liefert den gesuchten Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Das Lemma zeigt, dass die kombinatorische Einbettung eines Graphen zusammen mit den relativen Lagen der Zusammenhangskomponenten zueinander den topologischen Baum festlegt, sofern es eine Einbettung gibt, in der die betrachteten relativen Lagen realisiert werden können. Da wir andererseits von einem gegebenen topologischen Baum stets alle Relativen Lagen von Zusammenhangskomponenten zueinander ablesen können, erhalten wir insgesamt das Resultat, dass sich jede topologische Einbettung durch die kombinatorische Einbettung zusammen mit den relativen Lagen der Zusammenhangskomponenten zueinander beschreiben lässt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Es gibt relative Lagen von Zusammenhangskomponenten zueinander, die in sich widersprüchlich sind und daher zu keiner topologischen Einbettung gehören. Siehe dazu Abbildung 4.10.

#### 4.2.1.2 Relative Lagen von Knoten und Kreisen

Wir setzen nun die relative Lage von Zusammenhangskomponenten zu den Lagen von Knoten und Kreisen in Bezug, um damit in Lemma 4.9 zu zeigen, dass wir die topologische Einbettung eines Graphen durch dessen kombinatorische Einbettung und durch die relative Lage jedes Knotens bezüglich aller Kreise beschreiben können. Dazu benötigen wir noch eine Definition.

Betrachtet man den Rand einer Facette als Graph, durchläuft ihn ausgehend von einem Knoten genau einmal und löscht alle Kanten, die man mehrmals antrifft, so erhält man alle einfachen Kreise, die im Rand des Graphen enthalten sind. Diese Kreise nennen wir im Folgenden *Facettenkreise*.

Weiterhin erweitern wir die Definition des Ausdrucks  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(x)$ , der die relative Lage von  $x$  bezüglich eines Kreises  $K$  beschreibt, indem  $x$  nicht mehr nur für Kanten oder Knoten stehen soll, sondern auch für Teilgraphen, Zusammenhangskomponenten oder auch Punkte und Facetten der Einbettung  $\mathcal{E}$ . Der Ausdruck  $\text{pos}_K(x)$  ist dabei nur definiert, wenn  $x$  nicht im Kreis  $K$  enthalten ist. Betrachten wir im Folgenden relative Lagen  $\text{pos}_K(x)$ , soll deshalb stets impliziert sein, dass nur solche relative Lagen betrachtet werden, die auch definiert sind.

**Lemma 4.8.** *Es sei  $f$  eine Facette eines planaren Graphen  $G$ ,  $\mathcal{E}$  eine Einbettung von  $G$  und  $K_1, \dots, K_s$  die Facettenkreise von  $f$  und  $p$  ein beliebiger Punkt in  $\mathcal{E}$ . Dann gilt:*

$$p \in f \iff \text{pos}_{K_i}(f) = \text{pos}_{K_i}(p) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, s\}$$

*Beweis.* Gilt für einen Facettenkreis  $K_i$ , dass sich die Lagen von  $p$  und  $f$  zu  $K_i$  unterscheiden, bedeutet dies, dass  $f$  und  $p$  auf zwei verschiedenen Kreisseiten von  $K_i$  eingebettet sind, und somit kann  $p$  nicht in  $f$  liegen.

Zu zeigen bleibt, dass, falls  $p$  nicht in  $f$  liegt, es einen Kreis gibt, bezüglich dem die Lagen von  $p$  und  $f$  nicht übereinstimmen. Der Rand der Facette teilt die Sphäre in  $n + 1$  Regionen, wobei  $n$  dieser Regionen durch genau einen der  $K_1, \dots, K_n$  begrenzt werden und eine Region durch die Facette  $f$  begrenzt wird. Befindet sich  $p$  nicht in  $f$ , so muss er sich in einer der anderen Regionen befinden, und damit in einer Region, die von einem der Kreise  $K_1, \dots, K_n$  begrenzt werden. Dann liegen  $p$  und  $f$  auf zwei verschiedenen Seiten dieses Kreises.  $\square$

Wollen wir die Lage einer Zusammenhangskomponente  $Z_1$  bezüglich einer anderen Zusammenhangskomponente  $Z_2$  eines Graphen  $G$  bestimmen, so müssen wir diejenige Facette angeben, in die  $Z_1$  aus der Perspektive von  $Z_2$  eingebettet ist. Betrachten wir die Zeichnung aus der Perspektive von  $Z_2$ , so ist die Zusammenhangskomponente  $Z_1$  in einer Facette von  $Z_2$  eingebettet. Diese können wir nach Lemma 4.8 eindeutig bestimmen, indem wir die relative Lage der Zusammenhangskomponenten zu den Facettenkreisen von  $Z_2$  angeben. Die relativen Lagen von Kreisen und Zusammenhangskomponenten zueinander helfen also dabei, relative Lagen von Zusammenhangskomponenten zu beschreiben. Dies manifestiert sich im folgenden Lemma.

**Lemma 4.9.** *Die topologische Einbettung eines planaren Graphen lässt sich durch die kombinatorische Einbettung zusammen mit der relativen Lage jedes Knotens bezüglich aller Kreise beschreiben.*

*Beweis.* Betrachtet man in einer Zeichnung, die eine planare Einbettung repräsentiert, eine Zusammenhangskomponente und einen Kreis, der nicht in ihr enthalten ist, so darf es keine zwei Knoten aus der Zusammenhangskomponente geben, die auf verschiedenen Kreisseiten liegen, da sich sonst Kanten kreuzen würden. Genauso muss sich jede Kante auf genau einer Seite eines solchen Kreises befinden. Jede Zusammenhangskomponente befindet sich also stets auf genau einer Kreisseite jeden Kreises, der nicht in ihr enthalten ist.

Jeder Knoten  $v$  aus  $G$  ist in einer Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $G$  enthalten. Deshalb befindet sich  $v$  als Teilmenge von  $G$  auf der gleichen Kreisseite jedes Kreises  $K$ , wie  $Z$ , sofern  $K$  nicht in  $Z$  enthalten ist. Der Knoten  $v$  und  $K$  haben also die gleiche relative Lage zueinander wie  $Z$  und  $K$ . Wir können deshalb die relative Lage einer beliebigen Zusammenhangskomponente bezüglich eines beliebigen Kreises ermitteln, indem wir die relative Lage eines Knotens aus der Zusammenhangskomponente bezüglich des Kreises bestimmen. Da nach Voraussetzung die relative Lage jedes Knotens zu allen Kreisen aus  $G$  gegeben ist, haben wir also auch die relativen Lagen jeder Zusammenhangskomponente bezüglich aller Kreise des Graphen gegeben.

Weiter haben wir eine kombinatorische Einbettung jeder Zusammenhangskomponente gegeben und kennen deshalb alle Facettenkreise der Zusammenhangskomponenten. Wollen wir nun die relative Lage einer Zusammenhangskomponente  $Z_1$  bezüglich einer Zusammenhangskomponente  $Z_2$  ermitteln, so müssen wir diejenige Facette von  $Z_2$  angeben, in die  $Z_1$  aus der Perspektive von  $Z_2$  eingebettet ist. Aus Lemma 4.8 folgt, dass diese Facette durch die relativen Lagen der Zusammenhangskomponente  $Z_1$  zu den Facettenkreisen aus  $Z_2$  in der betrachteten Zeichnung eindeutig festgelegt ist. Da wir die relativen Lagen jeder Zusammenhangskomponente bezüglich aller Kreise des Graphen gegeben haben, haben wir insbesondere auch diejenigen relativen Lagen von Zusammenhangskomponenten und Kreisen gegeben, die die relative Lage einer Zusammenhangskomponente bezüglich einer

anderen festlegt. Somit haben wir alle relativen Lagen von Zusammenhangskomponenten zueinander gegeben.

Da wir schon wissen, dass sich jede topologische Einbettung durch eine kombinatorische Einbettung zusammen mit gegebenen relativen Lagen aller Zusammenhangskomponenten zueinander beschreiben lässt, folgt damit die Behauptung.  $\square$

#### 4.2.1.3 Relative Lagen von Knoten zu Kreisen aus einer planaren Kreisbasis

Da ein Graph exponentiell viele Kreise haben kann, ist die Beschreibung einer topologischen Einbettung mit Hilfe relativer Lagen von Knoten und Kreisen ineffizient. In den folgenden Lemmata wird jedoch herausgestellt, dass die Lage eines Knotens bezüglich aller Kreise schon durch die Lage des Knotens bezüglich speziell gewählter Kreise festgelegt wird. Da die Lagen von Knoten bezüglich Kreisen durch boolesche Variablen beschreibbar sind, führt dies dazu, dass sich eine topologische Einbettung genau wie eine kombinatorische Einbettung durch polynomial viele boolesche Variablen kodieren lässt.

Dazu betrachten wir den Vektorraum der Kreise eines Graphen über dem Körper  $\mathbb{F}_2$ , der im Grundlagenkapitel 2.6 eingeführt wurde. Dabei ist ein Kreis nach Definition ein Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad besitzt. Die Verknüpfung  $+$  des Vektorraums ist dadurch gegeben, dass die Kantenmengen zweier Kreise vereinigt werden und anschließend Kanten, die in beiden Kreisen vorkommen, aus der Vereinigung entfernt werden. Die Verknüpfung  $\cdot$  lässt einen Kreis unverändert oder löscht den Kreis. Siehe dazu Abbildung 2.4.

Wir betrachten eine Einbettung  $\mathcal{E}$  eines planaren Graphen. Diese induziert Einbettungen der Blöcke des Graphen. In jedem zweifach zusammenhängenden Block bestehen dabei die Ränder der Facetten aus je einem einfachen Kreis. Bestimmt man alle Facettenkreise eines Blocks und entfernt anschließend einen Kreis aus dieser Menge, so entspricht dies einer Basis der Kreise aus dem entsprechenden Block. Führen wir dies für alle zweifach zusammenhängenden Blöcke durch und vereinigen anschließend die Kreisbasen aller Blöcke, erhalten wir eine Basis der Kreise des Graphen  $G$ . Diese Basis entspricht einer *planaren Kreisbasis*, wie in Kapitel 2 beschrieben.

In der Einbettung  $\mathcal{E}$  können wir alle Facetten im Uhrzeigersinn durchlaufen. Das heißt, dass wir die Ränder der Facetten so durchlaufen können, dass die entsprechende Facette stets rechts vom Rand der Facette liegt. Dies induziert eine Orientierung aller einfachen Kreise, die im Rand einer Facette enthalten sind. Da die Kreise aus der beschriebenen Kreisbasis immer in einem Rand einer Facette enthalten sind, erhalten wir auf diese Weise eine Orientierung der Basiskreise. Wir sagen dazu, dass wir die Basiskreise bezüglich der Einbettung  $\mathcal{E}$  im Uhrzeigersinn orientieren.

**Lemma 4.10.** *Die Orientierung im Uhrzeigersinn aller Kreise einer planaren Kreisbasis bezüglich einer Einbettung legt eine Orientierung für alle einfachen Kreise des zugehörigen Graphen fest.*

*Beweis.* Es sei  $B = \{B_1, \dots, B_n\}$  die gegebene planare Kreisbasis, die bezüglich einer Einbettung  $\mathcal{E}$  im Uhrzeigersinn orientiert sei, und  $K$  ein beliebiger einfacher Kreis des Graphen  $G$ . Dann lässt sich  $K$  als Linearkombination der Basiselemente aus  $B$  darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $K = B_1 + \dots + B_s$  für  $s \in \{1, \dots, n\}$ . Beim Addieren von Kreisen fallen nach Definition der Verknüpfung  $+$  diejenigen Kanten weg, für die die Anzahl der Summanden, die die Kante enthalten, eine gerade Zahl ist. Da  $B$  eine planare Kreisbasis ist, ist jede Kante in höchstens zwei Basiskreisen enthalten. Deshalb gehört jede Kante aus  $K$  zu genau einem Basiskreis  $B_i$  mit  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

Wir orientieren die Kanten aus  $K$  entsprechend der Orientierung der Basiskreise und zeigen, dass dies eine gültige Orientierung des Kreises ergibt. Im Folgenden betrachten wir daher

alle Kanten aus Kreisen als gerichtet. Wir zeigen die Behauptung, indem wir beweisen, dass jeder Knoten  $v$  des gerichteten Kreises  $K$  eine eingehende Kante und eine ausgehende Kante besitzt.

Wir betrachten alle bezüglich  $\mathcal{E}$  im Uhrzeigersinn orientierten Kreise  $B_i$  für  $i \in \{1, \dots, s\}$ , die den Knoten  $v$  enthalten. Das können sogar alle Basiskreise aus dieser Menge sein. Jeder dieser Kreise besitzt eine eingehende und eine ausgehende Kante von  $v$ . Der Knoten  $v$  besitzt also stets genauso viele eingehende wie ausgehende Kanten.

Da in  $K$  der Knoten  $v$  Grad zwei hat, müssen durch die Addition der Basiskreise alle Kanten verschwinden, die nicht in  $K$  enthalten sind. Da wir eine planare Kreisbasis betrachten, und somit jede Kante in höchstens zwei Basiskreisen enthalten sein kann, verschwindet eine Kante durch Addition dann, wenn sie in zwei Summanden der  $B_i, i \in \{1, \dots, s\}$  enthalten ist.

Wir betrachten ein Paar von Basiskreisen, das eine derartige verschwindende Kante enthält. Ein solches Paar teilt sich diese verschwindende Kante. Da beide Kreise in  $\mathcal{E}$  im Uhrzeigersinn orientiert sind, ist die Kante in beiden Kreisen unterschiedlich orientiert. Durch die Addition der Basiskreise verschwinden also Eingangskanten und Ausgangskanten paarweise. Da  $v$  vor der Addition gleich viele Ausgangs- wie Eingangskanten besaß, bleibt zuletzt ein Kantenpaar übrig, welches aus einer Eingangskante und einer Ausgangskante besteht. Das zeigt die Behauptung.  $\square$

Im Folgenden betrachten wir die einfachen Kreise eines planaren Graphen stets als orientiert. Dabei verwenden wir stets die beschriebene durch eine Kreisbasis induzierte Orientierung.

Es sei  $p$  ein Punkt, der in einer Einbettung  $\mathcal{E}$  in einer Facette enthalten sei. Wir zeigen, dass diejenige Facette, die  $p$  enthält, durch die relative Lage des Punktes  $p$  zu den Kreisen einer planaren Kreisbasis von  $G$  eindeutig bestimmt wird. Entscheidend ist, dass die planare Kreisbasis dabei beliebig wählbar ist. Haben wir also eine planare Kreisbasis eines Graphen gegeben und betrachten eine Einbettung  $\mathcal{E}$  des Graphen, in der die Facettenränder nicht mehr die Kreise aus der planaren Kreisbasis enthalten, so ist die den Punkt  $p$  enthaltende Facette dennoch durch die relativen Lagen der Basiskreise und  $p$  festgelegt.

