

# Verkabelung von Windfarmen auf Bäumen

Bachelorarbeit  
von

**Dominik Stampa**

An der Fakultät für Informatik  
Institut für Theoretische Informatik

Erstgutachter:	Prof. Dr. Dorothea Wagner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Peter Sanders
Betreuende Mitarbeiter:	Sascha Gritzbach Matthias Wolf

Bearbeitungszeit: 25. Mai 2018 – 24. September 2018



### **Selbstständigkeitserklärung**

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig verfasst, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde sowie die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der jeweils gültigen Fassung beachtet zu haben.

Karlsruhe, 22. September 2018



## Abstract

The wind farm cabling problem deals with installing cables between wind turbines and substations of a wind farm in order to conduct electric power from turbines to substations. For this task several types of cables are given and the cheapest cable installation is to be found. In the model, turbines and substations are represented by vertices of a graph. Cables can only be placed at the edges of this graph. Whereas this problem is NP-hard on general graphs, in this thesis the wind farm cabling problem is considered on tree graphs only. We describe different variants of the problem with the help of several parameters and analyse their complexity. Amongst others, a polynomial-time algorithm for the wind farm cabling problem on path graphs, where the produced power of a wind turbine has to be conducted to exactly one substation, is given. On trees the cabling problem is already NP-hard if an arbitrary set of cable types is given - no matter how the values of other parameters are chosen.

## Deutsche Zusammenfassung

Beim Windfarm-Verkabelungsproblem müssen Kabel zwischen Turbinen und Substationen einer Windfarm verlegt werden, um den Strom von den Turbinen zu den Substationen zu leiten. Dabei stehen mehrere verschiedene Kabeltypen zur Verfügung und es soll die günstigste Verkabelung gefunden werden. Die Turbinen und Substationen sind als Knoten eines Graphen modelliert, dessen Kanten vorgeben, wo Kabel verlegt werden dürfen. Auf allgemeinen Graphen ist dieses Problem NP-schwer. In dieser Arbeit wird das Windfarm-Verkabelungsproblem auf Baumgraphen betrachtet. Durch mehrere Parameter werden verschiedene Varianten des Problems beschrieben und diese dann auf ihre Komplexität untersucht. Unter anderem wird für das Verkabelungsproblem auf einem Pfad, wobei der produzierte Strom von einer Windturbine immer zu genau einer Substation geleitet werden muss, ein Algorithmus mit polynomieller Laufzeit angegeben. Auf einem Baum erweist sich das Verkabelungsproblem bereits als NP-schwer, wenn eine beliebige Menge von Kabeltypen gegeben ist, unabhängig davon, wie andere Parameter gewählt werden.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Themenbezogene Arbeiten</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
3.1	Graphentheorie . . . . .	7
3.2	Fluss auf Graphen . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Windfarm-Verkabelungsproblem</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Windfarm-Verkabelung mit unteilbarem Stromfluss</b>	<b>11</b>
5.1	Windfarm-Verkabelung auf Pfadgraphen . . . . .	11
5.1.1	Der einfachste Fall . . . . .	12
5.1.2	Erweiterung durch Kantenlängen und beliebige Produktionen . . . . .	12
5.1.3	Erweiterung durch Substation-Kapazitäten . . . . .	13
5.1.4	Erweiterung durch mehrere Kabeltypen . . . . .	13
5.1.5	Unbeschränkte Substation-Kapazitäten . . . . .	15
5.1.6	Das vollständige Problem auf Pfadgraphen . . . . .	15
5.2	Windfarm-Verkabelung auf allgemeinen Bäumen . . . . .	17
5.2.1	Einfacher Baum . . . . .	18
5.2.2	Baum mit Kantenlängen . . . . .	19
5.2.3	Baum mit Substation-Kapazitäten . . . . .	21
5.2.4	Verkabelung wird NP-schwer . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Windfarm-Verkabelung bei teilbarem Stromfluss</b>	<b>29</b>
6.1	Pseudopolynomieller Ansatz für die Pfad-Verkabelung . . . . .	30
6.2	Verkabelung auf Bäumen . . . . .	31
6.2.1	NP-schwere Verkabelung . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>37</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>41</b>





# 1. Einführung

In Zeiten der Energiewende wird Strom aus erneuerbaren Energiequellen immer wichtiger. Neben Sonnenenergie, Geothermie oder Wasserkraft spielt dabei auch die Windenergie eine große Rolle. Um aus der Windenergie Strom zu gewinnen, werden Windkraftanlagen, auch Windräder oder Windturbinen genannt, aufgestellt, die, angetrieben durch den Wind, Strom erzeugen. Die Windturbinen werden im Allgemeinen in Gruppen gebaut und der produzierte Strom aller Turbinen wird gemeinsam ins Stromnetz eingespeist. Eine solche Gruppe von Turbinen wird *Windfarm* genannt und kann sowohl auf dem Festland (*onshore*) als auch auf See (*offshore*) gebaut werden. Eine Windfarm besteht dabei einerseits aus den Windturbinen, die den Strom produzieren, aber auch aus Substationen, die unter anderem als Umspannwerke dienen. Abbildung 1.1 zeigt das Layout der Offshore-Windfarm Sheringham Shoal mit zwei Substationen. Die Linien zwischen den Punkten stellen dabei die Kabel dar, die zwischen den Turbinen und den Substationen verlegt sind. Dabei ist bei jeder Windfarm das Ziel, die Kabel zu minimalen Kosten zu verlegen.

In den letzten zwei Jahrzehnten ist die weltweit gesamte Leistung aus Windkraftanlagen stark angestiegen. Im Jahr 1996 lag die Gesamtnennleistung bei 6,1 Gigawatt [GWE11] und ist bis in das Jahr 2016 auf 486,8 Gigawatt angestiegen [GWE17]. Bei dieser Entwicklung erhöht sich auch die Anzahl der Turbinen pro Windfarm. Die aktuell größte Windfarm ist die Jiuquan Wind Power Base in China mit über 7000 Windturbinen und einer aktuellen Nennleistung von knapp 8 Gigawatt (Stand: 2018) [Gan18]. Diese soll bis ins Jahr 2020 auf 20 Gigawatt ansteigen [Her17].

Europaweit soll die Leistung aus Windenergie laut einer Vorhersage des Global Wind Energy Council (GWEC) bis ins Jahr 2021 auf 235 Gigawatt ansteigen, im Jahr 2016 waren es 161 Gigawatt [GWE17]. In Deutschland hat die Bundesregierung das Ziel vorgegeben, dass bis 2030 aus Offshore-Windfarmen 15 Gigawatt in das deutsche Stromnetz eingespeist werden sollen [Bun18]. Ende des Jahres 2017 waren es rund 5,3 Gigawatt [Deu18]. Aktuell befinden sich noch einige Offshore-Windfarmen in Deutschland in Bau [Deu18] und in Planung [BMW18].

Bei Offshore-Windfarmen fallen etwa fünf bis sieben Prozent der Gesamtkosten der Windfarm auf die interne Verkabelung [Hau17], das heißt, auf die Verkabelung zwischen den einzelnen Windturbinen und den Substationen. In Abbildung 1.1 wird die interne Verkabelung durch die schwarzen Linien dargestellt. Die Kosten für die Verkabelung schwanken dabei je nach Größe der Windfarm und Entfernung zur Küste. Eine Windfarm bei 40 Metern Wassertiefe und etwa 60 Turbinen beispielsweise kann über 1,2 Milliarden Euro kosten, wobei davon etwa 80 Millionen Euro auf die Verkabelung fallen [Hau17].

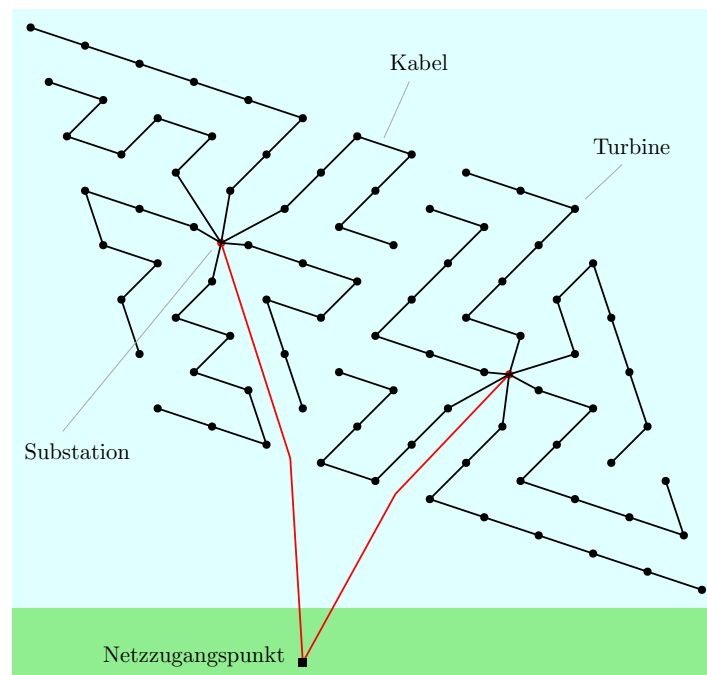


Abbildung 1.1: Layout der Sheringham Shoal Offshore-Windfarm mit zwei Substationen nach [Hel].

Die Kosten der Verkabelung sind also nicht zu vernachlässigen und sind ein Punkt, an dem optimiert werden kann. Für die Verkabelung stehen eine Menge von Kabeltypen mit Installationskosten pro Längeneinheit und einer gewissen Kapazität zur Verfügung. Diese Kabeltypen müssen nun genutzt werden, um die Windturbinen und Substationen, deren Positionen gegeben sind, miteinander zu verbinden. Dabei dürfen Kabel nur an vorgegebenen Stellen verlegt werden. Diese Stellen sind im Modell des Problems durch Kanten eines Graphen gegeben, bei dem die Knoten Substationen und Turbinen sind. Der produzierte Strom, der über ein Kabel fließt, darf dessen Kapazität nicht überschreiten.

Für eine Windfarm soll nun die günstigste Verkabelung gefunden werden. Ist die Windfarm klein und besteht nur aus ein paar wenigen Turbinen, kann dieses Problem noch von Hand gelöst werden. Besteht die Windfarm aber aus hundert und mehr Turbinen, ist dies nicht mehr möglich und auch das Ausprobieren aller Möglichkeiten mit Hilfe eines Computers ist nicht mehr effizient.

In dieser Arbeit wird der Spezialfall des Windfarm-Verkabelungsproblems betrachtet, wenn der zugrundeliegende Graph ein Baum ist. Das Problem wird mit Hilfe verschiedener Parameter beschrieben. Dabei wird unter theoretischer Betrachtung die Komplexität des Problems abhängig von der Wahl der Parameter untersucht, beziehungsweise wann das Problem NP-schwer ist und wann es noch in Polynomialzeit zu lösen ist.

In Kapitel 2 wird ein Überblick über Arbeiten mit ähnlichem Thema gegeben und in Kapitel 3 werden Grundlagen der Graphentheorie und Flüsse auf Graphen erklärt. Kapitel 4 beschreibt das Modell und definiert das Verkabelungsproblem, mit dem in den darauf folgenden Kapiteln gearbeitet wird. Dann betrachten wir in Kapitel 5 das Verkabelungsproblem zunächst für unteilbaren Fluss sowohl auf Pfadgraphen als auch auf allgemeinen Bäumen. In Kapitel 6 untersuchen wir dann dieselben Probleme bei teilbarem Fluss. Bei beiden Fällen werden verschiedene Kombinationen der Parameter betrachtet. Für die daraus entstehenden Probleme geben wir Polynomialzeitalgorithmen an oder beweisen, dass die Probleme NP-schwer sind. In Kapitel 7 werden die Ergebnisse zusammengefasst und es wird ein kurzer Ausblick auf mögliche zukünftige Forschung gegeben.

## 2. Themenbezogene Arbeiten

Berzan et al. [BVMO11] betrachten das Windfarm-Verkabelungsproblem, bei dem die Positionen der Turbinen und Substationen vorgegeben sind und eine möglichst günstige Verkabelung gefunden werden soll. Dabei unterteilen sie das Problem in drei Probleme: das *Circuit-Problem*, das *Substation-Problem* und das *Full-Farm-Problem*. Beim *Circuit-Problem* müssen eine gegebene Menge von Turbinen an genau eine Substation angeschlossen werden, sodass genau eine der Turbinen direkt mit der Substation verbunden ist. Die Menge dieser so angeschlossenen Turbinen nennt man dann *Circuit*. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Beim *Substation-Problem* ist eine Substation und eine Menge von Turbinen gegeben, wie ebenfalls in Abbildung 2.1 zu sehen. Die Turbinen müssen zunächst in Circuits aufgeteilt werden und dann an die eine Substation angeschlossen werden. Das *Full-Farm-Problem* ist das vollständige Verkabelungsproblem. Dabei sind eine Menge von Turbinen und Substationen gegeben und die Turbinen müssen zunächst einer Substation zugeteilt werden, um dann für jede Substation das Substation-Problem zu lösen. Berzan et al. unterscheiden bei ihrer Betrachtung des Problems, ob es nur einen Kabeltyp gibt oder mehrere. Gibt es nur einen Kabeltyp, entsprechen das Circuit-Problem und das Substation-Problem dem Problem des minimalen Spannbaums beziehungsweise dem Problem des kapazitierten minimalen Spannbaums (Capacitated Minimum Spanning Tree, CMST) [BVMO11]. Ein minimaler Spannbaum lässt sich in Polynomialzeit berechnen [Pri57]. Das Problem des CMST ist allerdings NP-schwer [Pap78], trotzdem kann zum Beispiel durch die Esau-Williams-Heuristik eine Näherungslösung in Polynomialzeit berechnet werden [EW66]. Berzan et al. stellen einen Greedy-Algorithmus für das Full-Farm-Problem mit nur einem Kabeltypen vor, der eine Näherungslösung berechnet. Bei mindestens zwei Kabeltypen ist das Circuit-Problem bereits NP-schwer [LRWW17]. Für den Fall, dass es eine beliebige Anzahl an Kabeltypen gibt, präsentieren Berzan et al. einen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, um das Circuit-Problem optimal zu lösen [BVMO11].

Um eine Lösung des Windfarm-Verkabelungsproblems zu finden, gibt es Ansätze aus vielen verschiedenen Richtungen. Da das Verkabelungsproblem auf allgemeinen Graphen NP-schwer ist, sind viele davon Näherungslösungen. Lehmann et al. [LRWW17] benutzen einen Simulated-Annealing-Ansatz und vergleichen diesen mit einem gemischt-ganzzahligen linearen Programm (Mixed-Integer Linear Program, MILP). Der Simulated-Annealing Algorithmus übertrifft dabei das MILP in Laufzeit und Qualität der Lösung für Instanzen bis zu 450 Turbinen. Neagu und Georgescu [NG14] benutzen Ant-Colony-Optimization und Methoden zur Berechnung von Steiner-Bäumen, um eine Lösung für das Problem zu finden. Bauer und Lysgaard [BL15] betrachten das Windfarm-Verkabelungsproblem als

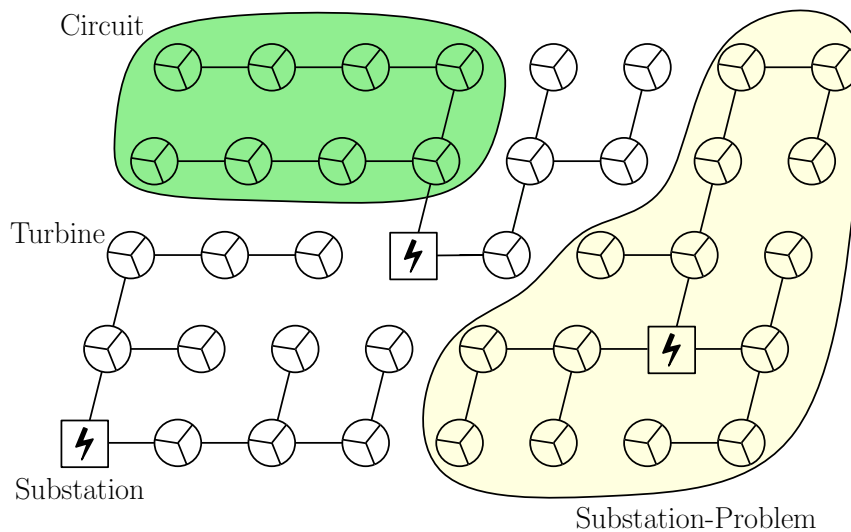


Abbildung 2.1: Lösung für das Windfarm-Verkabelungsproblem

ein Tourenplanungsproblem (Vehicle Routing Problem). Bei einer Lösung des Verkabelungsproblems aus [BL15] dürfen sich keine Kabel kreuzen. Um eine Näherungslösung für dieses Verkabelungsproblem zu berechnen, passen Bauer und Lysgaard die Einsparheuristik von Clarke und Wright für das Tourenplanungsproblem [CW64] für das Verkabelungsproblem an. Diese Heuristik wenden sie auf bereits bestehende Windfarmen an und erreichen damit eine Kosteneinsparung von bis zu 13 Prozent. Hertz et al. [HMM<sup>+</sup>12] betrachten eine Variante des Windfarm-Verkabelungsproblems, bei dem das Verkabelungsnetzwerk in ein unterirdisches und ein überirdisches Netzwerk eingeteilt wird und es ausgezeichnete Verbindungsstellen für die beiden Netzwerke gibt. Für dieses Problem formulieren sie ein MILP und berechnen eine exakte Lösung mit Hilfe eines Schnittebenenverfahrens.