**Lemma 4.11.** *Es sei  $G$  ein planarer Graph,  $\mathcal{E}$  eine Einbettung,  $p$  ein Punkt in  $\mathcal{E}$  und  $B = \{B_1, \dots, B_n\}$  eine planare Kreisbasis von  $G$ . Dann wird die Facette, die  $p$  enthält, durch die relativen Lagen  $\text{pos}_{B_i}(p), i \in \{1, \dots, n\}$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Es seien  $f$  eine Facette in  $\mathcal{E}$  und  $K_1, \dots, K_s$  die zugehörigen Facettenkreise in  $\mathcal{E}$ . Wir können die Facettenkreise addieren und erhalten einen Kreis  $K$ . Diesen Kreis  $K$  können wir als Linearkombination der Kreise aus der gegebenen Kreisbasis darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $K = B_1 + \dots + B_s$  für  $s \in \{1, \dots, n\}$ .

Wir zeigen, dass  $p$  genau dann in  $f$  liegt, wenn die Lage des Punktes und der Facette bezüglich jedem der ersten  $s$  Basiskreise übereinstimmen. Wir zeigen also, dass  $p$  genau dann in  $f$  liegt, wenn die Gleichungen  $\text{pos}_{B_i}(p) = \text{pos}_{B_i}(f)$  für alle  $i \in \{1, \dots, s\}$  erfüllt sind. Daraus folgt insbesondere, dass die Facette, in der  $p$  liegt, durch die relativen Lagen  $\text{pos}_{B_i}(p), i \in \{1, \dots, n\}$  eindeutig bestimmt ist.

Gilt  $\text{pos}_{B_i}(p) \neq \text{pos}_{B_i}(f)$  für ein  $i \in \{1 \dots s\}$ , so liegen  $p$  und  $f$  auf verschiedenen Kreisseiten von  $B_i$ , was zur Folge hat, dass  $p$  nicht in der Facette  $f$  liegen kann.

Zu zeigen bleibt, dass, falls  $p$  nicht in  $f$  liegt, sich die Lagen von  $p$  und  $f$  bezüglich mindestens einem der Kreise  $B_i, i \in \{1, \dots, s\}$  unterscheiden. Dazu definieren wir für  $p$  und entsprechend auch für alle anderen Punkte den *Ortsvektor*  $(\text{pos}_{B_1}(p), \dots, \text{pos}_{B_s}(p))$ , der die Lage von  $p$  bezüglich der ersten  $s$  Basiskreise angibt.



Es sei also  $p$  ein beliebiger Punkt, der außerhalb von  $f$  liege. Wir zeigen, dass  $p$  nicht den gleichen Ortsvektor haben kann wie ein beliebiger Punkt aus der Facette  $f$ . Da alle Punkte aus der Facette  $f$  den gleichen Ortsvektor haben, folgt daraus, dass sich die Lagen von  $p$  und  $f$  bezüglich mindestens einem der Kreise  $B_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$  unterscheiden.

Dazu untersuchen wir zunächst die Ortsvektoren von Punkten außerhalb von  $f$ . Dabei verwenden wir, dass sich  $K$  als Linearkombination  $K = B_1 + \dots + B_s$  für  $s \in \{1, \dots, n\}$  schreiben lässt. Denn daraus folgt, dass jede Kante, die in einem  $B_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$ , aber nicht in  $K$  enthalten ist, beim Bilden dieser Summe wegfallen muss und deshalb in zwei Kreisen der  $B_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$  enthalten ist.

Betrachten wir nun zwei Punkte außerhalb von  $f$ , die in  $\mathcal{E}$  auf zwei verschiedenen Seiten einer Kante liegen, so ist diese Kante nicht in  $K$  enthalten. Dementsprechend ist diese Kante entweder in keinem der Kreise  $B_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$  enthalten oder in zweien dieser Kreise. Gehört die Kante zu keinem der Basiskreise  $B_i$ ,  $s \in \{1, \dots, s\}$ , so unterscheidet sich die relative Lage der beiden Punkte bezüglich dieser Kreise nicht. Gehört die Kante zu zwei der Basiskreise  $B_i$ ,  $s \in \{1, \dots, s\}$ , so unterscheidet sich die relative Lage der beiden Punkte bezüglich dieser beiden Kreise. Für die beiden Ortsvektoren bedeutet dies, dass die Anzahl der Einträge *links* entweder beide gerade oder beide ungerade sind.

Da die Kante und die beiden Punkte beliebig gewählt waren, haben alle Punkte außerhalb von  $f$  in ihren zugehörigen Ortsvektoren entweder ungerade viele Einträge mit Wert *links* oder sie haben alle gerade viele Einträge mit Wert *links*.

Nun betrachten wir einen beliebigen Punkt  $p'$  aus  $f$  und den Punkt  $p$  außerhalb von  $f$ .

Liegt  $p$  in einer an  $f$  angrenzende Facette, liegen  $p'$  und  $p$  auf zwei verschiedenen Seiten des Kreises  $K$ . Dabei ist eine Kante aus  $K$  genau in einem Basiskreis  $B_i$ ,  $s \in \{1, \dots, s\}$  enthalten, da sich  $K$  als Linearkombination der  $B_i$  schreiben lässt und  $B$  eine planare Kreisbasis ist. Es gibt also genau einen Basiskreis  $B_i$ ,  $s \in \{1, \dots, s\}$ , bezüglich dem sich die relativen Lagen von  $p$  und  $p'$  unterscheiden. Deshalb unterscheiden sich die ersten  $s$  Einträge der Ortsvektoren von  $p$  und  $p'$  in einem Eintrag. Insbesondere haben  $p$  und  $p'$  nicht beide gerade oder ungerade viele Einträge mit dem Wert *links*,

Liegt nun  $p$  in einer beliebigen Facette außerhalb von  $f$ , so haben dessen Ortsvektor und der Ortsvektor eines Punktes außerhalb von  $f$ , der in einer an  $f$  angrenzenden Facette liegt, entweder beide gerade oder beide ungerade viele Einträge *links*. Da für einen Punkt, der in einer an  $f$  angrenzenden Facette liegt, gilt, dass er sich in dieser Eigenschaft vom Punkt  $p'$  unterscheidet, gilt dies auch für  $p$ . Somit unterscheiden sich die Ortsvektoren von  $p$  und  $p'$  auch dann, wenn  $p$  nicht in einer an  $f$  angrenzenden Facette liegt.  $\square$

Es sei angemerkt, dass die Voraussetzungen des Lemmas implizieren, dass jeder Punkt aus einer Zeichnung, die die betrachtete Einbettung repräsentiert, tatsächlich einer Facette zugeordnet werden kann. Im Allgemeinen lässt sich jedoch nicht jede Lagenbestimmung von einem Punkt bezüglich einer Menge von Kreisen realisieren, da solche Lagenbestimmungen in sich widersprüchlich sein können. Dies ist in Beispiel 4.10 zu sehen.

**Korollar 4.12.** *Die topologische Einbettung eines planaren Graphen lässt sich durch die kombinatorische Einbettung zusammen mit der relativen Lage jedes Knoten bezüglich der Kreise einer planaren Kreisbasis beschreiben.*

*Beweis.* Es sei  $G$  ein planarer Graph und  $\mathcal{E}$  sei eine topologische Einbettung von  $G$ . Ist der Graph  $G$  zusammenhängend, ist seine topologische Einbettung schon durch seine kombinatorische Einbettung bestimmt und die Aussage folgt direkt.

Im Folgenden sei  $G$  unzusammenhängend. Es seien  $A$  und  $B$  zwei Zusammenhangskomponenten von  $G$ . Da eine kombinatorische Einbettung des Graphen  $G$  gegeben ist, sind die Facetten von  $A$  und  $B$  bezüglich dieser Einbettung bekannt. Wir wollen die relative Lage von  $A$  bezüglich  $B$  ermitteln. Wir müssen also eine Zeichnung, die  $\mathcal{E}$  repräsentiert, aus der Perspektive von  $B$  betrachten und diejenige Facette von  $B$  angeben, in der  $A$  aus der Perspektive von  $B$  enthalten sein muss. Nach Lemma 4.11 wird diese Facette durch die relativen Lagen der Knoten des Graphen zu den Kreisen aus der gegebenen Kreisbasis festgelegt.

Wir können also mit Hilfe der relativen Lagen jedes Knotens zu allen Kreisen einer planaren Kreisbasis alle relativen Lagen je zweier Zusammenhangskomponenten von  $G$  in  $\mathcal{E}$  bestimmen. Diese legen zusammen mit einer gegebenen kombinatorischen Einbettung nach Lemma 4.9 die topologische Einbettung des Graphen fest.  $\square$

#### 4.2.1.4 Lagevariablen

Korollar 4.12 zeigt, dass wir die topologische Einbettung eines Graphen durch die kombinatorische Einbettung des Graphen und zusätzlich den relativen Lagen der Knoten bezüglich der Kreise einer gewählten Kreisbasis beschreiben können. Dabei lässt sich die relative Lage eines Knotens  $v$  und eines Kreises  $K$  durch die boolesche Variable  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(v)$  ausdrücken. Solche Variablen bezüglich Kreisen aus einer gewählten planaren Kreisbasis nennen wir im Folgenden *Lagevariablen*. Da wir für die kombinatorische Einbettung schon in Kapitel 4.1 gezeigt haben, dass sie sich durch eine Belegung von Tripelvariablen beschreiben lässt, ergibt sich für den Schnittgraphen  $G_{\cap}$  der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  das Resultat, dass wir seine Einbettung auch dann durch boolesche Variablen beschreiben können, wenn er unzusammenhängend ist. Diese booleschen Variablen setzen sich dabei aus den Tripelvariablen und Lagevariablen zusammen.

Ähnlich wie schon für Tripelvariablen beschrieben, lässt sich dabei jede Lagevariable  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(v)$  stets durch eine Sehnenvariable ausdrücken. Die Variable  $\text{pos}_k(x)$  gibt an, ob  $x$  rechts oder links von  $K$  eingebettet ist und kann daher die Werte *rechts* und *links* annehmen. Da wir  $\text{pos}_k(x)$  durch eine Sehnenvariable ausdrücken wollen, die die Werte 0 und 1 annehmen kann, soll nun  $\text{pos}_k(x)$  auch 0 und 1 als Werte haben. Wir definieren daher die Variable noch einmal:

$$\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rechterhand von } K \text{ eingebettet ist} \\ 1 & \text{falls } x \text{ linkerhand von } K \text{ eingebettet ist} \end{cases} \quad (4.6)$$

Im Folgenden verwenden wir stets diejenige Definition von  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(x)$ , die für die entsprechende Situation sinnvoll ist.

#### 4.2.2 Zusammenhang von Sehnen- und Lagevariablen

Um die entsprechende Sehne zu finden, mit Hilfe deren Sehnenvariable man die Lage eines Knotens  $v$  bezüglich eines Kreises darstellen kann, betrachten wir zunächst die Struktur von Kreisen in einem außenplanaren zweifach zusammenhängenden Graphen.

**Lemma 4.13.** *Jeder einfache Kreis in einem außenplanaren zweifach zusammenhängenden Graphen entspricht einer Kontraktion seines Hamiltonkreises.*

*Beweis.* Es bezeichne  $K$  den Hamiltonkreis eines zweifach zusammenhängenden, außenplanaren Graphen  $G$  und  $K'$  einen einfachen Kreis aus  $G$ . Dann ist  $K'$  aus Teilgraphen von  $K$  und Sehnen von  $K$  zusammengesetzt. Wir zeigen, dass wir für jede Sehne aus  $K'$  einen

Pfad auf  $K$  finden, der die gleichen Endknoten wie die Sehne besitzt und keinen weiteren Knoten aus  $K'$  enthält. Klar ist, dass eine Sehne  $e$  aus  $K'$  zwei Knoten  $a$  und  $b$  aus  $K$  miteinander verbindet und sich  $K$  aus zwei disjunkten Pfaden  $P_1$  und  $P_2$  von  $a$  nach  $b$  zusammensetzt. Wir nehmen an, dass beide Pfade einen Knoten aus  $K'$  enthalten. Dann müssen diese beiden Knoten in  $K'$  über zwei Pfade miteinander verbunden sein, wobei einer dieser Pfade die Kante  $e$  enthält. Da der andere Pfad weder  $e$  noch  $a$  und  $b$  enthalten darf, muss im anderen Pfad eine Sehne  $e'$  von  $K$  enthalten sein, die zwei Knoten aus  $P_1$  beziehungsweise  $P_2$  miteinander verbindet. Dann sind die Endknoten der Sehnen  $e$  und  $e'$  auf  $K$  alternierend, was nach Lemma 3.2 zu einem Widerspruch führt. Somit können wir für jede Sehne aus  $K'$  einen entsprechenden Pfad auf  $K$  finden, sodass die Sehne der Kontraktion dieses Pfades entspricht. Deshalb entspricht  $K'$  einer Kontraktion von  $K$ . Siehe dazu Abbildung 4.12.  $\square$

Wir betrachten einen zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen mit Hamiltonkreis  $K$  und einfachem Kreis  $K'$ , sowie einen Knoten  $v$ , der nicht in  $K'$  enthalten ist. Ausgehend von  $v$  können wir nun den Hamiltonkreis  $K$  in beide Richtungen traversieren und dabei jeweils den ersten Knoten ermitteln, der in  $K'$  enthalten ist. Diese beiden Knoten nennen wir  $a$  und  $b$ . Den Pfad von  $K$ , der  $v$  enthält und  $a$  und  $b$  miteinander verbindet nennen wir  $P$ .  $a$  und  $b$  sind also die einzigen Knoten aus  $P$ , die in  $K'$  enthalten sind.

Nach Lemma 4.13 muss  $K'$  einer Kontraktion von  $K$  entsprechen. Das heißt, dass in  $K'$  eine Kontraktion des Pfades  $P$  enthalten sein muss. Da weiter kein Knoten aus  $K'$  außer  $a$  und  $b$  im Pfad  $P$  enthalten sind, kann diese Kontraktion nur der Kontraktion zu einer Kante entsprechen, die  $a$  und  $b$  miteinander verbindet. Da diese Kante nicht im Hamiltonkreis  $K$  enthalten ist, ist sie eine Sehne von  $K$ . Diese Sehne nennen wir *Kreissehne* von  $K$  bezüglich  $v$  und nennen sie  $e_K^v$ . Siehe dazu Abbildung 4.13. Dabei lassen wir Indizes gegebenenfalls weg, wenn diese als bekannt vorausgesetzt werden können. Wir werden nun zeigen, dass sich  $\text{pos}_K(v)$  stets durch  $x_{e_K^v}$  ausdrücken lässt.