Das Windfarm-Verkabelungsproblem ist eng verwandt mit Netzwerk-Design-Problemen, welche zum Beispiel im Zusammenhang mit Telekommunikations- oder Transportnetzwerken schon viel untersucht wurden. Bei Telekommunikationsnetzwerken soll Datenverkehr von gegebenen Endknoten zu Kernknoten mit minimalen Kosten geleitet werden. Die End- und Kernknoten sind als Knoten in einem Graphen gegeben. Um den Datenverkehr von den Endknoten zu den Kernknoten zu leiten, stehen verschiedene Kabel zur Verfügung, die eine gewisse Kapazität und Installationskosten pro Längeneinheit haben. Dabei haben die Kabel mit höherer Kapazität im Allgemeinen ein besseres Verhältnis von Kosten zu Dateneinheit. Das heißt, es lohnt sich womöglich, viel Kapazität auf einmal zu kaufen. Dieses Problem mit nur einem Kernknoten wurde erstmals von Salman et al. [SCRS01] eingeführt. Hierbei muss der gesamte Datenverkehr von einem Endknoten über genau einen Pfad zu dem Kernknoten geleitet werden. Das sogenannte „Single-Sink Edge-Installation-Problem“ (auch „Single-Sink Buy-at-Bulk“) ist auf allgemeinen Graphen NP-schwer und wird in [SCRS01] näherungsweise gelöst für den Fall, dass die Knoten auf Punkten der euklidischen Ebene liegen. Salman et al. [SRH08] lösen dieses Problem exakt durch einen Branch-and-Bound Algorithmus. Das Single-Sink Edge-Installation-Problem kann auch für den Fall betrachtet werden, dass der Datenverkehr aufgeteilt werden kann und über mehrere Pfade von einem Endknoten zum Kernknoten geleitet werden kann. Trotzdem bleibt das Problem NP-schwer [GI06]. Grandoni et al. [GRS11] geben eine 20,41-Approximation für dieses Problem an, die auf einer Verallgemeinerung des Core-Detouring-Theorems aus [EGRS10] basiert. Ljubić et al. [LPSG12] berechnen eine exakte Lösung mit einem Branch-and-Bound-Verfahren und Benders-Zerlegung.

---

Van der Merwe und Hattingh [VdMH06] betrachten das Tree-Knapsack-Problem, welches ein Sub-Problem von Netzwerk-Design-Problemen ist, aber trotzdem noch NP-schwer ist. Das Tree-Knapsack-Problem ist ähnlich zu den in dieser Arbeit untersuchten Verkabelungsproblemen. Dabei ist ein ungerichteter Baum gegeben, dessen Knoten jeweils einen Profit und ein Gewicht haben. Ziel ist es, zu einer gegebenen Wurzel einen Teilbaum zu finden, sodass das Gewicht der Knoten eine bestimmte Kapazität nicht überschreitet und der Profit der Knoten maximiert wird. Van der Merwe und Hattingh geben einen Überblick über verschiedene Lösungsmethoden des Tree-Knapsack-Problems, sowohl exakte als auch Näherungslösungen und präsentieren eine weitere exakte Lösungsmethode, die im Vergleich zu den anderen exakten Lösungen bei großen Instanzen besser abschneidet.



## 3. Grundlagen

In diesem Kapitel werden kurz einige Grundlagen zu Graphen und Flüssen auf Graphen erklärt, die im Folgenden gebraucht werden.

### 3.1 Graphentheorie

Ein *Graph*  $G$  ist ein Paar  $(V, E)$  aus einer Knotenmenge  $V$  und einer Kantenmenge  $E \subseteq \binom{V}{2}$ . Dabei ist  $\binom{V}{2}$  die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von  $V$ . Dieser Graph ist ein *ungerichteter* Graph. Im Gegensatz dazu ist ein Graph *gerichtet*, wenn für die Kantenmenge gilt  $E \subseteq V \times V$ . Zur Darstellung von Graphen werden die Knoten als Punkte und die Kanten als Linien, die die entsprechenden Knoten verbinden, gezeichnet. Ist ein Graph gerichtet, werden die Kanten als Pfeile dargestellt. Zwei Knoten  $u$  und  $v$  sind *adjazent* zueinander, wenn  $\{u, v\} \in E$ , bzw.  $(u, v) \in E$  im gerichteten Fall. Ein Knoten  $v$  ist *inzident* zu einer Kante  $e$ , wenn  $v \in e$ . Der *Grad* eines Knotens  $d(v)$  entspricht der Anzahl der inzidenten Kanten.

Eine nicht leere Liste von Knoten  $v_0, \dots, v_n$  heißt *Weg*, wenn für alle  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  gilt  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ . Gibt es in einem Graphen für jeden Knoten  $v \in V$  und  $u \in V$  einen Weg, der bei  $v$  beginnt und bei  $u$  endet, heißt der Graph *zusammenhängend*. Ein Weg, der keinen Knoten doppelt enthält und für den gilt  $v_0 = v_n$ , heißt *Kreis*. Ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält, ist ein *Baum*. In einem Baum werden die Knoten mit Grad eins *Blätter* genannt (basierend auf [Die17]).

### 3.2 Fluss auf Graphen

Gegeben sei ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Kapazitätsfunktion  $c : E \rightarrow \mathbb{N}_0$ , die jeder Kante eine Kapazität zuweist. Zusätzlich gebe es eine *Quelle*  $q \in V$  und eine *Senke*  $s \in V$ . Ein *Fluss*  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , ist eine Funktion, die jeder Kante des Graphen einen nicht-negativen Flusswert zuweist, wobei gelten muss:

- $\forall e \in E : 0 \leq f(e) \leq c(e)$  (Kapazitätsbeschränkung)
- $\forall v \in V \setminus \{q, s\} : \sum_{(u,v) \in E} f((u, v)) = \sum_{(v,w) \in E} f((v, w))$  (Flusserhaltung)

Der Gesamtfluss  $F$  von  $q$  nach  $s$  ist dann gegeben durch:

$$F = \sum_{(q,w) \in E} f((q, w)) - \sum_{(u,q) \in E} f((u, q))$$

Ein *maximaler* Fluss ist derjenige Fluss, der den Wert  $F$  maximiert.





## 4. Windfarm-Verkabelungsproblem

Eine Windfarm besteht aus einem Graphen  $G = (V, E)$ , dessen Knotenmenge  $V$  in Substationen  $V_S \subseteq V$  und Windturbinen  $V_T \subseteq V$  aufgeteilt ist. Jede Turbine produziert Strom, der durch die Funktion  $p : V_T \rightarrow \mathbb{N}$  definiert wird und jede Substation hat eine Kapazität, welche durch  $cap : V_S \rightarrow \mathbb{N}$  beschrieben wird. Diese beschränkt die Menge des Stroms, die zu der Substation geleitet werden kann. Die Kantenmenge  $E$  gibt vor, zwischen welchen Knoten Kabel verlegt werden können. Jeder Kante ist durch die Funktion  $len : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Länge zugewiesen. Für die Verkabelung der Windfarm steht eine Menge von Kabeltypen  $K$  zur Verfügung. Jedem Kabel weist die Funktion  $cost : K \rightarrow \mathbb{N}$  die Kosten pro Längeneinheit zu und die Funktion  $cap_{cable} : K \rightarrow \mathbb{N}$  die Kapazität des Kabels zu.