**Lemma 4.14.** *Für einen zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen mit einem Kreis  $K$ , der den Knoten  $v$  nicht enthält, gilt für je zwei Einbettungen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{E}'$  stets:*

$$(\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(v) = x_{e_K^v}^{\mathcal{E}}) \iff (\text{pos}_K^{\mathcal{E}'}(v) = x_{e_K^v}^{\mathcal{E}'}) \quad (4.7)$$

*Beweis.* Es sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender außenplanarer Graph mit Hamiltonkreis  $K_h$ . Wir betrachten die Belegung der der Variablen  $\text{pos}_K(v)$  und  $x_{e_K^v}$ , die durch  $\mathcal{E}$  induziert wird. Da beides boolesche Variablen sind, gilt entweder  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(v) = x_{e_K^v}^{\mathcal{E}}$  oder  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(v) = x_{e_K^v}^{\mathcal{E}} + 1$ . Gilt die letzte Gleichung, ist dies gleichbedeutend damit, dass beide Variablen unterschiedlich belegt sind.

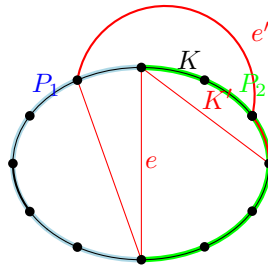


Abbildung 4.12: Die Sehnen  $e$  und  $e'$  sind alternierend

Wir müssen nun zeigen, dass in beiden Fällen die Gleichungen gültig bleiben, wenn wir die durch eine Einbettung  $\mathcal{E}'$  induzierte Variablenbelegungen von  $\text{pos}_K(v)$  und  $x_{e_K^v}$  betrachten. Da wir alle Einbettungen von  $G$  ausgehend von einer beliebigen Einbettung durch Kantenumlegungen erhalten können, untersuchen wir, wie sich die Variablenbelegungen von  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(v)$  und  $x_{e_K^v}^{\mathcal{E}}$  verändern, wenn wir Sehnen von  $K_h$  umlegen.

Klar ist, dass sich die Variable  $x_{e_K^v}^{\mathcal{E}}$  genau dann verändert, wenn man die Sehne  $e_K^v$  umlegt und dass das Umlegen anderer Sehnen die Variablenbelegung von  $x_{e_K^v}^{\mathcal{E}}$  bezüglich einer so erhaltenen Einbettung  $\mathcal{E}'$  nicht beeinflusst. Die Frage ist also, wie sich beim Umlegen der Sehnen von  $K_h$  die Variable  $\text{pos}_K(v)$  verhält.

Die Lage von  $v$  bezüglich  $K$  hängt nur von der Einbettung von  $K$  und  $v$  ab. Das bedeutet, dass das Umlegen einer Sehne von  $K_h$ , die nicht in  $K$  enthalten ist, die Lage von  $v$  bezüglich  $K$  nicht verändert. Wir brauchen also nur noch Sehnen von  $K_h$  zu betrachten, die in  $K$  enthalten sind. Nach Lemma 4.13 entspricht  $K$  einer Kontraktion von  $K_h$ . Da eine Sehne  $(a, b)$  von  $K_h$ , die in  $K$  enthalten ist, nicht in  $K_h$  enthalten sein kann, muss es deshalb einen Pfad auf  $K_h$  mit Endknoten  $a$  und  $b$  geben, den man zur Sehne  $(a, b)$  kontrahieren kann. Durch die Kontraktion eines Pfades zu einer Sehne fallen alle Knoten außer den Endknoten der Sehne weg. Deshalb kann dieser Pfad keinen Knoten von  $K$  enthalten, da dieser durch Kontraktion wegfällt und nicht mehr in  $K$  enthalten sein könnte.

Damit gibt es für jede Sehne  $(a, b)$  von  $K_h$ , die in  $K$  enthalten ist, einen entsprechenden Pfad auf  $K_h$ , der keinen Knoten von  $K$  enthält. Wird nun Sehne  $(a, b)$  umgelegt, so befindet sich anschließend  $(a, b)$  auf der anderen Seite von  $K_h$ . Deshalb verändert sich durch das Umlegen der Sehne die Lage aller Knoten außer  $a$  und  $b$  bezüglich  $K$ , die auf dem entsprechenden Pfad enthalten sind.

Der Knoten  $v$  ist dabei in einem einzigen solchen Pfad aus  $K_h$  enthalten. Deshalb kann sich die Lage von  $v$  bezüglich  $K$  nur durch das Umlegen derjenigen Sehne verändern, die durch Kontraktion dieses Pfades entsteht. Diese Sehne ist nach Definition die Kreissehne  $e_K^v$ .

Damit haben wir gezeigt, dass sich durch Umlegen der Sehnen von  $K_h$  die Variable  $x_{e_K^v}^{\mathcal{E}}$  genau dann verändert, wenn sich auch die Variable  $\text{pos}_K^{\mathcal{E}}(v)$  verändert. Somit bleiben die oben beschriebenen Gleichungen bei der Betrachtung verschiedener Einbettungen erhalten, und es folgt die Behauptung.  $\square$

Auf Grundlage dieser Betrachtungen können wir nun das obige LGS 4.5 erweitern und somit das Problem SEFE auch für unzusammenhängende Schnittgraphen lösen, wenn  $G_1$  und  $G_2$  als zweifach zusammenhängend vorausgesetzt sind.

### 4.2.3 Beschreibung eines Algorithmus bei beliebigem Schnitt

Da wir gezeigt haben, dass wir die topologische Einbettung eines unzusammenhängenden Graphen durch boolesche Variablen beschreiben können, können wir das lineare Gleichungssystem 4.5 aus dem vorherigen Unterkapitel 4.1 so erweitern, dass dessen Lösungen

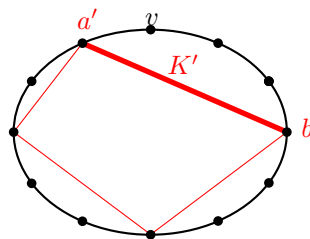


Abbildung 4.13: Die dicke rote Sehne ist die Kreissehne des Hamiltonkreises  $K$  bezüglich  $v$

auch dann alle simultanen Einbettungen der zweifach zusammenhängenden, außenplanaren Graphen  $G_1$  und  $G_2$  induzieren, wenn der Schnittgraph  $G_\cap$  nicht als zusammenhängend vorausgesetzt ist.

Es bezeichne  $K_1$  den Hamiltonkreis von  $G_1$  und  $K_2$  den Hamiltonkreis von  $G_2$ . Nach Satz 4.1 können wir jede Einbettung der zweifach zusammenhängenden Graphen  $G_1$  und  $G_2$  durch eine Belegung ihrer zugehörigen Sehnenvariablen beschreiben. Daher suchen wir im Folgenden diejenigen Belegungen der Sehnenvariablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  beziehungsweise  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$ , die eine simultanen Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  induzieren.

Wir haben dann eine simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  von  $G_1$  und  $G_2$  gegeben, wenn  $G_\cap$  in  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  gleich eingebettet sind. Da  $G_\cap$  nicht zusammenhängend sein muss, verwenden wir den topologischen Einbettungsbegriff. Nach Lemma 4.9 bedeutet dies, dass in beiden Einbettungen einerseits für jeden Knoten  $v$  aus  $G_\cap$  die Reihenfolge der zu  $v$  inzidenten Kanten aus  $G_\cap$  übereinstimmen müssen und andererseits die relativen Lagen der Knoten und Kreise des Schnittgraphen  $G_\cap$  übereinstimmen müssen. Dabei genügt es nach Korollar 4.12, die relativen Lagen von Knoten zu Kreisen aus einer planaren Kreisbasis zu betrachten. Wir erhalten an eine simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  für jedes Tripel  $t$ , jeden Knoten  $v$  von  $G_\cap$  und jeden Kreis  $B$  aus einer planaren Kreisbasis von  $G_\cap$  die Forderungen:

$$t^{\mathcal{E}^1} = t^{\mathcal{E}^2}$$

$$\text{pos}_B^{\mathcal{E}^1}(v) = \text{pos}_B^{\mathcal{E}^2}(v), \text{ sofern } v \text{ nicht in } B \text{ enthalten ist}$$

Im letzten Unterkapitel hatten wir schon ein Gleichungssystem aufgestellt, dessen Lösungsmenge die ersten der beiden Forderungen erfüllt. Wir wenden uns daher der zweiten Forderung zu.

Wir gehen zunächst genau so wie in Kapitel 4.1 vor und bestimmen die zu  $G_1$  und  $G_2$  zugehörigen außenplanaren Einbettung, in der alle Sehnen von  $K_1$  beziehungsweise  $K_2$  rechts von  $K_1$  beziehungsweise  $K_2$  eingebettet sind. Wir setzen also die entsprechenden Sehnenvariablen alle auf den Wert 1. Wir nennen diese Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  beziehungsweise  $\mathcal{E}_2$ .

Dann betten wir den Schnittgraphen  $G_\cap$  beliebig ein und wählen eine planare Kreisbasis  $B$  bezüglich dieser Einbettung. Nun vergleichen wir in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  die Lagen der Knoten aus  $G_\cap$  bezüglich der Basiskreise.

Sind die Lagen eines Knotens  $v$  zu einem Basiskreis  $B$  in beiden Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  gleich, so ist für  $v$  und  $B$  die Forderung der Lagengleichheit aus 4.8 erfüllt. Sie bleibt auch dann erfüllt, wenn wir die relative Lage von  $B$  und  $v$  gleichzeitig in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  verändern. Jede Lage eines Knotens zu einem Kreis lässt sich dabei nach Lemma 4.14 durch die Belegung der entsprechenden Kreissehnenvariablen ausdrücken. Das Beibehalten oder Verändern einer relativen Lage können wir deshalb durch das Beibehalten beziehungsweise das Verändern der Belegung der Variable der entsprechenden Kreissehne realisieren.

In den außenplanaren Referenzeinbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  haben insbesondere alle Kreissehnenvariablen den Wert 1. Soll eine relative Lage in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  entweder in beiden Einbettungen beibehalten oder in beiden Einbettungen verändert werden, heißt das, dass die entsprechenden Kreissehnenvariablen in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  entweder beide den Wert 1 beibehalten oder den Wert 0 annehmen sollen. Wir fordern in diesem Fall für eine simultane Einbettung die Gleichheit der entsprechenden Kreissehnenvariablen.

Stimmen die Lagen in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  nicht überein, so ist die für eine simultane Einbettung geforderte Lagengleichheit nicht erfüllt. Wir müssen in diesem Fall in einer der Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  die Lage von  $v$  und  $B$  verändern, um anschließend zwei Einbettungen zu erhalten, die die geforderte Gleichheit erfüllt. In diesem Fall fordern wir für eine simultane Einbettung

die Ungleichheit der entsprechenden Kreissehnenvariablen und drücken dies durch eine Gleichung boolescher Variablen aus.

Für zwei Einbettungen  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  von  $G_1$  und  $G_2$ , die eine simultane Einbettung induzieren, erhalten wir somit für die Knoten des Schnittgraphen und die Kreise aus einer gewählten planaren Kreisbasis des Schnittgraphen folgende geforderte Gleichungen bezüglich der außenplanaren Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$ :

$$x_{e_K}^{\mathcal{E}^1} = \begin{cases} x_{e_K}^{\mathcal{E}^2} & \text{für } \text{pos}_K^{\mathcal{E}_1}(v) = \text{pos}_K^{\mathcal{E}_2}(v) \\ x_{e_K}^{\mathcal{E}^2} + 1 & \text{für } \text{pos}_K^{\mathcal{E}_1}(v) \neq \text{pos}_K^{\mathcal{E}_2}(v) \end{cases} \quad (4.8)$$

#### 4.2.4 Formulierung des Algorithmus durch ein lineares Gleichungssystem

Wir erweitern das Gleichungssystem 4.5 um diese Gleichungen. Insgesamt fordern wir von den Sehnenvariablen  $x_e^{\mathcal{E}^1}$ ,  $e \in S_{K_1}$  und  $x_e^{\mathcal{E}^2}$ ,  $e \in S_{K_2}$  einer simultanen Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$ , dass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$x_{m(\tau, \mathcal{E}^1)} = \begin{cases} x_{m(\tau, \mathcal{E}^2)} & \text{für } t_\tau^{\mathcal{E}^1} = t_\tau^{\mathcal{E}^2} \\ x_{m(\tau, \mathcal{E}^2)} + 1 & \text{für } t_\tau^{\mathcal{E}^1} \neq t_\tau^{\mathcal{E}^2} \end{cases} \quad \forall \tau \in \bigcup_{i=1}^n T_i \quad (4.9)$$

$$x_{e_K}^{\mathcal{E}^1} = \begin{cases} x_{e_K}^{\mathcal{E}^2} & \text{für } \text{pos}_K^{\mathcal{E}_1}(v) = \text{pos}_K^{\mathcal{E}_2}(v) \\ x_{e_K}^{\mathcal{E}^2} + 1 & \text{für } \text{pos}_K^{\mathcal{E}_1}(v) \neq \text{pos}_K^{\mathcal{E}_2}(v) \end{cases} \quad \forall v \in V, \forall K \in B : v \notin K$$

Dabei bezeichnen  $v_1, \dots, v_n$  die Knoten des gemeinsamen Graphen  $G_\cap$ . Weiter steht  $T_i$  für die Menge aller Kantentripel bezüglich einer gewählten Referenzkante, für die eine Belegung der zugehörigen Tripelvariablen die Reihenfolge der Kanten um den Knoten  $v_i$  nach Lemma 4.2 festlegt. Weiter benennen wir die mittlere Kante einer Tripelvariablen  $t$  bezüglich eines Kantentripels  $\tau$  in einer Einbettung  $\mathcal{E}$  mit  $m(\tau, \mathcal{E})$ . Das ist diejenige Sehnenvariable, durch die sich die Tripelvariable  $t_\tau^{\mathcal{E}}$  nach Lemma 4.4 ausdrücken lässt. Weiter bezeichnet  $B$  eine planare Kreisbasis von  $G_\cap$ ,  $K_1$  den Hamiltonkreis von  $G_1$  und  $K_2$  den Hamiltonkreis von  $G_2$ .

**Lemma 4.15.** *Für zwei zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen  $G_1$  und  $G_2$  ist eine Belegung ihrer zugehörigen Sehnenvariablen genau dann in der Lösungsmenge des LGS 4.9 enthalten, wenn sie eine simultane Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  induziert.*

*Beweis.* Es bezeichne  $K_1$  den Hamiltonkreis von  $G_1$  und  $K_2$  den Hamiltonkreis von  $G_2$ . Es gilt nach Satz 4.1, dass sich jede simultane Einbettung durch die Belegung der Sehnenvariablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  und  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  repräsentieren lässt. Somit wird eine simultane Einbettung, sofern sie existiert, stets von einer Sehnenvariablenbelegung induziert.