Eine Lösung des Verkabelungsproblems besteht aus einer Zuweisung von Kanten zu Kabeltypen,  $h : E \rightarrow K$ , und einer Funktion  $f : E' \rightarrow \mathbb{Z}$  auf dem gerichteten Graphen  $G'$ . Der Graph  $G'$  entsteht aus  $G$ , wenn jede Kante  $\{u, v\}$  durch die gerichtete Kante  $(u, v)$  ersetzt wird. Damit ist jeder Kante eine feste Richtung zugeordnet. Zusätzlich werden zwei Knoten  $q$  und  $s$  hinzugefügt. Der Knoten  $q$  wird mit jeder Turbine  $v \in V_T$  über eine Kante  $(q, v)$  mit Kapazität  $p(v)$  verbunden und  $f((q, v)) = p(v)$ . Der Knoten  $s$  wird mit jeder Substation  $w \in V_S$  über eine Kante  $(w, s)$  mit Kapazität  $cap(w)$  verbunden. Es ist also

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{q, s\}, \\ E' &= \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E\} \cup \{(q, v) \mid v \in V_T\} \cup \{(w, s) \mid w \in V_S\}. \end{aligned}$$

Damit kann für jeden Knoten  $v$  die Funktion  $f_{net}(v) = \sum_{(u,v) \in E'} f((u, v)) - \sum_{(v,u) \in E'} f((u, v))$  definiert werden. Für eine gültige Lösung darf der Betrag der Funktion  $f$  auf einer Kante die Kapazität des zugewiesenen Kabeltyps nicht überschreiten.

$$\forall e \in E : |f(e)| \leq cap_{cable}(h(e)) \quad (4.1)$$

Für jede Substation  $w \in V_S$  darf die Kapazität der Kante  $(w, s)$  ebenso nicht überschritten werden.

$$\forall w \in V_S : |f((w, s))| \leq cap(w) \quad (4.2)$$

Durch  $f$  ist eine gewisse Menge an Einheiten gegeben. Diese darf in keinem Knoten außer  $q$  und  $v$  geändert werden.

$$\forall v \in V' \setminus \{q, s\} : f_{net}(v) = 0 \quad (4.3)$$

Für  $q$  gilt

$$f_{net}(q) = - \sum_{v \in V_T} p(v). \quad (4.4)$$

#### 4. Windfarm-Verkabelungsproblem

Das heißt eine Menge von Einheiten wird in  $q$  erzeugt und wegen Gleichung 4.3 muss dann gelten:

$$f_{net}(s) = \sum_{v \in V_T} p(v) \quad (4.5)$$

Damit ist  $f$  ein Fluss im Sinne von Kapitel 3, wobei  $c(e) = cap_{cable}(h(e))$  für eine Kante  $e \in E$ . Die Kapazität der anderen Kanten aus  $E'$  ist wie oben definiert. Als Quelle und Senke dienen die zwei Knoten  $q$  und  $s$ . Ist  $f((u, v)) > 0$ , fließen die Flusseinheiten von  $u$  nach  $v$ , ist  $f((u, v)) < 0$ , dann fließen die Einheiten von  $v$  nach  $u$ .

Eine Funktion  $f : E' \rightarrow \mathbb{Z}$ , welche die Gleichungen 4.1 bis 4.5 erfüllt wird im Folgenden *h-Fluss* genannt.

Nun kann das Windfarm-Verkabelungsproblem als Entscheidungsproblem wie folgt definiert werden.

**Definition 4.1.** Gegeben sei ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = V_S \cup V_T$ , eine Längenfunktion  $len : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , eine Kapazitätsfunktion  $cap : V_S \rightarrow \mathbb{N}$  und eine Produktionsfunktion  $p : V_T \rightarrow \mathbb{N}$ . Zusätzlich gebe es eine Menge von Kabeln  $K$  und eine Zahl  $W \in \mathbb{N}$ . Gibt es einen *h-Fluss*  $f : E' \rightarrow \mathbb{Z}$  und eine Zuweisung von Kanten zu Kabeln  $h : E \rightarrow K$ , sodass  $\sum_{e \in E} cost(h(e)) \cdot len(e) \leq W$ ?

**Beobachtung 4.2.** Zu einem gegebenen *h-Fluss* auf einer Kante kann immer der günstigste Kabeltyp mit ausreichender Kapazität gewählt werden. Insbesondere kann für  $f(e) = 0$  kein Kabel auf der Kante  $e$  verlegt werden.

Im Rest dieser Arbeit werden nur solche Zuweisungen von Kanten zu Kabeln betrachtet.

Statt die Kabeltypen zu betrachten, kann auch eine Kostenfunktion  $cost_K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definiert werden, die einem Flusswert die Kosten pro Längeneinheit des günstigsten Kabels mit ausreichender Kapazität zuweist. Die Kostenfunktion ist also

$$cost_K(x) = \min\{cost(k) \mid k \in K, cap_{cable}(k) \geq |x|\}.$$

Damit kann das Verkabelungsproblem auf eine zweite, äquivalente Art definiert werden:

**Definition 4.3.** Gegeben sei ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = V_S \cup V_T$ , eine Längenfunktion  $len : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , eine Kapazitätsfunktion  $cap : V_S \rightarrow \mathbb{N}$  und eine Produktionsfunktion  $p : V_T \rightarrow \mathbb{N}$ . Zusätzlich gebe es eine Menge von Kabeln  $K$ , eine Zahl  $W \in \mathbb{N}$ . Sei  $cost_K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $cost_K(x) = \min\{cost(k) \mid k \in K, cap_{cable}(k) \geq |x|\}$ . Gibt es einen *h-Fluss*  $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$ , sodass  $\sum_{e \in E} cost_K(f(e)) \cdot len(e) \leq W$ ?

Im Folgenden wird sowohl der Fall betrachtet, dass der Strom, den die Turbinen produzieren aufgeteilt werden kann, als auch, dass dies nicht möglich ist. In dem Fall, dass der Stromfluss nicht aufgeteilt werden kann, muss aller Strom, der über ein Kabel fließt, zur selben Substation geleitet werden. Ebenso muss aller Strom, den eine Turbine produziert, zur selben Substation geleitet werden. Eine Lösung des Verkabelungsproblem kann in diesem Fall des unteilbaren Stromflusses durch die Menge der Kanten in  $G$ , über die kein Strom fließt, angegeben werden. Mit Beobachtung 4.2 ist dadurch implizit jede Turbine einer Substation über genau einen Weg zugeordnet.

Es gilt aber, dass Strom, welcher einmal ein Substation erreicht, hat nicht wieder aus der Substation herausfließen darf.

## 5. Windfarm-Verkabelung mit unteilbarem Stromfluss

Zunächst betrachten wir das Windfarm-Verkabelungsproblem, wenn der Stromfluss nicht aufteilbar ist. Das heißt, einmal zusammengeführter Strom kann nicht mehr aufgeteilt werden und muss zur selben Substation geleitet werden. Somit muss jede Turbine an genau eine Substation angeschlossen werden. Es werden verschiedene Parameter betrachtet und miteinander kombiniert, um herauszufinden, wann das Verkabelungsproblem leicht (Polynomialzeit) zu lösen ist und wann es NP-schwer ist:

- Graph: Der zugrundeliegende Graph kann ein allgemeiner Baum oder ein Pfad sein.
- Kantenlängen: Die Kantenlängen sind entweder alle einheitlich, d.h. eins, oder beliebig nicht negativ.
- Kabeltypen: Es gibt entweder nur einen Kabeltyp, der unendliche Kapazität besitzt, oder beliebig viele.
- beschränkte Substationen: Die Kapazitäten der Substationen können unendlich groß oder beschränkt sein.
- beliebige Produktionen: Die Produktionen der Turbinen können entweder für alle Turbinen eins sein oder beliebig aus  $\mathbb{N}$ .

Zwei Substationen  $v, w \in V_S$  seien *benachbart*, wenn es einen Pfad gibt, der  $v$  und  $w$  verbindet und auf dem keine andere Substation liegt.