Es sei also eine Belegung der Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  und  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  gegeben, die eine simultane Einbettung induziert. Damit haben wir eine zu den Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  gehörige Einbettung  $\mathcal{E}^1$  und eine zu den Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  gehörige Einbettung  $\mathcal{E}^2$  gegeben, für die die Gleichheit  $\mathcal{E}^1|_G = \mathcal{E}^2|_G$  erfüllt ist. Dann müssen nach 4.3 die Reihenfolgen der Tripel aus  $\bigcup_{i=1}^n T_i$  in beiden Einbettungen  $\mathcal{E}^1|_G$  und  $\mathcal{E}^2|_G$  gleich sein und nach Lemma 4.9 auch die relativen Lagen aller Knoten bezüglich aller Kreise gleich sein, insbesondere auch die Lagen bezüglich einer speziellen Kreisbasis. Da das LGS an zwei Einbettungen gerade diese Forderungen stellt, müssen deshalb für  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  von

$G_1$  beziehungsweise  $G_2$  alle Gleichungen des LGS 4.9 erfüllt sein. Also befindet sich die Belegung der Variablen in der Lösungsmenge des LGS.

Wir zeigen umgekehrt, dass eine Variablenbelegung aus der Lösungsmenge des LGS 4.9 eine simultane Einbettung induziert. Es sei also eine Belegung der Variablen  $x_e$ ,  $e \in S_{K_1}$  und  $x_e$ ,  $e \in S_{K_2}$  aus der Lösungsmenge des LGS 4.5 gegeben. Dann erfüllen die dadurch induzierten Einbettungen  $\mathcal{E}^1$  beziehungsweise  $\mathcal{E}^2$  die Gleichungen des obigen linearen Gleichungssystems. Diese stellen sicher, dass die Kantenreihenfolgen um jeden Knoten von  $G_\cap$  sowie alle Lagen der Knoten von  $G_\cap$  zu den Kreisen einer planaren Kreisbasis von  $G_\cap$  gleich sind. Nach Lemma 4.9 sind damit die topologischen Einbettungen  $\mathcal{E}^1|_{G_\cap}$  und  $\mathcal{E}^2|_{G_\cap}$  gleich, und somit ist  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  eine simultane Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$ .  $\square$

**Satz 4.16.** *Das Problem SEFE für zwei zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen lässt sich mit einer Laufzeit in  $O(n^2)$  lösen.*

*Beweis.* Da wir nach Lemma 4.15 alle simultanen Einbettungen zweier zweifach zusammenhängender, außenplanarer Graphen durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems erhalten, lässt sich das Problem SEFE in polynomieller Zeit lösen. Zu zeigen bleibt, dass die Laufzeit in  $O(n^2)$  liegt. Aus Satz 4.6 folgt, dass die Anzahl der Gleichungen, die wir durch Tripelbedingungen erhalten, in  $O(n^2)$  liegt. Zusätzlich finden wir im obigen LGS für jedes Paar eines Knotens aus dem Schnittgraph und eines Kreises aus der betrachteten Basis eine Bedingung, wenn der Knoten nicht im Kreis enthalten ist. Da jeder Kreis einer planaren Kreisbasis einer Facette aus einem eingebetteten zweifach zusammenhängenden Block des Schnittgraphen entspricht, folgt aus Eulers Formel, dass die Anzahl der Kreise in der planaren Kreisbasis in  $O(m)$  liegt. Damit liegt die Anzahl der Gleichungen, die durch die Lagebedingungen von Knoten zu den Kreisen aus der Kreisbasis entstehen, in  $O(m \cdot n)$ . Insgesamt haben wir also  $O(m \cdot n + n^2) \in O(2n)^2 \in O(n)^2$  Bedingungen. Durch obige Gleichungen werden boolesche Variablen miteinander verglichen. Damit entspricht die Lösungsfindung des obigen linearen Gleichungssystems dem Lösen des Problems 2Sat mit Klauseln, die analog zu der Beschreibung in Beweis 4.6 angegeben werden können. Da 2Sat nach [EIS76] in linearer Zeit lösbar ist, folgt die Behauptung.  $\square$

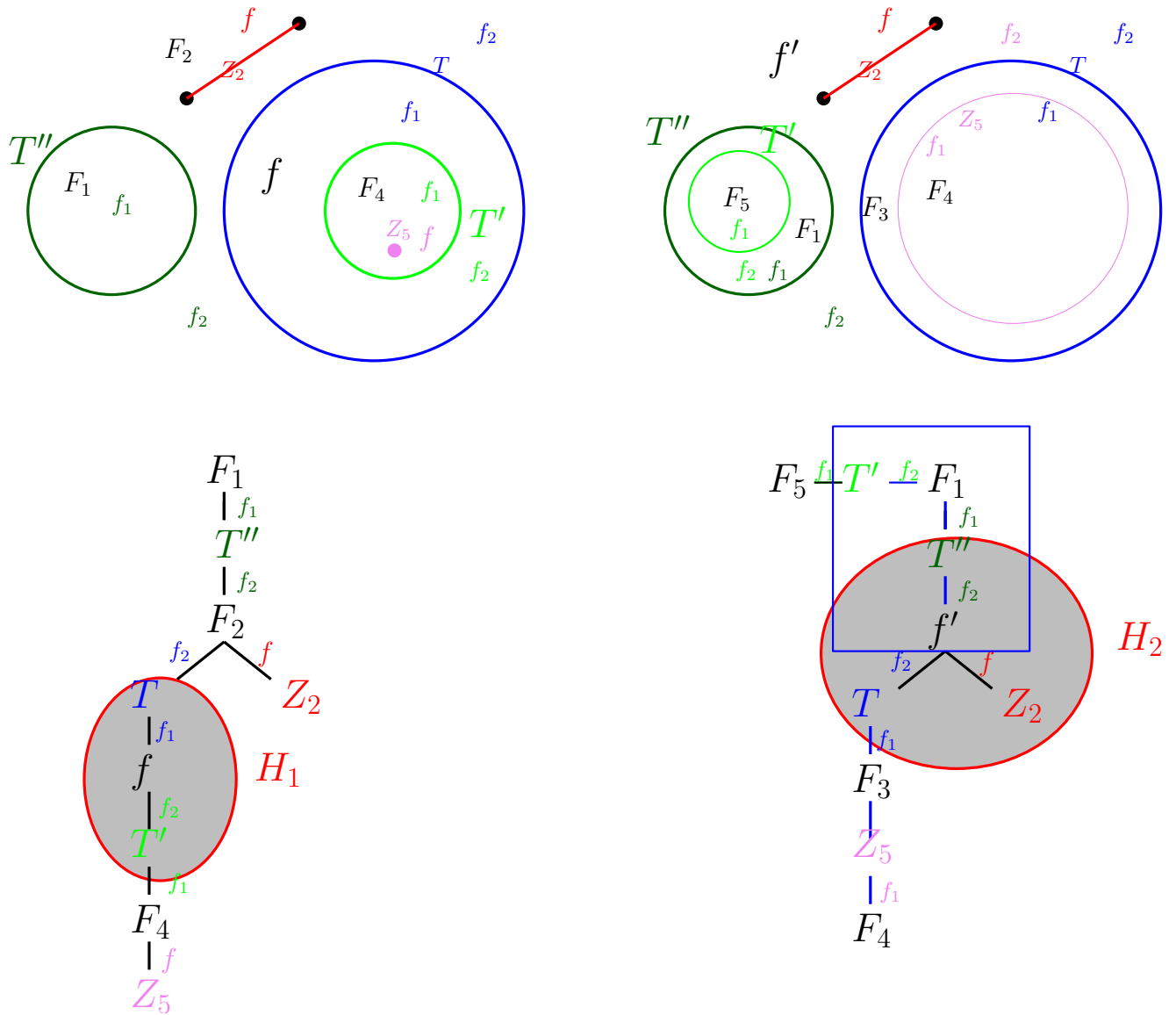


Abbildung 4.14: Während in  $H_1$   $f$  zu  $T'$  adjazent ist, ist in  $H_2$  der Facettenknoten  $f'$  nicht zu  $T'$  adjazent. Der Pfad von  $f'$  zu  $T'$  enthält den Komponentenknoten  $T''$ .  $T$  und  $T'$  werden von der Zusammenhangskomponente  $T''$  in  $B_2$  getrennt. Zugehörige Zeichnungen sind abgebildet.



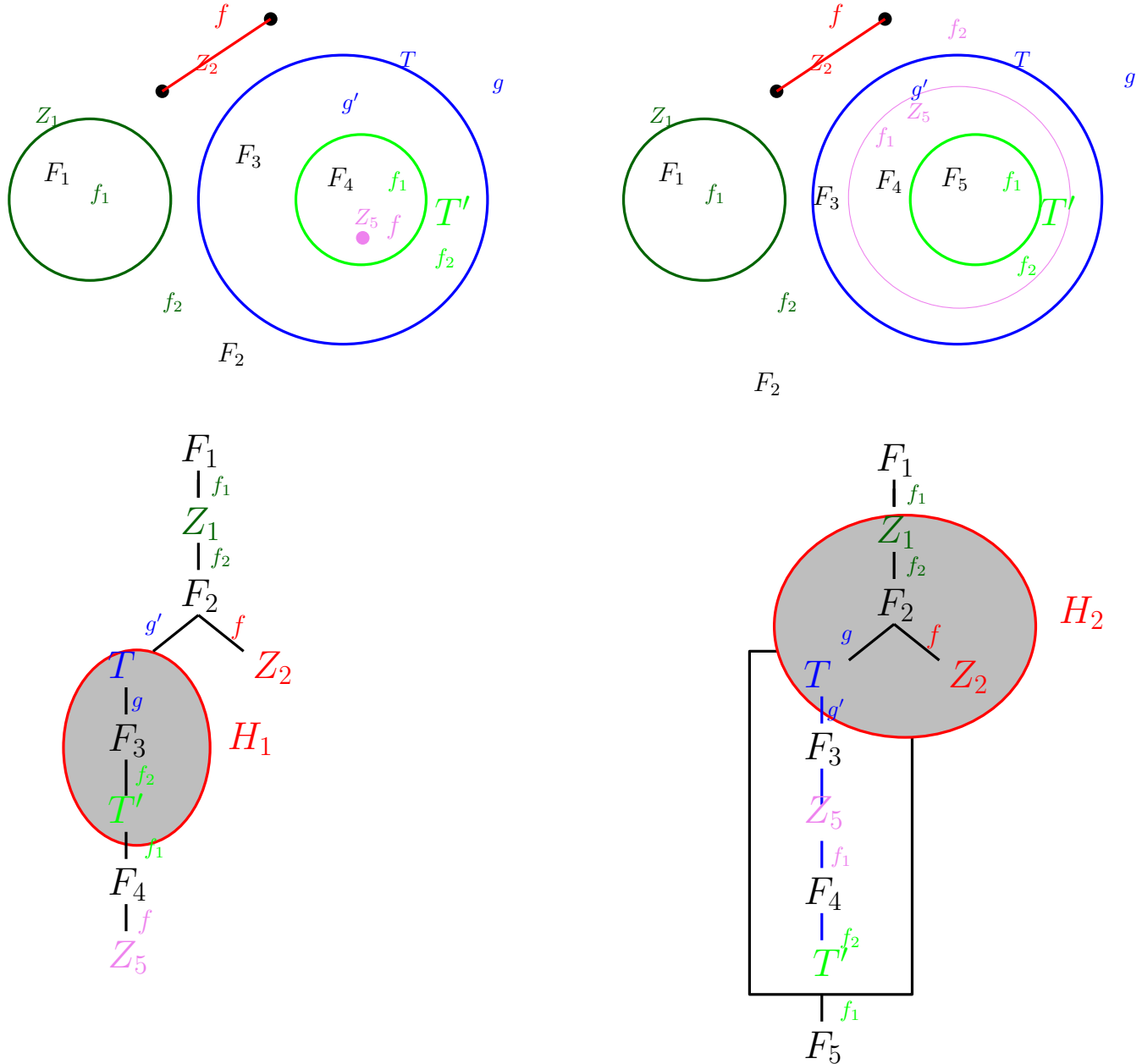


Abbildung 4.15: Zwei topologische Bäume mit Hilfsgraphen  $H_1$  und  $H_2$ , die in beiden Bäumen unterschiedlich sind. Weiter sind noch mögliche zugehörige Zeichnungen angegeben.



## 5. Verallgemeinerung auf Graphen mit einem Schnittknoten

Bei der Untersuchung von simultanen Einbettungen außenplanarer Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit Schnittgraphen  $G_\cap$  haben wir in Kapitel 3.2 festgestellt, dass es stets eine simultane Einbettung gibt, wenn der Schnittgraph zweifach zusammenhängend ist.

Anschließend haben wir  $G_1$  und  $G_2$  als zweifach zusammenhängend vorausgesetzt und beschrieben, wie man in diesem Fall ermitteln kann, ob diese Graphen eine simultane Einbettung besitzen, und im Falle der Existenz haben wir alle simultanen Einbettungen als Lösung eines linearen Gleichungssystems beschreiben können.

Im Grundlagenkapitel wurde erläutert, dass sich jeder Graph aus sogenannten Blöcken zusammensetzt, wobei ein Block entweder eine Brücke, ein isolierter Knoten, oder ein Zweifach zusammenhängender Teilgraph ist. Da das Problem SEFE für zweifach zusammenhängende außenplanare Graphen mit beliebigem Schnittgraphen gelöst ist, ergibt sich die Hoffnung, dass man davon ausgehend die Bedingungen an die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  lockern kann, indem ihnen erlaubt wird, mehrere Blöcke zu haben. So ist es möglich, sich dem allgemeinen Fall Schritt für Schritt anzunähern. Hier betrachten wir den Spezialfall, in dem der eine Graph weiterhin als zweifach zusammenhängend vorausgesetzt ist, während der andere Graph aus einem Schnittknoten und zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken besteht. Während wir auf diese Weise Forderungen an  $G_1$  und  $G_2$  verlieren, setzen wir für den Schnittgraphen  $G_\cap$  voraus, dass er zweifach zusammenhängend ist. Wir werden zeigen, dass in diesem Fall die Eigenschaften der Blöcke, zweifach zusammenhängend zu sein, ausreichen, um das Problem SEFE entscheiden zu können.