**Beobachtung 5.1.** *Da bei unteilbarem Stromfluss jede Turbine mit genau einer Substation verbunden werden muss, besteht der Graph der Lösung aus genau  $|V_S|$  Zusammenhangskomponenten, die jeweils eine Substation enthalten. Andernfalls wäre mindestens eine Turbine an keine Substation angeschlossen. Für eine gültige Lösung in einem Baum müssen deshalb genau  $|V_S| - 1$  Kanten aus dem Baum entfernt werden.*

**Beobachtung 5.2.** *Alle Turbinen, die mit genau einer Substation auf einem Weg verbunden werden können, der keine andere Substation enthält, können nur genau dieser Substation zugeordnet werden. Diese Turbinen müssen also nicht weiter betrachtet werden.*

### 5.1 Windfarm-Verkabelung auf Pfadgraphen

Für einen Pfadgraphen gilt mit Beobachtung 5.1, dass für eine gültige Lösung  $|V_S| - 1$  Kanten aus dem Graphen entfernt werden müssen und zwar genau eine Kante zwischen je



Abbildung 5.1: Der Algorithmus aus Abschnitt 5.1.1 entfernt die rot markierten Kanten.

zwei benachbarten Substationen. Der Teil des Pfadgraphen, der von den zwei benachbarten Substation eingeschränkt wird, wird inklusive der Substationen im Folgenden als *Abschnitt* bezeichnet.

Wegen Beobachtung 5.2 werden im Folgenden nur Instanzen betrachtet, die als Blattknoten Substationen haben.

### 5.1.1 Der einfachste Fall

Für den einfachsten Fall seien alle Kantenlängen sowie die Produktionen der Turbinen einheitlich. Zudem gebe es nur einen Kabeltyp mit unendlicher Kapazität und keine Beschränkung der Substation-Kapazitäten.

**Lemma 5.3.** *Um eine optimale Lösung des Verkabelungsproblems zu finden, kann eine beliebige Kante zwischen je zwei benachbarten Substation entfernt werden.*

*Beweis.* Da die Substation-Kapazitäten nicht beschränkt, kann eine beliebige Kante zwischen benachbarten Substationen entfernt werden, um eine gültige Lösung zu erhalten. Weil aber alle Kantenlängen gleich sind und es nur einen Kabeltyp gibt, sind alle Lösungen gleich teuer. Somit ist jede gültige Lösung eine optimale Lösung.  $\square$

Folgender Algorithmus berechnet eine optimale Lösung in Linearzeit.

1. Wähle als Startknoten den Knoten ganz links im Pfadgraph und durchlaufe den Graphen davon ausgehend, bis die letzte Substation erreicht wird.
2. Wenn eine Substation verlassen wird, entferne die ausgehende Kante.

Dies gilt ebenso, wenn die Produktionen der Turbinen unterschiedlich sind. Abbildung 5.1 zeigt das Ergebnis des Algorithmus' auf einem Pfadgraphen. Dabei ist zu beachten, dass der äußeren linken Substation durchaus Turbinen zugewiesen sein können. Wegen Beobachtung 5.2 betrachten wir diese aber nicht.

Nun wollen wir diesen einfachen Fall durch Hinzunahme weiterer Parameter schwieriger machen und untersuchen, wie sich die Komplexität des Verkabelungsproblems dann ändert.

### 5.1.2 Erweiterung durch Kantenlängen und beliebige Produktionen

Statt einheitlichen Kantenlängen, wie im vorhergehenden Fall, werden nun verschiedene nicht negative Kantenlängen betrachtet. Außerdem werden die Produktionen nicht als einheitlich angenommen, da im Algorithmus nicht zwischen einheitlichen und beliebig positiven Produktionen unterschieden wird.

**Lemma 5.4.** *Für die optimale Lösung muss jeweils die längste Kante zwischen je zwei benachbarten Substationen entfernt werden. Dies ist in Linearzeit möglich.*

Da immer eine Kante zwischen je zwei benachbarten Substationen entfernt werden muss (Beobachtung 5.2), wird die optimale Lösung dann erreicht, wenn dies die jeweils längste Kante ist. Dies ist ein Spezialfall der Situation in Abschnitt 5.2.2 und Lemma 5.4 folgt aus Theorem 5.8.

Mit folgendem Algorithmus kann eine optimale Lösung für das Verkabelungsproblem berechnet werden.

1. Wähle als Startknoten die Substation ganz links im Graph und durchlaufe von dort ausgehend der Graphen.
2. Bei jeder Substation: Suche die längste Kante bis zur nächsten Substation und entferne diese. Wiederhole den Schritt von der nächsten Substation ausgehend.
3. Beende den Algorithmus wenn die letzte Substation erreicht wird.

Die Laufzeit des Algorithmus' ist linear in der Anzahl der Knoten, jeder Abschnitt des Graphen wird genau einmal durchlaufen, um die längste Kante herauszufinden.

### 5.1.3 Erweiterung durch Substation-Kapazitäten

Nun werden die Kapazitäten der Substationen im Gegensatz zum einfachsten Fall beschränkt. Außerdem sind die Produktionen der Turbinen beliebig. Die Kantenlängen sind aber im Gegensatz zum vorherigen Fall einheitlich und es steht immer noch nur ein einziger Kabeltyp zur Verfügung. Für eine Lösung müssen die Kanten so entfernt werden, dass die Substation-Kapazitäten nicht überschritten werden.

**Lemma 5.5.** *Jede Lösung, welche die Substation-Kapazitäten nicht verletzt ist eine optimale Lösung. Eine solche Lösung kann in Linearzeit berechnet werden.*

*Beweis.* Dass eine gültige Lösung eine optimale ist, gilt mit der selben Begründung wie in Abschnitt 5.1.1. Der folgende Algorithmus weist den Substationen nacheinander so viele Turbinen wie möglich zu.

1. Wähle die linke Substation  $s \in V_S$  als Startknoten.
2. Laufe von  $s$  aus durch den Graphen und berechne dabei die Summe der Produktionen  $sum$  der durchlaufenen Turbinen solange  $sum \leq cap(s)$  oder bis die nächste Substation erreicht wird.
3. Setze  $sum = 0$ . Entferne dann die nächste Kante und laufe vom nächsten Knoten aus weiter durch den Graphen und addiere dabei die Produktionen der Turbinen wieder in  $sum$  bis die nächste Substation  $s$  erreicht wird. Führe wieder Schritt 2 aus, wenn dies nicht die letzte Substation ist oder  $sum$  die Kapazität der Substation überschreitet (nicht lösbar).

Dieser Algorithmus durchläuft den Graphen genau einmal und berechnet keine ungültigen Lösungen. Es muss gezeigt werden, dass der Algorithmus tatsächlich immer eine Lösung findet, falls eine existiert.

Findet der Algorithmus keine Lösung, gibt es eine Kante  $e$ , die vom Algorithmus entfernt wurde, für die gilt: Die Substation  $s$ , die rechts von  $e$  liegt, hat nicht genug Kapazität für alle Turbinen, die zwischen  $e$  und  $s$  liegen. Nun kann aber keiner Substation, die links von  $e$  liegt noch eine weitere Turbine von rechts zugewiesen werden, denn sonst wäre dies in Schritt 2 passiert. Das heißt aber, dass alle Turbinen zwischen  $e$  und  $s$ , mit  $s$  verbunden werden müssen. Da aber  $s$  nicht über ausreichend Kapazität verfügt, ist das Problem nicht lösbar. Falls also eine Lösung des Problem existiert, findet der Algorithmus sie auch.  $\square$

### 5.1.4 Erweiterung durch mehrere Kabeltypen

Der einzige Parameter, den wir bis hierhin noch nicht in seiner schwierigen Variante betrachtet haben, ist der Parameter der Kabeltypen. Zusätzlich zum einfachsten Fall gibt es nun verschiedene Kabeltypen. Für alle anderen Parameter wird aber wie in Abschnitt 5.1.1 die einfache Variante gewählt.