Es seien  $G_1$  zweifach zusammenhängend und außenplanar, während  $G_2$  ebenfalls außenplanar sei, aber einen Schnittknoten enthalte und aus zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken  $B_1$  und  $B_2$  bestehe. Weiter sei ihr Schnittgraph  $G_\cap$  zusammenhängend. Siehe dazu Abbildung 5.1. Ist der Schnittknoten nicht im Schnittgraphen  $G_\cap$  enthalten, so muss  $G_\cap$  ganz in einem der Blöcke von  $G_2$  enthalten sein. Für diesen Block und  $G_1$  können wir das Problem SEFE bereits lösen. Im Folgenden soll daher der Schnittknoten in  $G_\cap$  enthalten sein. Da  $B_1$  und  $B_2$  außenplanare, zweifach zusammenhängende Graphen mit jeweils zusammenhängendem Schnitt sind, liegt es nahe, die simultanen Einbettungen von  $B_1$  und  $G_1$  sowie von  $B_2$  und  $G_1$  zu betrachten. Denn nach Satz 4.6 können wir für diese Paare von Graphen ermitteln, ob simultanen Einbettungen existieren und im Falle der Existenz können wir sie nach Lemma 4.5 berechnen. Falls entweder  $B_1$  und  $G_1$  oder  $B_2$  und  $G_1$  keine simultane Einbettungen besitzen, können auch  $G_1$  und  $G_2$  nicht simultan

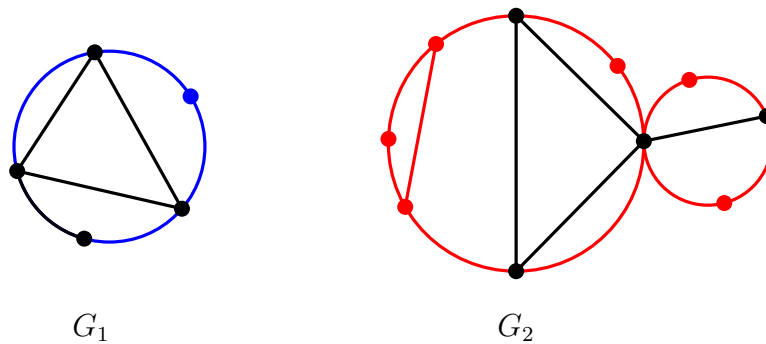


Abbildung 5.1:  $G_2$  besteht nun aus zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken. Der Schnittgraph von  $G_1$  und  $G_2$  ist Schwarz eingezeichnet.

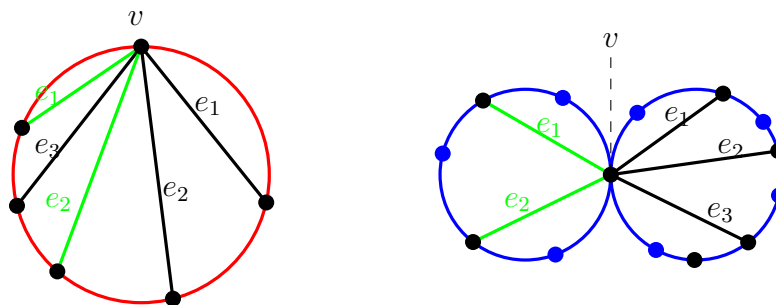


Abbildung 5.2: Der Schnittgraph der dargestellten Graphen setzt sich aus den grünen und schwarzen Kanten zusammen. Die Grünen und Schwarzen Kanten haben in beiden Graphen gleiche Kantenreihenfolgen. Insgesamt unterscheidet sich die Kantenreihenfolge um den Knoten  $v$  in beiden Graphen. Die Graphen sind also blockweise simultan eingebettet, aber insgesamt liegt keine simultane Einbettung beider Graphen vor.

eingebettet werden. Denn für jede simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  von  $G_1$  und  $G_2$  gilt, dass auch  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2|_{B_1})$  und  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2|_{B_2})$  simultane Einbettungen von  $G_1$  und  $B_1$  beziehungsweise  $G_1$  und  $B_2$  sein müssen.

Damit erhalten wir für die Existenz einer simultanen Einbettung von  $G_1$  und  $G_2$  die notwendige Bedingung, dass sie *blockweise* simultan einbettbar sein müssen, das heißt, dass  $B_1$  und  $G_1$  sowie  $B_2$  und  $G_1$  jeweils mindestens eine simultane Einbettung besitzen müssen. Die Frage, die sich stellt, ist, ob diese Bedingung schon hinreichend ist. Das Beispiel aus Abbildung 5.2 zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Eine blockweise simultane Einbettung entspricht nicht immer einer simultanen Einbettung der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ . Das liegt daran, dass die blockweisen Reihenfolgen der Kanten um den Knoten  $v$  die Kantenreihenfolge aller Kanten um  $v$  im Graphen  $G_2$  nicht eindeutig festlegen. Wir untersuchen daher zunächst genauer, welche Einbettungen ein Graph haben kann, der aus zwei Blöcken und einem Schnittknoten besteht.

## 5.1 Planare Einbettungen des Eingangsgraphen mit Schnittknoten

**Lemma 5.1.** *Es sei  $G$  ein zusammenhängender planarer Graph mit einem Schnittknoten  $v$ . Dann lässt sich jede kombinatorische Einbettung von  $G$  durch Angabe der Reihenfolgen der Kanten um  $v$  sowie der kombinatorischen Einbettungen der Blöcke von  $G$  beschreiben.*

*Beweis.* Die kombinatorische Einbettung eines Graphen entspricht der Angabe der Kantenreihenfolgen um alle Knoten.  $G$  besteht aus den Blöcken, die nur den Knoten  $v$  gemeinsam haben. Somit befinden sich für jeden Knoten außer  $v$  alle benachbarten Kanten in einem Block. Deshalb ist die Kantenreihenfolge jedes Knotens außer  $v$  durch die kombinatorische Einbettung des entsprechenden Blocks gegeben. Da wir zur Beschreibung einer kombinatorischen Einbettung von  $G$  fordern, dass die kombinatorischen Einbettungen der Blöcke von  $v$  und zusätzlich für den Knoten  $v$  die Kantenreihenfolge gegeben sein müssen, folgt die Behauptung.  $\square$

Dieses Lemma macht deutlich, dass für die Betrachtung von Einbettungen mehrerer Blöcke mit einem gemeinsamen Schnittknoten  $v$  vor allem die Reihenfolge der Ausgangskanten von  $v$  interessant sind, da wir diese nicht wie die Reihenfolgen der Kanten anderer Knoten durch die kombinatorischen Einbettungen der jeweiligen Blöcke gegeben haben. Die Frage ist, welche Reihenfolgen  $R$  der Kanten um  $v$  verhindern, dass der gesamte Graph planar eingebettet werden kann, selbst wenn es planare Einbettungen der Blöcke gibt, in denen die Reihenfolge der Kanten um  $v$  durch  $R$  induziert ist. Siehe dazu Beispiel 5.2

Um diesen Sachverhalt zu untersuchen, definieren wir zwei Begriffe. Wir nennen eine *Kantenreihenfolge  $R$  um  $v$  für  $G$  realisierbar*, wenn es eine planare Einbettung von  $G$  gibt, in der die Kanten um  $v$  die Reihenfolge  $R$  haben.

Betrachten wir Kanten um  $v$  mit Kantenreihenfolge  $R$ , so nennen wir eine Teilmenge  $T$  dieser Kanten in  $R$  *konsekutiv*, wenn beim Durchlaufen der Kanten um  $v$  alle Kanten aus  $T$  direkt aufeinander folgen, das heißt, für zwei Elemente  $t_1, t_2 \in T$  und zwei Elemente  $m_1, m_2 \in M \setminus T$  gilt, dass von  $R$  niemals die Reihenfolgen  $(m_1, t_1, m_2, t_2)$  oder  $(m_2, t_1, m_1, t_2)$  induziert werden. Die durch  $R$  induzierte Reihenfolge von  $T$  schreiben wir dabei als  $R|_T$ . Entsprechend bezeichnen wir die durch  $R$  induzierte Reihenfolge der Kanten um  $v$ , die in einem Teilgraphen  $U$  enthalten sind, mit  $R|_U$ . Die Menge aller Kanten, die zu  $v$  inzident sind und gleichzeitig in einem Teilgraphen  $U$  enthalten sind, bezeichnen wir mit  $E(U)^v$ .

**Lemma 5.2.** *Es sei  $G$  ein planarer Graph, der aus einem Schnittknoten und zwei Blöcken  $B_1$  und  $B_2$  bestehe, sowie  $R$  eine Reihenfolge von Kanten aus  $G$  mit Endknoten  $v$ . Dann gilt:*

$$R \text{ ist realisierbar für } G \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i. } R|_{B_1} \text{ und } R|_{B_2} \text{ sind realisierbar für } B_1 \text{ beziehungsweise } B_2 \\ \text{ii. } E(B_1)^v \text{ sowie } E(B_2)^v \text{ sind konsekutiv in } R \end{cases} \quad (5.1)$$

*Beweis.* Es sei  $R$  realisierbar für  $G$ . Das heißt, dass es eine Einbettung  $\mathcal{E}$  von  $G$  gibt, in der die Reihenfolge der betrachteten Kanten um  $v$  durch  $R$  beschrieben wird. Dann gilt offensichtlich, dass für  $B_1$  beziehungsweise  $B_2$  die induzierten Reihenfolgen  $R|_{B_1}$  und  $R|_{B_2}$  realisierbar sind. Zu zeigen bleibt, dass  $E(B_1)^v$  sowie  $E(B_2)^v$  konsekutiv in  $R$  sind.

Wir nehmen an, dass  $E(B_1)^v$  nicht konsekutiv in  $R$  ist. Dann muss es je zwei Kanten  $e_1$  und  $e_2$  aus  $B_1$  beziehungsweise  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_2$  aus  $B_2$  mit Endknoten  $v$  geben, deren durch  $R$  induzierte Reihenfolge um  $v$  nicht konsekutiv ist. Das heißt, wir erhalten ohne Beschränkung der Allgemeinheit die induzierte Kantenreihenfolge  $(e_1, \bar{e}_1, e_2, \bar{e}_2)$  um  $v$ .

Da  $B_1$  und  $B_2$  zusammenhängende Teilgraphen sind, muss es in beiden Graphen zwischen je zwei Knoten einen Pfad geben, der sie verbindet.  $e_1$  und  $e_2$  haben den gemeinsamen Endknoten  $v$  und je einen weiteren Endknoten. Diese beiden weiteren Endknoten müssen also in  $B_1$  durch einen Pfad miteinander verbunden sein. Deshalb gibt es in  $B_1$  einen Kreis,

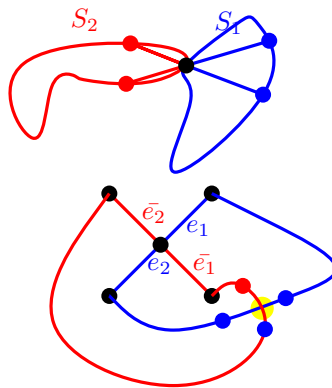


Abbildung 5.3: Abgebildet sind die Schnittkomponenten  $B_1$  und  $B_2$  und unten die angemessene Kantenreihenfolge. Die Stelle, wo in der Zeichnung ein Schnitt zweier Kanten entsteht, ist gelb markiert.

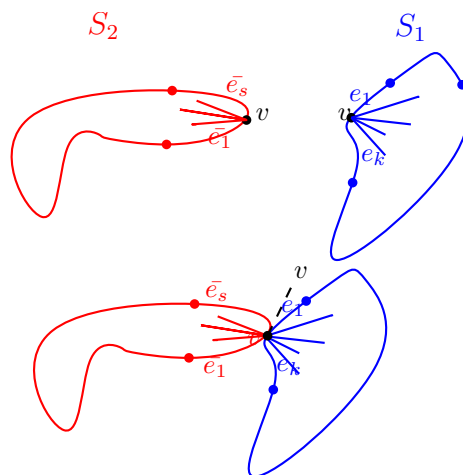


Abbildung 5.4: Wir haben  $B_1$  und  $B_2$  so eingebettet, dass wir durch das zusammenfügen der beiden Zeichnungen im Schnittknoten  $v$  eine Einbettung des gesamten Graphen erhalten, die die gewünschte Kantenreihenfolge um den Schnittknoten  $v$  realisiert.

der durch den Knoten  $v$ , die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  und den eben beschriebenen Pfad gebildet wird. Auf die gleiche Art finden wir in  $B_2$  einen Kreis, der  $v$ ,  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_2$  enthält.

Diese beiden Kreise müssen in jeder planaren Einbettung von  $G$  planar eingebettet sein. Das bedeutet, dass die Kreise jeweils auf einer Kreisseite des anderen Kreises liegen müssen, da sich sonst Kanten kreuzen. Siehe dazu Abbildung 5.3 Obige Kantenreihenfolge um  $v$  besagt, dass sich in der Einbettung  $\mathcal{E}$  die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  zwischen den Kanten  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_2$  befinden müssen. Das bedeutet, dass sich  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_2$  auf verschiedenen Seiten des Kreises in  $B_1$  befinden. Das liefert den gesuchten Widerspruch.

Es seien umgekehrt durch  $R$  induzierte, für beide Blöcke realisierbare konsekutive Reihenfolgen  $R|_{B_1}$  und  $R|_{B_2}$  der Kanten aus den Blöcken gegeben. Wir müssen zeigen, dass wir eine planare Einbettung von  $G$  finden, in der die Kantenreihenfolge um  $v$  durch  $R$  gegeben ist. Es seien  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  zwei planare Einbettungen von  $B_1$  und  $B_2$ , die die konsekutiven Reihenfolgen  $R|_{B_1}$  beziehungsweise  $R|_{B_2}$  realisieren. Wir betrachten die Kantenreihenfolge  $R$ . Da die Kanten der einzelnen Blöcke konsekutiv ist, können wir die Reihenfolge ohne Beschränkung der Allgemeinheit angeben als  $(e_1, \dots, e_k, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s)$ , wobei  $(e_1, \dots, e_k)$  beziehungsweise  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s)$  die induzierten Kantenreihenfolgen in  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  beschreiben.

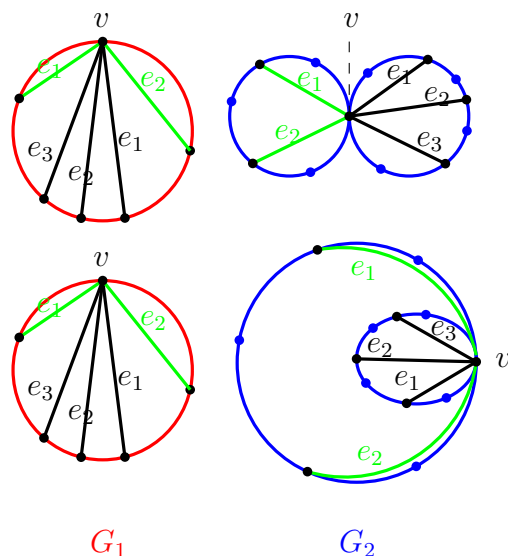


Abbildung 5.5: Oben: zwei Einbettungen der Graphen  $G_1$  und  $G_2$ , in denen die Kanten um  $v$  im zweifach zusammenhängenden Graphen  $G_1$  konsekutiv sind und zusätzlich die beiden Graphen blockweise simultan eingebettet sind. Unten: Einbettung von  $G_2$ , um eine simultane Einbettung zu erhalten.

Besteht eine der beiden Blöcke nur aus einer Kante, so folgt die Behauptung direkt, denn wir können die Kante in jede an  $v$  anliegende Facette des anderen Blocks einbetten und dabei auch die Facette wählen, sodass wir insgesamt die Reihenfolge  $R$  der Kanten um  $v$  erhalten. Wir können also davon ausgehen, dass beide Blöcke aus mehr als einer Kante bestehen. Sie sind dabei insbesondere zusammenhängend. Wir betrachten die Einbettungen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  und wollen eine Einbettung  $\mathcal{E}$  für den Graphen  $G$  finden, in der wir die Reihenfolge  $R$  um  $v$  realisieren. Da in  $R$  die Kanten von  $B_2$  zwischen  $e_1$  und  $e_k$  liegen, betrachten wir die Kanten  $e_1$  und  $e_k$ . Da diese Kanten in  $\mathcal{E}_1$  in der Kantenreihenfolge um  $v$  aufeinander folgen und  $B_1$  zusammenhängend ist, gibt es eine Facette, in deren Rand  $v$ ,  $e_1$  und  $e_2$  enthalten sind. Wir betrachten diese Facette als äußere Facette der Einbettung  $\mathcal{E}_1$ .

Entsprechend liegen die Kanten von  $B_1$  zwischen  $\bar{e}_1$  und  $\bar{e}_s$ . Wir suchen die Facette, an der  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_s$  und  $v$  anliegen und betrachten diese als äußere Facette der Einbettung  $\mathcal{E}_2$ .

Nun erhalten wir die gesuchte Einbettung  $\mathcal{E}$ , indem wir den Block  $B_2$  in die äußere Facette von  $\mathcal{E}_1$  einbetten, dass aus der Perspektive von  $B_2$  der Block  $B_1$  in der äußeren Facette von  $\mathcal{E}_2$  eingebettet ist. Siehe dazu Abbildung 5.4.  $\square$

## 5.2 Konsekutivität der Kantenreihenfolge um den Schnittknoten

Lemma 5.2 beantwortet die oben gestellte Frage, wann eine Kantenreihenfolge um den Knoten  $v$  eine planare Einbettung verhindert, selbst wenn die beiden blöcke die induzierten Kantenreihenfolgen realisieren.

Auf dieser Grundlage bauen wir nun den gesuchten Algorithmus auf, indem wir nicht nur Forderungen bezüglich der einzelnen Blöcke, sondern auch Forderungen an die Reihenfolge der Kanten um  $v$  stellen. Sind  $G_1$  und  $G_2$  blockweise simultan eingebettet, liefert dabei obiges Lemma das entscheidende Resultat, dass wir für den Graphen  $G_2$  mit enthaltenen Schnittknoten für jede beliebige Reihenfolge  $R$  der Kanten um  $v$  eine planare Einbettung finden, sofern die Reihenfolge  $R$  für die Blöcke realisierbar ist und die Kanten der Blöcke

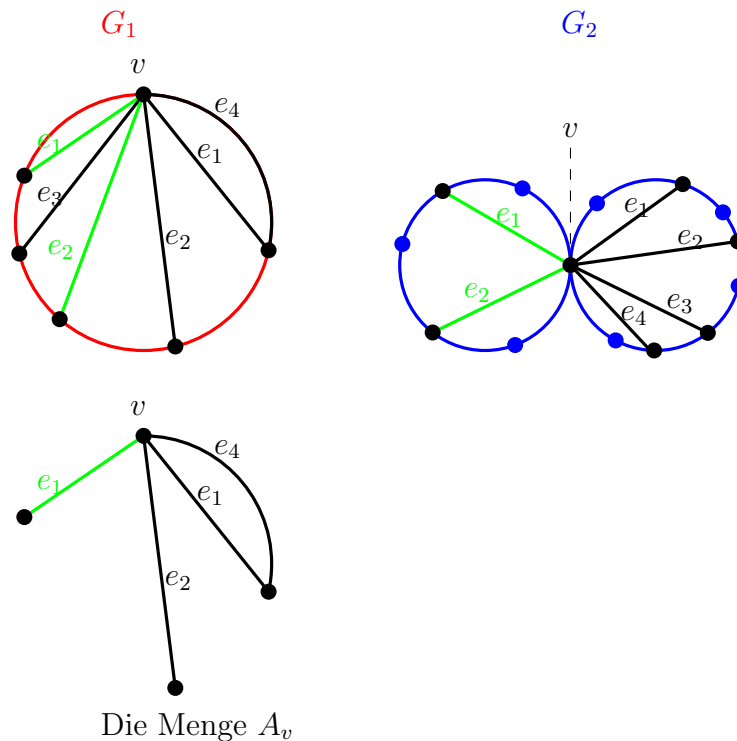


Abbildung 5.6: Der Schnittgraph ist schwarz eingezeichnet. Die Menge  $A_v$  erhält man, indem man in  $G_1$  die Kanten um  $v$  von  $v$  ausgehend im und gegen den Uhrzeigersinn traversiert und alle Kanten hinzufügt, die die gleiche Farbe haben, wie ihr Vorgänger. Die Kanten aus  $A_v$  sind als Teilgraph abgebildet.

konsekutiv in  $R$  sind. Stellen wir an eine Einbettung  $\mathcal{E}^1$  des zweifach zusammenhängenden Graphen  $G_1$  zusätzlich die Forderung, dass die Kanten der Blöcke  $B_1$  und  $B_2$ , die im Schnittgraphen  $G_\cap$  enthalten sind, konsekutiv in der Kantenreihenfolge sein müssen, die durch  $\mathcal{E}^1$  für den Schnittgraphen induziert wird, so finden wir zu jeder solchen Einbettung mindestens eine entsprechende Einbettung von  $G_2$ , die die konsekutive Reihenfolge der Kanten aus den Blöcken realisiert.

Wir wollen die beschriebene Forderung durch Sehnenvariablen beschreiben. Dazu betrachten wir den Graphen  $G_1$  mit seinem Hamiltonkreis  $K$ . Da wir das LGS 4.9 aus dem Unterkapitel 4.2 verwenden wollen, betrachten wir wie dort die Einbettung  $\mathcal{E}_1$  von  $G_1$ , in der alle Sehnen rechts von  $K$  eingebettet sind.

Der Schnittknoten  $v$  von  $G_2$  muss im Hamiltonkreis  $K$  von  $G_1$  enthalten sein. Jede Ausgangskante von  $v$  aus dem Schnittgraphen ist in einem Block von  $G_2$  enthalten. Es seien  $\{e_1, \dots, e_s\}$  die ausgehenden Kanten von  $v$ . Wir betrachten die beiden ausgehenden Kanten von  $v$ , die in  $K$  enthalten sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind dies die Kanten  $e_1$  und  $e_s$ . Wir betrachten zunächst  $e_1$  und traversieren ausgehend von ihm alle des Schnittgraphen Kanten um  $v$  so, dass wir als letztes bei der Kante  $e_s$  ankommen. Die Kanten, die in keinem der Blöcke von  $B_2$  enthalten sind, werden dabei ignoriert. Wir bilden eine Sehnenmenge  $A_v$ , indem wir die erste Kante hinzufügen, die in einem der Blöcke von  $B_2$  enthalten ist. Dies sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Kante  $e_1$ . Jede Kante des Schnittgraphen  $e_i$  fügen wir dann nach und nach hinzu, wenn sie im jeweils gleichen Block wie  $e_1, \dots, e_{i-1}$  enthalten ist. Sind wir bei  $e_s$  angekommen, so fügen wir  $e_s$  zur Sehnenmenge  $A_v$  hinzu. Anschließend traversieren wir die Sehnen noch einmal in umgekehrter Reihenfolge. Dabei wird die Sehne  $e_i$  dann zu  $A_v$  hinzu gefügt, wenn alle Sehnen  $e_{i+1}, \dots, e_s$  im gleichen Block von  $G_2$  liegen. Siehe dazu Abbildung



5.6 Betrachten wir die Reihenfolge der Kanten aus  $A_v$ , so ist deren Reihenfolgen in der betrachteten Einbettung nach Konstruktion konsekutiv. Sie ist es auch dann noch, wenn man beliebige Sehnen umlegt. Das liegt daran, dass beim Traversieren des zu  $G_1$  gehörenden Hamiltonkreises die Endknoten der Sehnen aus  $A_v$ , die zu Sehnen des gleichen Blocks gehören, direkt aufeinander folgen. Es gibt also von den Sehnen aus  $A_v$  keine induzierte Knotenreihenfolge auf dem Hamiltonkreis, in der sich Endknoten von Sehnen verschiedener Blöcke abwechseln. Deshalb lässt sich der Graph, der aus dem Hamiltonkreis von  $G_1$  und der Sehnenmenge  $A_v$  besteht, durch die Vereinigung von höchstens einem Kreissegment des Hamiltonkreises und zweier disjunkter Teilgraphen beschreiben, die beide zweifach zusammenhängend und außenplanar sind und jeweils nur Sehnen eines Blocks enthalten. Betten wir diese beiden Teilgraphen beliebig ein, so ergibt dies immer eine konsekutive Reihenfolge der Sehnen aus  $A_v$ . Das Einbetten der Teilgraphen entspricht dabei gerade dem Umlegen der Sehnen aus  $A_v$ . Somit ist die Konsekutivität der Kanten um  $v$  in einer beliebigen Einbettung unabhängig von der Sehnenmenge  $A_v$ .

Da nach Lemma 3.2 die Sehnen von  $G_1$  nicht alternierend sein können, lässt sich die oben beschriebene Sehnenmenge  $A_v$  auch dadurch beschreiben, dass wir den Hamiltonkreis  $K$  von  $G_1$  ausgehend von  $v$  in beide Richtungen so lange traversieren, bis der erste Knoten erreicht wird, der sich nicht im gleichen Block befindet-, wie sein Vorgänger. Anschließend fügen wir dann für all diese Knoten, die durch eine Sehne mit  $v$  verbunden sind, diese Sehnen zur Menge  $A_v$  hinzu.

**Lemma 5.3.** *Es sei  $G$  ein zweifach zusammenhängender, außenplanarer Graph,  $K$  der zugehörige Hamiltonkreis,  $S_K$  seine Sehnenmenge,  $v$  ein Knoten aus  $G$  und  $M_1$  sowie  $M_2$  zwei disjunkte Kantenmengen mit Endknoten  $v$ . Dann sind  $M_1$  und  $M_2$  in der durch  $\mathcal{E}$  induzierten Reihenfolge der Kanten aus  $M_1 \cup M_2$  um  $v$  genau dann konsekutiv, wenn die Einbettung  $\mathcal{E}$  folgende Gleichungen erfüllt:*

$$\begin{aligned} x_e^{\mathcal{E}} &= x_{\bar{e}}^{\mathcal{E}}, \text{ für } e \text{ und } \bar{e} \in M_1 \cap (S_K \setminus A_v) \\ x_e^{\mathcal{E}} &= x_{\bar{e}}^{\mathcal{E}}, \text{ für } e \text{ und } \bar{e} \in M_2 \cap (S_K \setminus A_v) \\ x_e^{\mathcal{E}} &= x_{\bar{e}}^{\mathcal{E}} + 1, \text{ für } e \in M_1 \cap (S_K \setminus A_v) \text{ und } \bar{e} \in M_2 \cap (S_K \setminus A_v) \end{aligned}$$

*Beweis.* Es seien für die Einbettung  $\mathcal{E}$  obige Gleichungen erfüllt. Diese besagen, dass alle Sehnen eines Blocks, die nicht in  $A_v$  enthalten sind, auf einer gemeinsamen Seite von  $K$  eingebettet sind und dass je zwei Sehnen, die nicht in  $A_v$  enthalten sind und nicht beide zum gleichen Block gehören, niemals auf einer gemeinsamen Kreisseite von  $K$  eingebettet sind.

Betrachten wir  $T := G \setminus A_v$ , so gilt für  $\mathcal{E}|_T$ , dass die Sehnen aus  $M_1$  auf der einen Kreisseite und die Sehnen aus  $M_2$  auf der anderen Kreisseite von  $K$  eingebettet sein müssen. Wir erhalten für  $T$  die induzierte konsekutive Kantenreihenfolge  $(A, B)$  oder  $(B, A)$ , wobei  $A$  einer Reihenfolge von Kanten aus  $M_1$  und  $B$  einer Reihenfolge von Kanten aus  $M_2$  entspreche.

Wir betrachten  $A_v$ . Es ist bekannt, dass alle Sehnen aus dieser Menge in jeder beliebigen Einbettung und somit auch in  $\mathcal{E}$  konsekutiv in der Kantenreihenfolge um  $v$  eingebettet sind. Somit induziert  $\mathcal{E}$  für  $A_v$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Reihenfolge konsekutive Kantenreihenfolge  $(A', B')$ , wobei wieder  $A'$  einer Reihenfolge von Kanten aus  $M_1$  und  $B'$  einer Reihenfolge von Kanten aus  $M_2$  entspreche.

Insgesamt ergibt sich damit für  $\mathcal{E}$  entweder die Kantenreihenfolge  $(A, A', B, B')$  oder  $(A', A, B', B)$ . Dies sind konsekutive Kantenreihenfolgen. Es sei angemerkt, dass dies auch dann gültig ist, wenn  $M_1$  oder  $M_2$  kein Element enthält. Ebenfalls vereinfacht sich das Problem, wenn  $A_v$  nur aus Sehnen eines Blocks besteht.

Es sei umgekehrt eine Einbettung  $\mathcal{E}$  gegeben, sodass  $M_1$  und  $M_2$  in der Reihenfolge um  $v$  konsekutiv sind. Wir müssen zeigen, dass dann obige Gleichungen erfüllt sein müssen. Ist eine der Sehnenmengen  $M_1 \setminus A_v$  oder  $M_2 \setminus A_v$  leer, so haben wir keine Gleichungen gegeben und die Behauptung folgt direkt. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass  $M_1$  und  $M_2$  jeweils mindestens eine Sehne enthalten, die nicht in  $A_v$  liegt.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $A_v$  Sehnen aus  $M_1$  und  $M_2$  enthält und ohne Beschränkung der Allgemeinheit in  $\mathcal{E}$  die Reihenfolge  $(A', B')$  um  $v$  besitze. Wir nehmen an, dass es eine Sehne  $e_1$  aus  $M_1 \setminus A_v$  und eine Sehne  $e_2$  aus  $M_2 \setminus A_v$  gibt, die auf einer gemeinsamen Kreisseite von  $K$  eingebettet sind. Dann ergibt sich die induzierte Kantenreihenfolge  $(A', e_1, e_2, B')$  oder  $(A', e_2, e_1, B')$ . In beiden Reihenfolgen sind  $A' \cup \{e_1\}$  und  $B' \cup \{e_2\}$  nicht konsekutiv, was der Behauptung widerspricht.