**Lemma 5.6.** *Indem immer eine mittlere Kante in jedem Abschnitt entfernt wird, wird eine optimale Lösung des Verkabelungsproblems berechnet.*

*Beweis.* Da der Fluss unteilbar ist, muss pro Abschnitt eine Kante entfernt werden. Eine Lösung für einen Abschnitt ist also eine Kante des Abschnittes, die entfernt wird. Betrachte also als Lösung für einen Abschnitt mit  $a$  Turbinen die Kante  $e \in E$  aus dem Abschnitt. Es befinden sich  $l \in \mathbb{N}$  Turbinen zwischen  $e$  und der nächstgelegenen Substation  $s_1$ . Dann gibt es ein  $d \in \mathbb{N}$ , sodass  $2l + 2d + (a \bmod 2) = a$ . Also ist  $d = \lfloor \frac{a}{2} \rfloor - l$ . Sei  $e_0 \in E$  die Kante des Abschnittes, die  $d$  Turbinen von  $e$  entfernt ist und weiter entfernt von  $s_1$  liegt. Im Folgenden sei  $r = (a \bmod 2)$ . Vergleiche nun die Kosten des Abschnittes bei Entfernen von  $e$  mit den Kosten bei Entfernen von  $e_0$ .

Abbildung 5.2 zeigt die Flusswerte der Kanten, wenn  $e$  oder  $e_0$  entfernt wird und die Substation  $s_1$  auf der linken Seite liegt.

Die Kosten für die Kanten zwischen  $s_1$  und  $e$  sind

$$c_1(e) = \sum_{i=1}^l cost_K(i).$$

Die Kosten für die Kanten zwischen  $e$  und der anderen Substation  $s_2$  des Abschnittes sind

$$c_2(e) = \sum_{i=1}^{l+2d+r} cost_K(i).$$

Im Vergleich dazu sind die Kosten bei Entfernen von  $e_0$  als Lösung

$$c_1(e_0) = \sum_{i=1}^{l+d} cost_K(i),$$

$$c_2(e_0) = \sum_{i=1}^{l+d+r} cost_K(i).$$

Daraus ergeben sich die jeweiligen Gesamtkosten

$$c_{ges}(e) = c_1(e) + c_2(e),$$

$$c_{ges}(e_0) = c_1(e_0) + c_2(e_0).$$

Der Kostenunterschied zwischen  $e$  als Lösung und  $e_0$  als Lösung ist auf der Seite von  $s_1$

$$c_1(e) - c_1(e_0) = \sum_{i=1}^l (cost_K(i)) - \sum_{i=1}^{l+d} (cost_K(i)) = - \sum_{i=l+1}^{l+d} (cost_K(i))$$

und auf der anderen Seite

$$c_2(e) - c_2(e_0) = \sum_{i=1}^{l+2d+r} (cost_K(i)) - \sum_{i=1}^{l+d+r} cost_K(i) = \sum_{i=l+d+r+1}^{l+2d+r} (cost_K(i)).$$

Für den Gesamtkostenunterschied gilt dann:

$$c_{ges}(e) - c_{ges}(e_0) = \sum_{i=l+d+r+1}^{l+2d+r} (cost_K(i)) - \sum_{i=l+1}^{l+d} (cost_K(i)) = \sum_{i=l+1}^{l+d} \underbrace{(cost_K(i+d+r) - cost_K(i))}_{\geq 0} \geq 0$$

Eine Lösung mit  $e$  ist also nicht günstiger als eine Lösung mit  $e_0$ . Somit ist die mittlere Kante eines Abschnittes ein optimale Lösung für einen Abschnitt. Werden also aus allen Abschnitten die jeweils mittleren Kanten entfernt, ergibt sich eine optimale Lösung für das Verkabelungsproblem.  $\square$

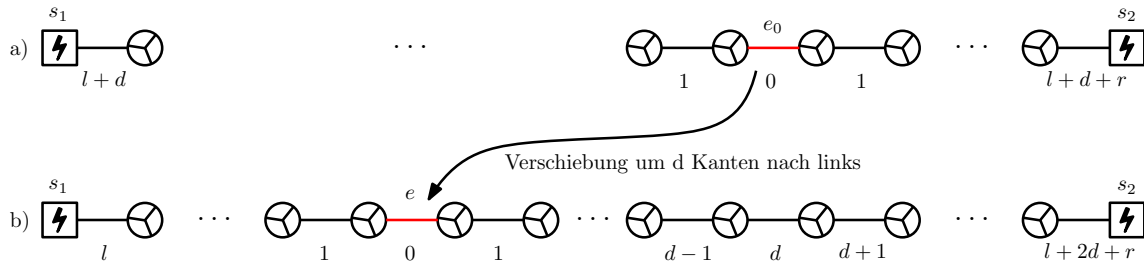


Abbildung 5.2: Statt der mittleren Kante in a) wird in b) die Kante  $d$  Schritte links von  $e_0$  entfernt. Die Beschriftungen unter den Kanten beschreiben die Flusswerte der Kanten bei der jeweiligen Lösung.

Die mittleren Kanten können mit folgendem Algorithmus in Linearzeit berechnet werden.

1. Wähle eines der beiden Blätter als Startknoten und durchlaufe von dort ausgehend den Graphen.
2. Sobald eine Substation erreicht wird: Zähle die Kanten bis zur nächsten Substation und entferne die (gerundet) Mittlere.
3. Führe den vorhergehenden Schritt für alle folgende Substationen aus, bis die letzte Substation erreicht ist.

### 5.1.5 Unbeschränkte Substation-Kapazitäten

Solange die Kapazitäten der Substationen nicht beschränkt sind, kann jeder Abschnitt für sich betrachtet werden, egal wie die anderen Parameter gewählt sind. Eine Änderung der zu entfernenden Kante beeinflusst benachbarte Abschnitte nicht, da sich die verbleibende Kapazität der Substationen ( $\infty$ ) nicht ändert. Also kann für jeden Abschnitt das Optimum gesucht werden und damit ergibt sich dann eine optimale Lösung für den ganzen Pfadgraphen. Da genau eine Kante pro Abschnitt entfernt wird, kann dies auch durch einfaches Ausprobieren in polynomieller Zeit gelöst werden. Pro Abschnitt gibt es höchstens  $n - 1$  Kanten ( $n = |V|$ ). Um für einen Abschnitt bei einer beliebigen Menge an Kabeltypen die Kosten auszurechnen, wenn eine Kante entfernt wurde, muss der Abschnitt einmal durchlaufen werden. Für den ganzen Pfadgraphen wird also jede Kante einmal betrachtet und für jede Kante einmal der Abschnitt, in dem die Kante liegt durchlaufen. Damit ist das Ausprobieren in  $O(n^2)$  Schritten möglich.

### 5.1.6 Das vollständige Problem auf Pfadgraphen

Nun betrachten wir den schwierigsten Fall, des Verkabelungsproblems auf einem Pfadgraphen bei teilbarem Stromfluss. Aber auch bei beschränkten Substation-Kapazitäten, verschiedenen Kabeltypen und beliebigen nicht negativen Kantenlängen und Produktionen ist das Problem noch in polynomieller Zeit lösbar.

Eine Lösung kann mit einem dynamischen Programm, welches Algorithmus 5.1 zeigt, berechnet werden. Dieses läuft die Abschnitte des Graphen von links nach rechts ab (Zeile 3). Für jede Kante des aktuellen Abschnittes wird zunächst geprüft, ob sie entfernt werden kann, ohne Substation-Kapazitäten zu verletzen (Zeile 4ff.). Wenn dies möglich ist, wird die Kante mit der günstigsten Zwischenlösung aus dem vorherigen Abschnitt gesucht (Zeile 10ff.). Sind alle Abschnitte abgearbeitet, wird aus dem letzten Abschnitt die Kante mit den geringsten Kosten gesucht und daraus die Lösung konstruiert (Zeile 19). Der Pfad wird quasi Abschnitt für Abschnitt verlängert und für jeden Abschnitt wird auf Basis der Lösungen des vorherigen Abschnittes eine neue Menge an Lösungen berechnet. Dabei ist die günstigste davon auch die optimale Lösung für den Graphen vom ersten bis zum aktuellen Abschnitt.