Analog nehmen wir an, dass es zwei Sehnen  $e$  und  $e'$  desselben Blocks gibt, die nicht in  $A_v$  enthalten sind, aber auf zwei verschiedenen Seiten von  $K$  liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien beide Kanten in  $M_1$  enthalten. Dann ergibt sich die induzierte Kantenreihenfolge  $(A', e, B', e')$  oder  $(A', e, B', e')$ . Da  $e$  und  $e'$  nicht zur Menge  $A_v$  gehören sollen, muss es in  $\mathcal{E}$  zwei weitere Kanten aus der Menge  $M_2$  geben, die in der Reihenfolge um  $v$  zwischen  $A'$  und  $e$  und zwischen  $e'$  und  $A$  liegen. Es ergeben sich die Reihenfolgen  $(A', w, e, B', e', w')$  beziehungsweise  $(A', w, e, B', e', w)$ , wobei  $w$  und  $w'$  nach Konstruktion von  $A_v$  aus der Menge  $M_2 \setminus A_v$  stammen müssen. Hierbei sind nun  $A' \cup \{e, e'\}$  und  $B \cup \{w, w'\}$  nicht mehr konsekutiv.

Nun betrachten wir den Fall, dass  $A_v$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur Sehnen aus der Menge  $M_1$  enthält. Die Menge  $A_v$  lässt sich in zwei Mengen partitionieren. Sie bestehen aus den jeweiligen Sehnen, deren Endknoten als Erstes angetroffen werden, wenn man den Hamiltonkreis ausgehend von  $v$  im- beziehungsweise gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Dementsprechend besitzt  $A_v$  in  $\mathcal{E}$  die induzierte Kantenreihenfolge  $(A', A'')$ , wobei  $A'$  die Reihenfolge der Sehnen aus  $A_v$  aus der einen beschriebenen Menge und  $A''$  die Reihenfolgen der Sehnen aus der anderen beschriebenen Menge bezeichne.

Wir nehmen an, dass es eine Sehne  $e_1$  aus  $M_1 \setminus A_v$  und eine Sehne  $e_2$  aus  $M_2 \setminus A_v$  gibt, die auf einer gemeinsamen Kreisseite von  $K$  eingebettet sind. Dann ergibt sich die induzierte Kantenreihenfolge  $(A', e_1, e_2, A'')$  oder  $(A', e_2, e_1, A'')$ . Dann muss es nach Konstruktion von  $A_v$  noch eine weitere Kante  $w$  aus  $M_2$  geben, die zwischen  $e_1$  und  $A'$  beziehungsweise  $e_1$  und  $A''$  liegt, da sonst  $e_1$  zur Menge  $A_v$  gehören müsste. Dann sind die resultierenden Reihenfolgen nicht mehr konsekutiv.

Analog nehmen wir an, dass es zwei Sehnen  $e$  und  $e'$  desselben Blocks gibt, die nicht in  $A_v$  enthalten sind, aber auf zwei verschiedenen Seiten von  $K$  liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien beide Kanten in  $M_1$  enthalten. Dann ergibt sich die induzierte Kantenreihenfolge  $(A', e, A'', e')$  oder  $(A', e, A'', e')$ . Da  $e$  und  $e'$  nicht zur Menge  $A_v$  gehören sollen, muss es in  $\mathcal{E}$  zwei weitere Kanten aus der Menge  $M_2$  geben, die in der Reihenfolge um  $v$  zwischen  $A'$  und  $e$  und zwischen  $e'$  und  $A$  liegen. Es ergeben sich die Reihenfolgen  $(A', w, e, A'', e', w')$  beziehungsweise  $(A', w, e, A'', e', w)$ , wobei  $w$  und  $w'$  nach Konstruktion von  $A_v$  aus der Menge  $M_2 \setminus A_v$  stammen müssen. Hierbei sind nun  $A_v \cup \{e, e'\}$  und  $\{w, w'\}$  nicht mehr konsekutiv.  $\square$

In Abbildung 5.6 haben wir die Menge  $A_v$  konstruiert und können für die dortigen Einbettungen diejenigen Gleichungen angeben, die jede Einbettung von  $G_1$  erfüllen muss, in

denen die Reihenfolgen der Kanten der einzelnen Blöcke konsekutiv in der Reihenfolge um den Knoten  $v$  sein sollen. Im Beispiel ist nur die grüne Kante  $e_2$  und die schwarze Kante  $e_3$  nicht in  $A_v$  enthalten. Wir erhalten daher nur eine geforderte Gleichheit:  $x_{e_3} = x_{e_2} + 1$ . Siehe dazu Abbildung 5.7.

### 5.3 Beschreibung eines Algorithmus mit zugelassenem Schnittknoten

Auf Grundlage des letzten Abschnitts können wir nun einen Algorithmus angeben, der das Problem SEFE für zwei außenplanare Graphen  $G_1$  und  $G_2$  löst, wenn  $G_1$  zusätzlich zweifach zusammenhängend ist und  $G_2$  aus einem Schnittknoten und zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken  $B_1$  und  $B_2$  besteht.

Dazu stellen wir zunächst für die Graphen  $G_1$  und  $B_1$  sowie für  $G_1$  und  $B_2$  das jeweilige lineare Gleichungssystem 4.5 aus Kapitel 4.1 auf und fügen sie in ein gemeinsames Gleichungssystem ein. Das resultierende System besitzt als Lösungsmenge die blockweisen simultanen Einbettungen von  $G_1$  und  $G_2$ . Anschließend fügen wir für die Einbettung des Graphen  $G_1$  die Gleichungen aus Lemma 5.3 hinzu.

Für den Schnittknoten  $v$  aus  $G_2$ , der zugehörigen Sehnenmenge  $A_v$  und den Sehnenmengen  $M_1$  und  $M_2$  fordern wir also für jede simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  zusätzlich die Erfüllung folgender Gleichungen:

$$x_e^{\mathcal{E}^1} = x_{\bar{e}}^{\mathcal{E}^1}, \text{ für } e \text{ und } \bar{e} \in M_1 \cap (S_k \setminus A_v) \quad (5.2)$$

$$x_e^{\mathcal{E}} = x_{\bar{e}}^{\mathcal{E}}, \text{ für } e \text{ und } \bar{e} \in M_2 \cap (S_k \setminus A_v) \quad (5.3)$$

$$x_e^{\mathcal{E}^1} = x_{\bar{e}}^{\mathcal{E}^1} + 1, \text{ für } e \in M_1 \cap (S_k \setminus A_v) \text{ und } \bar{e} \in M_2 \cap (S_k \setminus A_v) \quad (5.4)$$

$M_1$  sei dabei die Menge der Sehnen um  $v$  aus  $B_1$ , und  $M_2$  die Menge der Sehnen um  $v$  aus  $B_2$ , die im Schnittgraphen  $G_\cap$  enthalten sind.

### 5.4 Formulierung des Algorithmus durch ein lineares Gleichungssystem

Insgesamt erhalten wir das folgende zusammengesetzte lineare Gleichungssystem, welches für die Sehnenvariablen einer simultanen Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  erfüllt sein muss:

$$\begin{cases} \text{LGS 4.5 für die Sehnenvariablen der simultanen Einbettung } (\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2|_{B_1}) \\ \text{LGS 4.5 für die Sehnenvariablen der simultanen Einbettung } (\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2|_{B_2}) \\ \text{LGS 5.4 zur Sicherstellung der Konsekutivität der Kanten um } v \text{ in } \mathcal{E}_1 \end{cases} \quad (5.5)$$

Dabei bezeichnet  $v$  den Schnittknoten aus  $G_2$ .

**Lemma 5.4.** *Für einen zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen  $G_1$  und einen außenplanaren Graphen  $G_2$ , der aus einem Schnittknoten und zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken  $B_1$  und  $B_2$  besteht, induziert jede Belegung der zu  $G_1$  beziehungsweise  $B_1$  und  $B_2$  zugehörigen Sehnenvariablen aus der Lösungsmenge des LGS 5.5 mindestens eine simultane Einbettung. Weiter ist die durch eine simultane Einbettung induzierte Belegung der Sehnenvariablen von  $G_1$ ,  $B_1$  und  $B_2$  immer in der Lösungsmenge des LGS 5.5 enthalten.*

*Beweis.* Es sei zunächst eine Variablenbelegung aus der Lösungsmenge des LGS 5.5 gegeben. Diese induzieren eine Einbettung  $\mathcal{E}^1$  von  $G_1$ , sowie Einbettungen der Blöcke  $B_1$  und  $B_2$ . Dabei ist durch die gültigen Gleichungen des LGS zum Einen sichergestellt, dass  $B_1$  und  $G_1$  sowie  $B_2$  und  $G_1$  simultan eingebettet sind. Zum anderen sind die Kanten um den Schnittknoten von  $B_1$  sowie  $B_2$  konsekutiv in der Reihenfolge der Kanten des Schnittgraphen um den Knoten  $v$ , die durch  $\mathcal{E}^1$  induziert wird. Aus Lemma 5.2 folgt, dass es mindestens eine Einbettung  $\mathcal{E}^2$  von  $G_2$  gibt, die diese Kantenreihenfolge realisiert. Da  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  blockweise simultane Einbettungen sind und zusätzlich die Reihenfolge des Schnittgraphen um den Knoten  $v$  in  $\mathcal{E}^1$  und  $\mathcal{E}^2$  gleich sind, folgt aus Lemma 5.1, dass die Variablenbelegung mindestens eine simultane Einbettung induziert.

Nun sei eine simultane Einbettung  $(\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2)$  der Graphen  $G_1$  und  $G_2$  gegeben. Dann müssen  $G_1$  und  $G_2$  blockweise simultan eingebettet sein, sodass die ersten beiden Gleichungssysteme aus dem Gleichungssystem 5.5 erfüllt sein müssen. Weiter wird die Kantenreihenfolge  $R$  des Schnittgraphen, die durch  $\mathcal{E}^1$  induziert wird, für  $G_2$  durch  $\mathcal{E}^2$  realisiert. Dann müssen nach Lemma 5.2 alle Kanten aus einem Block konsekutiv in  $R$  sein. Da diese Konsekutivität durch das letzte Gleichungssystem des Systems 5.5 sichergestellt wird, folgt, dass die Sehnenvariablen einer simultanen Einbettungen immer im LGS 5.5 enthalten sind.  $\square$

**Satz 5.5.** *Das Problem SEFE für einen zweifach zusammenhängenden außenplanaren Graphen und einen außenplanaren Graphen, der aus einem Schnittknoten und zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken besteht, lässt sich mit einer Laufzeit in  $O(n^2)$  lösen.*

*Beweis.* Da wir nach Lemma 5.4 durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems ermitteln können, ob zwei derartige Graphen eine simultane Einbettung besitzen, lässt sich das Problem SEFE in polynomieller Zeit lösen. Zu zeigen bleibt, dass die Laufzeit in  $O(n^2)$  liegt. Das Lösen der ersten beiden Gleichungssysteme im zusammengesetzten System 5.5 liegt nach 4.6 aus Kapitel 4.1 in  $O(n^2)$ . Wir betrachten also nur noch das letzte Gleichungssystem im System 5.5. Dieses enthält für eine Teilmenge  $T$  der Sehnenmenge des zweifach zusammenhängenden Graphen, die im Schnittgraphen enthalten ist, Gleichungen. Wir haben dabei zu je zwei Sehnen aus  $T$ , die im anderen Graphen in einem gemeinsamen Block liegen, eine Gleichung, und für je zwei Sehnen, die im anderen Graphen nicht im gleichen Block liegen, eine Gleichung. Wir schätzen die Menge der Gleichungen sehr grob ab, indem wir davon ausgehen, dass die Anzahl der Gleichungen in  $O(3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}) \in O(n^2)$  liegt. Durch die Gleichungen werden boolesche Variablen miteinander verglichen. Damit entspricht die Lösungsfindung des linearen Gleichungssystems dem Lösen des Problems 2Sat mit entsprechenden Klauseln, die sich analog wie in Beweis zu Satz 4.6 angeben lassen. Da 2Sat nach [EIS76] in linearer Zeit lösbar ist, lässt sich auch das letzte Gleichungssystem in quadratischer Zeit lösen. Insgesamt erhalten wir die geforderte Laufzeit.  $\square$

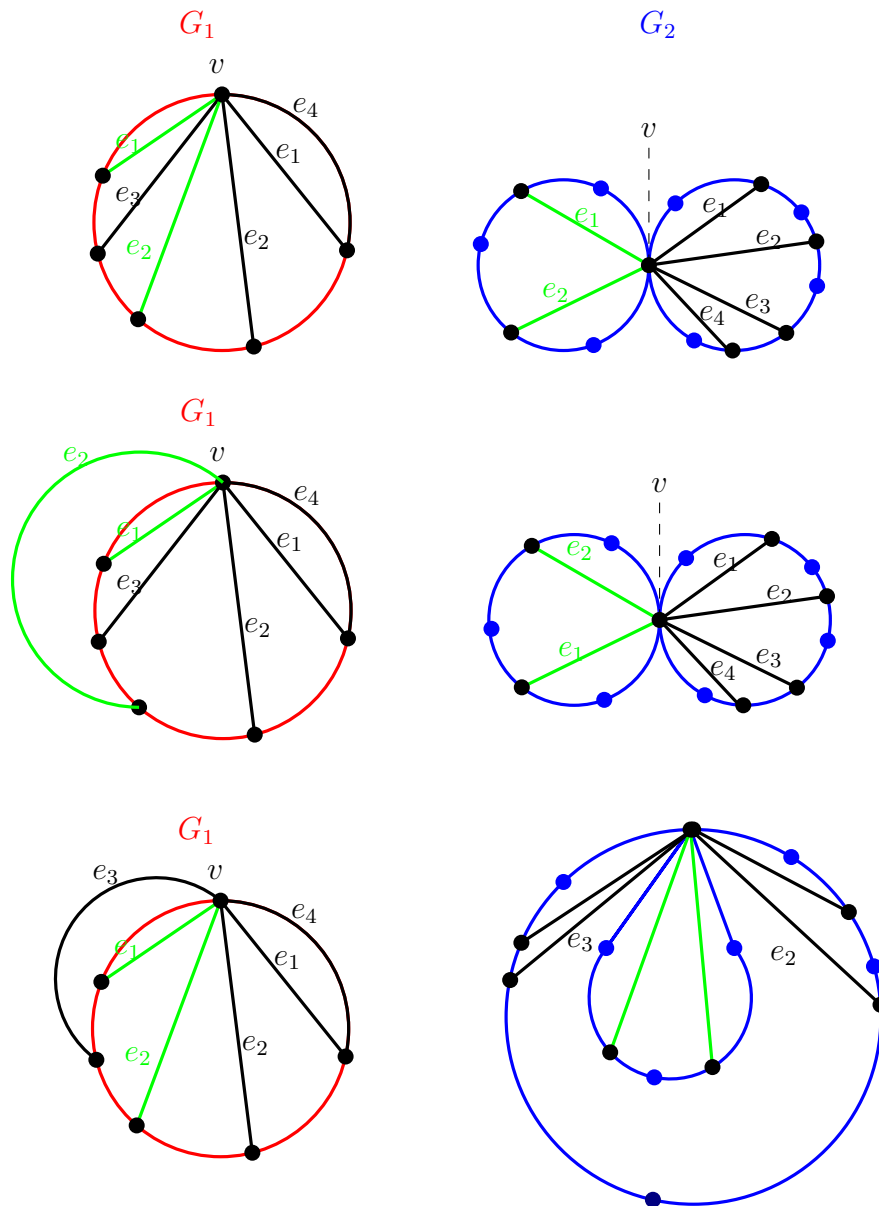


Abbildung 5.7: Oben ist eine Einbettung von  $G_1$  zu sehen, in der die Kanten nicht konsekutiv sind. In der zweiten und dritten Reihe ist zu sehen, wie durch Umlegen der grünen Kante  $e_2$  oder der schwarzen Kante  $e_3$  die Reihenfolge konsekutiv gemacht werden kann. Rechts ist jeweils die zugehörige Einbettung von  $G_2$  angegeben, die die entsprechenden Kantenreihenfolgen realisiert. Damit sind die Graphen in den beiden unteren Reihen simultan eingebettet.



## 6. Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit ging es um die Frage, ob es möglich ist, für zwei außenplanare Graphen  $G_1$  und  $G_2$  in polynomialer Zeit zu entscheiden, ob sie so gezeichnet werden können, dass ihr Schnittgraph  $G_\cap$  in beiden Zeichnungen gleich dargestellt wird, oder nicht. Wir betrachteten in der Arbeit das äquivalente Einbettungsproblem.

Um der Antwort dieser Frage Schritt für Schritt näher zu kommen, schränkten wir die Problemstellung auf verschiedene Weise ein, indem wir Bedingungen an die Eingangsgraphen  $G_1$  und  $G_2$  sowie an den Schnittgraphen  $G_\cap$  stellten. Für die daraus resultierenden Spezialfälle fanden wir Algorithmen, die entscheiden können, ob eine simultane Einbettung existiert oder nicht und im Falle der Existenz alle simultanen Einbettungen in quadratischer Zeit berechnen können.

Da alle vorgestellten Algorithmen auf Eigenschaften zweifach zusammenhängender außenplanarer Graphen beruhen, gingen wir in Kapitel 3.2 zunächst auf diese Eigenschaften ein. Mit deren Hilfe konnten wir am Ende des Kapitels zeigen, dass zwei außenplanare Graphen mit zweifach zusammenhängendem Schnitt immer eine simultane Einbettung besitzen.

In Kapitel 4 gaben wir in zwei Schritten jegliche Forderungen an den Schnittgraphen auf, stellten aber dafür die Bedingungen auf, dass die betrachteten Graphen zweifach zusammenhängend sein sollten. Als Erstes lockerten wir im Unterkapitel 4.1 die Forderungen an den Schnittgraphen, indem wir nur noch voraussetzten, dass er zusammenhängend sein sollte. Wie in einem Beispiel gezeigt wurde, muss es in diesem Fall nicht immer simultane Einbettungen geben. Wir fanden einen Weg, die Einbettungen der Eingangsgraphen durch boolesche Sehnensvariablen zu beschreiben. Wir stellten ein lineares Gleichungssystem bezüglich dieser Variablen auf und zeigten, dass eine Belegung der Sehnensvariablen genau dann in der Lösungsmenge des Gleichungssystems enthalten ist, wenn sie eine simultane Einbettung induziert. Somit kann durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems in quadratischer Zeit entschieden werden, ob zwei zweifach zusammenhängende Graphen mit zusammenhängendem Schnitt eine simultane Einbettung besitzen oder nicht. Gegebenenfalls können alle simultanen Einbettungen berechnet werden. Im nächsten Schritt verallgemeinerten wir den Algorithmus aus Unterkapitel 4.1, in dem wir die Forderung an den Schnittgraphen aufgaben, zusammenhängend zu sein. Dabei mussten wir einen Weg finden, damit umzugehen, dass der Schnittgraph nicht mehr nur aus einer, sondern aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehen konnte und beschäftigten uns deshalb

mit der topologischen Einbettung von Graphen, sowie mit Relativen Lagen von Knoten und Kreisen zueinander. Schließlich gelang es, das lineare Gleichungssystem aus Kapitel 4.1 so zu erweitern, dass dessen Lösungsmenge auch im Fall, dass der Schnittgraph unzusammenhängend ist, alle simultanen Einbettungen induziert. Insgesamt wurde gezeigt, dass für zwei zweifach zusammenhängende außenplanre Graphen in quadratischer Zeit entschieden werden kann, ob sie eine simultane Einbettung besitzen, oder nicht. Gegebenenfalls können alle simultanen Einbettungen berechnet werden.

Im letzten Kapitel lockerten wir die Anforderungen an die Graphen. Wir betrachteten den Fall, in dem der eine Graph aus zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken und einem Schnittknoten bestand, während der andere weiterhin als zweifach zusammenhängend vorausgesetzt war. Wir zeigten, dass auch in diesem Fall das Problem in quadratischer Zeit entscheidbar ist. Dabei nutzen wir aus, dass die betrachteten Blöcke alle zweifach zusammenhängend sind. Wir konnten zeigen, dass jede blockweise simultane Einbettung genau dann eine simultane Einbettung ist, wenn die Kantenmenge jeden Blocks in der Kantenreihenfolge um den Schnittknoten im zweifach zusammenhängenden Graphen konsekutiv ist.

Insgesamt konnten wir die Fragestellung, ob das Problem SEFE für außenplanare Graphen in polynomialer Zeit lösbar ist, für die beschriebenen Spezialfälle beantworten.

## 6.2 Ausblick

In dieser Arbeit zeigten wir, dass wir für zwei zweifach zusammenhängende Graphen  $G_1$  und  $G_2$  in quadratischer Zeit entscheiden können, ob sie eine simultane Einbettung besitzen, oder nicht. Nun stellt sich die Frage, was für Aussagen sich machen lassen, wenn die Forderungen an die Graphen  $G_1$  und  $G_2$  gelockert werden. In Kapitel 4 begannen wir damit, indem wir den Fall betrachteten, dass der einer der Graphen aus einem Schnittknoten und zwei zweifach zusammenhängenden Blöcken besteht. In diesem Fall können wir in quadratischer Zeit entscheiden, ob sie simultan einbettbar sind, oder nicht.

Ausgehend von diesen Ergebnissen könnte als nächstes der Fall betrachtet werden, dass der eine Graph nicht nur zwei, sondern beliebig viele Blöcken besitzen darf. Dabei kann Lemma 5.2 verallgemeinert werden. Eine Reihenfolge  $R$  ist für einen planaren Graphen, der aus einem Schnittknoten und beliebig vielen zweifach zusammenhängenden Blöcken besteht, genau dann realisierbar, wenn für jedes Paar von Blöcken  $B_i$  und  $B_j$  für  $i \neq j$  gilt, dass die induzierten Reihenfolgen  $R|_{B_i}$  und  $R|_{B_j}$  für die jeweiligen Blöcke realisierbar sind und zusätzlich  $E(B_i)^v$  und  $E(B_j)^v$  konsekutiv in  $R|_{B_i \cup B_j}$  um  $v$  sind. Daraus lässt sich folgern, dass auch in diesem Fall in polynomialer Zeit entscheidbar-, ob es simultane Einbettungen gibt-, oder nicht.

Als nächstes könnte der Fall betrachtet werden, in dem beide Graphen  $G_1$  und  $G_2$  aus beliebig vielen zweifach zusammenhängenden Blöcken und Schnittknoten bestehen, jedoch keiner der Schnittknoten gleichzeitig in  $G_1$  und  $G_2$  Schnittknoten ist. Dieser Fall lässt sich auf die schon beschriebenen Fälle zurückführen, sodass auch für solche Graphen SEFE polynomial entscheidbar ist.

Es stellt sich die Frage, ob wir das Problem auch dann entscheiden können, wenn es einen Knoten gibt, der in  $G_1$  und  $G_2$  zugleich ein Schnittknoten ist. In diesem Fall reicht es nicht, dass ein Einbettungspaar von  $G_1$  und  $G_2$  blockweise einer blockweisen simultanen Einbettung entspricht und zusätzlich die Blöcke paarweise konsekutive Kantenreihenfolgen um den Schnittknoten besitzen. Dies zeigt Beispiel 6.1. Hier reichen die Eigenschaften zweifach zusammenhängender Graphen, die wir für die vorgestellten Algorithmen verwendet haben, nicht mehr aus. Eine weitere Studie könnte sich mit der Frage befassen, ob und wie man auf andere Weise mit solchen Schnittknoten umgehen kann.



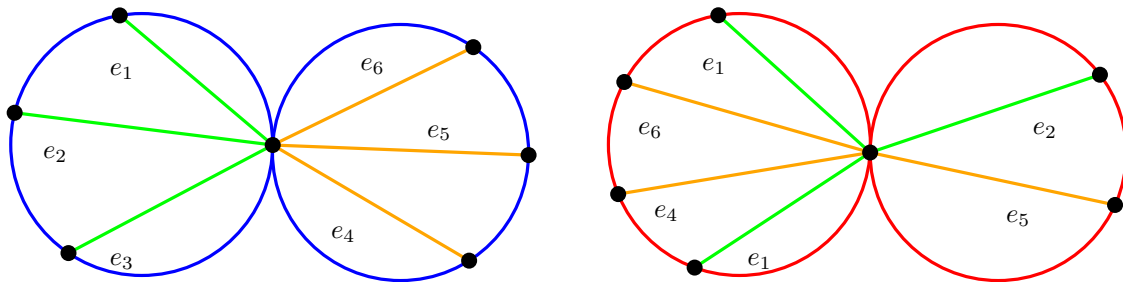


Abbildung 6.1: Der Schnittgraph besteht aus den orangenen und grünen Kanten. Die Graphen sind blockweise simultan eingebettet, und in jedem Block sind die Kanten eines anderen Blocks stets konsequent. Dennoch handelt es sich nicht um eine simultane Einbettung



# Literaturverzeichnis

- [ABF<sup>+</sup>12] P. Angelini, G. Di Battista, F. Frati, M. Patrignani, and I. Rutter: *Testing the simultaneous embeddability of two graphs whose intersection is a biconnected or a connected graph*. *Journal of Discrete Algorithms*, 14:150–172, 2012.
- [BKR12] T. Bläsius, S. G. Kobourov, and I. Rutter: *Simultaneous embedding of planar graphs*. CoRR, abs/1204.5853, 2012.
- [BR13a] T. Bläsius and I. Rutter: *Disconnectivity and relative positions in simultaneous embeddings*. In W. Didimo and M. Patrignani (editors): *Graph Drawing*, volume 7704 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 31–42. Springer, 2013, ISBN 978-3-642-36762-5. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-36763-2\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-36763-2_4).
- [BR13b] T. Bläsius und I. Rutter: *Simultaneous PQ-ordering with applications to constrained embedding problems*. In: *Proceedings of the 24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Seiten 1030–10430, 2013.
- [BT96] G. Battista and R. Tamassia: *On-line maintenance of triconnected components with spqr-trees*. *Algorithmica*, 15(4):302–318, 1996, ISSN 0178-4617. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01961541>.
- [CH67] G. Chartrand and F. Harary: *Planar permutation graphs*. *Annales de l’institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, 3(4):433–438, 1967.
- [Die10] Reinhard Diestel: *Graphentheorie*. Springer, Heidelberg, 4. Auflage, 2010, ISBN 978-3-642-14911-5.
- [EIS76] S. Even, A. Itali, and A. Shamir: *On the complexity of timetable and multicommodity flow problems*. *SIAM Journal on Computing*, 5(4):691–703, 1976.
- [Fra07] F. Frati: *Embedding graphs simultaneously with fixed edges*. In *Graph Drawing*, volume 4372 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 108–113. Springer, 2007, ISBN 978-3-540-70903-9. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70904-6\\_12](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-70904-6_12).
- [GJP<sup>+</sup>06] E. Gassner, M. Jünger, M. Percan, M. Schaefer, and M. Schulz: *Simultaneous graph embeddings with fixed edges*. In F. Fomin (editor): *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, volume 4271 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 325–335. Springer, 2006, ISBN 978-3-540-48381-6. [http://dx.doi.org/10.1007/11917496\\_29](http://dx.doi.org/10.1007/11917496_29).
- [GL07] E. Di Giacomo and G. Liotta: *Simultaneous embedding of outerplanar graphs, paths, and cycles*. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 17(2):139–160, 2007.
- [HJL10] B. Haeupler, K. Jampani, and A. Lubiw: *Testing simultaneous planarity when the common graph is 2-connected*. In O. Cheong, K. Chwa, and K. Park (editors):

- Algorithms and Computation*, volume 6507 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 410–421. Springer, 2010, ISBN 978-3-642-17513-8. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17514-5\\_35](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17514-5_35).
- [Hun16] E. V. Huntington: *A set of independent postulates for cyclic order*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2(11):630, 1916.
- [JS09] M. Jünger and M. Schulz: *Intersection graphs in simultaneous embedding with fixed edges*. Journal of Graph Algorithms and Applications, 13(2):205–218, 2009.
- [KLM<sup>+</sup>09] T. Kavitha, C. Liebchen, K. Mehlhorn, D. Michail, R. Rizzi, T. Ueckerdt, and K. A. Zweig: *Cycle bases in graphs characterization, algorithms, complexity, and applications*. Computer Science Review, 3(4):199–243, 2009.
- [LTT04] G. Liotta, R. Tamassia, and I.G. Tollis: *Graph Algorithms and Applications Three*. Journal of Graph Algorithms and Applications. World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2004, ISBN 9789812389398. <http://books.google.de/books?id=VpxKi9WTLtQC>.
- [Sch13] M. Schaefer: *Toward a theory of planarity: Hanani-tutte and planarity variants*. In W. Didimo and M. Patrignani (editors): *Graph Drawing*, volume 7704 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 162–173. Springer, 2013, ISBN 978-3-642-36762-5. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-36763-2\\_15](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-36763-2_15).
- [Vol91] L. Volkmann: *Graphen und Digraphen: eine Einführung in die Graphentheorie*. Springer, Wien, 1991, ISBN 3-211-82267-4; 0-387-82267-4.