**Algorithmus 5.1: FULLPATH**


---

**Input:** Pfad  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , Substationen  $V_S = \{s_0, \dots, s_a\}$   
**Output:** Menge  $S$  der zu entfernenden Kanten

```

1 möglich =  $\emptyset$ 
  //  $E_i$  sei die Kantenmenge des  $i$ -ten Abschnittes.
  //  $V_i$  sei die Knotenmenge des  $i$ -ten Abschnittes.
2  $a$  = Anzahl der Abschnitte
  // iteriere über alle Abschnitte
3 for  $i = 1$  bis  $a$  do
4   for all  $e = \{v_j, v_{j+1}\} \in E_i$  do
5     if  $\sum_{v_k \in V_i, k \leq j} p(v_k) \leq \text{cap}(s_{i-1})$  und  $\sum_{v_k \in V_i, k > j} p(v_k) \leq \text{cap}(s_i)$  then
6       möglich.HINZUFÜGEN ( $e$ )
7       KOSTEN ( $e$ ) = Kosten des  $i$ -ten Abschnittes bei Entfernen von  $e$ 
8     else
9       KOSTEN( $e$ ) =  $\infty$ 
10  for all  $e \in$  möglich do
11    if  $i = 1$  then
12      VORGÄNGER( $e$ ) = NULL
13    else
14      VORGÄNGER( $e$ ) =  $h \in E_{i-1}$  mit  $h = \{u_l, u_{l+1}\}$  hat die kleinsten
        KOSTEN ( $h$ ) und  $\sum_{u_k \in V_{i-1}, k > l} p(u_k) + \sum_{v_k \in V_i, k \leq j} p(v_k) \leq \text{cap}(s_{i-1})$ 
15      if kein solcher Vorgänger existiert then
16        KOSTEN( $e$ ) =  $\infty$ 
17      else
18        KOSTEN ( $e$ ) += KOSTEN (VORGÄNGER( $e$ ))
19 lösung = Kante mit den kleinsten Kosten  $\in E_n$ 
20  $S = \{\text{lösung}\}$ 
21 while VORGÄNGER(lösung)  $\neq$  NULL do
22   lösung = VORGÄNGER(lösung)
23    $S = S \cup \{\text{lösung}\}$ 
24 return  $S$ 

```

---

**Theorem 5.7.** *Algorithmus 5.1 berechnet für das vollständige Windfarm-Verkabelungsproblem auf Pfadgraphen eine optimale Lösung in  $O(n^2)$  Schritten.*

*Beweis.* Eine Lösung für das Verkabelungsproblem auf dem Pfadgraphen ist eine Menge von Kanten, die nicht für die Verkabelung verwendet werden. Es wird gezeigt, dass der Algorithmus für jede Kante  $e$  im Abschnitt zwischen den letzten beiden Substationen eine optimale Lösung unter allen Lösungen, welche  $e$  beinhalten, berechnet. Zeige dies durch eine Induktion über die Anzahl  $n$  der Abschnitte in einem Pfadgraphen. Die Beste von diesen Lösungen ist dann die optimale Lösung und daraus folgt die Behauptung.

Eine *Zwischenlösung* für den  $i$ -ten Abschnitt bezeichne eine Lösung für das Verkabelungsproblem, auf den Abschnitten 1 bis  $i$  (entspricht Zeile 3).

Für  $n = 1$  (Zeile 11) gibt es in einem Pfadgraphen also genau einen Abschnitt. Jede Kante, die aus dem Abschnitt entfernt werden kann, ohne dass die Substation-Kapazitäten der beiden Substationen verletzt werden, ist eine gültige Lösung des Problems. Also ist die optimale Lösung für jede Kante dieses Abschnittes die Kante selbst.



Nun sei  $n > 1$  und nach der Induktionshypothese berechne der Algorithmus optimale Zwischenlösungen für  $n - 1$ . Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  bezeichne die Menge  $E_i \subseteq E$  die Kantenmenge des  $i$ -ten Abschnittes. Für eine Kante  $e \in E_n$  wird die Kante  $e' \in E_{n-1}$ , die gütlig aus dem vorherigem Abschnitt entfernt werden kann und die günstigsten Kosten hat, gesucht (Zeile 14). Das heißt, unter der Voraussetzung, dass  $e$  bereits entfernt wurde, kann  $e'$  immer noch entfernt werden, ohne dass Substation-Kapazitäten des  $(n - 1)$ -ten Abschnittes verletzt werden. Da aber für  $e'$  eine optimale Zwischenlösung  $L'$  berechnet wurde, ist  $L' \cup \{e\}$  die optimale Lösung für  $e$ . Also berechnet der Algorithmus auch für einen Pfadgraphen mit  $n$  Abschnitten eine optimale Lösung für jede Kante des Abschnittes.

Nun betrachten wir die Laufzeit des Algorithmus 5.1. Sei  $n = |V|$ . Die Anzahl der Kanten des Graphen ist  $n - 1$  und die Anzahl der Kanten pro Abschnitt sei höchstens  $a$ . Für jede Kante des Graphen wird geprüft, ob die Kante entfernt werden kann, ohne Substation-Kapazitäten zu verletzen (Zeile 5). Für alle Kanten zusammen ist dies in  $O(n)$  möglich. Dafür wird jeder Abschnitt einmal von der einen Substation aus durchlaufen und einmal von der anderen. Dabei werden die Produktionen der Turbinen addiert, bis sie die Substation-Kapazität überschreiten. Alle Kanten bis zu dieser Turbine können dann markiert werden. Wenn eine Kante bei beiden Durchläufen markiert wird, kann sie entfernt werden. Weiter werden dann für jede Kante  $e$  die Kosten im Abschnitt berechnet. Um die Kosten für eine Kante  $e$  zu berechnen, wird der Abschnitt einmal durchlaufen. Um die Kosten für alle Kanten zu berechnen braucht es also  $O(n \cdot a)$  Schritte. Für  $e$  wird für alle Kanten des vorherigen Abschnittes geprüft, ob sie zusammen mit  $e$  entfernt werden können, ohne dass die Kapazität einer Substation überschritten wird. Der Schritt zur Überprüfung braucht für alle Kanten des vorherigen Abschnittes zusammen  $O(n)$  Schritte. Hierfür muss der vorherige Abschnitt ausgehend von der Substation zwischen  $e$  und dem vorherigen Abschnitt nur einmal durchlaufen werden. Dabei werden die Produktionen der abgelaufenen Turbinen addiert und falls diese die verbleibende Kapazität der Substation überschreiten, kann die Kante nicht mehr zusammen mit  $e$  entfernt werden. Somit dauert die Überprüfung für alle Kanten des Graphen zusammen  $O(n \cdot a)$  Schritte. Da pro Abschnitt nur eine Kante entfernt wird, dauert das Berechnen der endgültigen Lösung  $|V_S| - 1$  Schritte. Alles in Allem läuft der Algorithmus also in  $O(n \cdot a)$  Zeit. Für die maximale Anzahl an Kanten  $a$  in einem Abschnitt gilt  $a \leq n - 1$ . Dann kann die Laufzeit des Algorithmus' gegen  $O(n^2)$  abgeschätzt werden.  $\square$

Damit haben wir einen Algorithmus gefunden, der für teilbaren Stromfluss alle Fälle des Verkabelungsproblems auf einem Pfadgraphen in Polynomialzeit lösen kann. Nun betrachten wir das Verkabelungsproblem auf allgemeinen Bäumen.

## 5.2 Windfarm-Verkabelung auf allgemeinen Bäumen

Auf allgemeinen Bäumen spielen die Produktionen der Turbinen im Gegensatz zum Pfadgraphen (Abschnitt 5.1) keine Rolle. Denn Turbinen, die nicht auf dem Pfad zwischen zwei Substationen liegen, können als Produktion zu der Turbine addiert werden, durch die sie an einen Pfad zwischen zwei Substationen angeschlossen sind. Dies ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Deshalb werden die Produktionen in diesem Abschnitt immer als beliebige natürliche Zahlen angenommen. Bis auf die Produktionen wird aber dieselbe Auswahl an möglichen Parametern betrachtet wie im vorhergehenden Abschnitt 5.1.

Es muss wie beim Pfad immer nur der Baum betrachtet werden, der durch die Substationen begrenzt wird. Dieser hat als Blätter nur Substationen. Die Produktionen außen liegender Turbinen werden dabei zu den inneren wie oben beschrieben addiert. Sind die Turbinen direkt an eine Substation angeschlossen, wird die Kapazität der Substation entsprechend der Produktionen der Turbinen verringert. Im Folgenden wird dieser Baum *Substation-Baum* genannt. Dieser kann in Linearzeit berechnet werden:

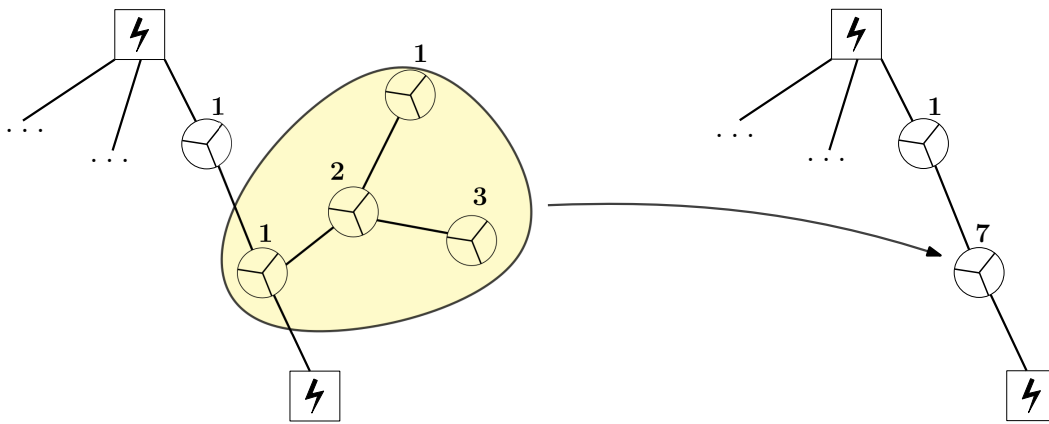


Abbildung 5.3: Produktionen der außenstehenden Turbinen werden zur inneren Turbine hinzugefügt.

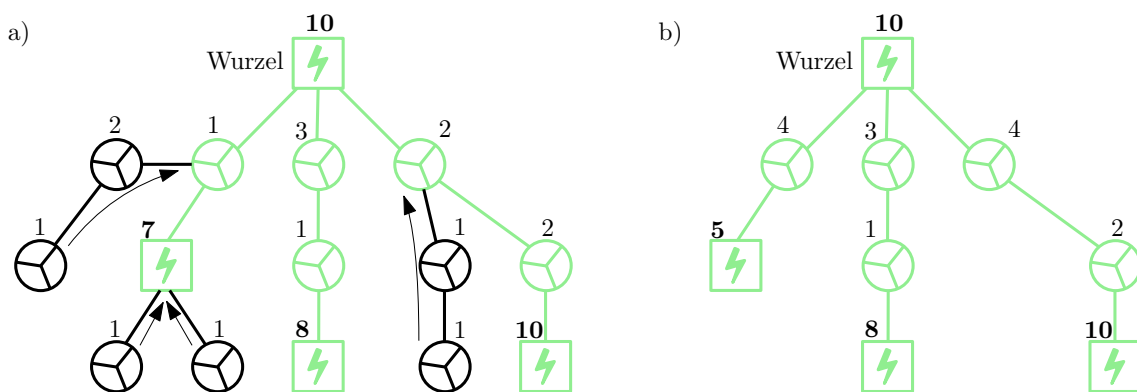


Abbildung 5.4: Der grün markierte Teil des Graphen in a) wird in Schritt 2 des Algorithmus' in Abschnitt 5.2 berechnet. In Schritt 3 werden die nicht markierten Teile in den markierten Teil entlang der Pfeile integriert. Das Ergebnis ist der Graph in b). Die Zahlen an den Knoten stellen die Produktionen der Turbinen bzw. Kapazitäten der Substationen dar.

1. Führe zunächst von einer beliebigen Substation (Wurzel) aus eine Tiefensuche durch.
2. Laufe dann von allen Substationen in Richtung Wurzel und markiere dabei die abgelaufenen Kanten und Knoten, bis die Wurzel oder ein markierter Knoten erreicht werden.
3. Für alle nicht markierten Turbinen  $t$ : Laufe in Richtung Wurzel bis der Substation-Baum erreicht wird und addiere  $p(t)$  zur Produktion der Turbine bzw. ziehe  $p(t)$  von der Kapazität der Substation ab.

In Abbildung 5.4 wird der Algorithmus veranschaulicht. Im Folgenden werden nur Instanzen betrachtet, die ein Substation-Baum sind.

Wie bei Pfadgraphen gilt auch bei allgemeinen Bäumen mit Beobachtung 5.1, dass aus dem Graphen genau  $|V_S| - 1$  Kanten entfernt werden müssen, um eine gültige Lösung zu erhalten.

### 5.2.1 Einfacher Baum

Zunächst betrachten wir wieder den einfachen Fall, dass es nur einen unbeschränkten Kabeltyp gibt, dass alle Kanten die Länge eins und alle Substationen unbeschränkte Kapazität haben. Genau wie beim Pfadgraphen muss auf jedem Pfad zwischen zwei

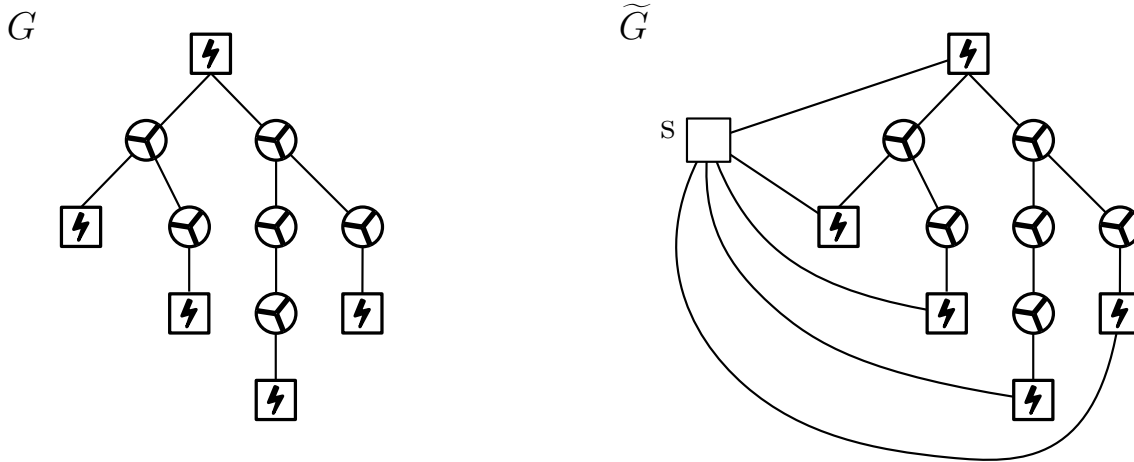


Abbildung 5.5: Der Graph  $G$  wird in den Graphen  $\tilde{G}$  transformiert, wie im Beweis für Theorem 5.8.

Substationen genau eine Kante entfernt werden. Bei einer Baumstruktur muss allerdings darauf geachtet werden, dass dabei keine Turbine isoliert wird, da sich die verschiedenen Pfade überschneiden können. Wie in Abschnitt 5.1.1 sind aber alle gültigen Lösungen auch optimale Lösungen.

1. Wähle eine beliebige Substation als Startknoten und führe eine Tiefensuche von dort aus durch.
2. Immer wenn eine Substation erreicht wird: Entferne die Kante zu Substation.

Dieser Algorithmus entfernt eine Kante für jede Substation außer der Start-Substation. Gleichzeitig werden keine Turbinen isoliert, da nur zu Substationen inzidente Kanten, und zwar maximal eine pro Substation, entfernt werden. Das heißt, der Algorithmus liefert eine optimale Lösung. Diese Lösung kann in Linearzeit berechnet werden, da jede Kante genau einmal vom Algorithmus betrachtet wird.

Nun wird das Problem wie beim Pfadgraphen durch Hinzunahme weiterer Parameter erweitert.

### 5.2.2 Baum mit Kantenlängen

Wir betrachten zunächst das Windfarm-Verkabelungsproblem auf einem Baum mit unbeschränkten Substation-Kapazitäten, einem Kabeltyp und beliebigen nicht negativen Kantenlängen. Um ein optimale Lösung für diesen Fall zu berechnen, wird aus dem gegebenen Graphen  $G$  ein neuer Graph  $\tilde{G}$  konstruiert. Auf diesem Graphen  $\tilde{G}$  wird dann ein Algorithmus zur Berechnung eines minimalen Spannbaums ausgeführt.

Der Graph  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  wird aus  $G$  konstruiert, indem ein zusätzlicher Knoten  $s$  zu  $G$  hinzugefügt wird und dieser Knoten mit jeder Substation durch eine Kante verbunden wird. Dies wird in Abbildung 5.5 veranschaulicht. Alle neu eingefügten Kanten erhalten die Länge 0.

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= V \cup \{s\}, \tilde{V}_T = V_T, \tilde{V}_S = V_S, \\ \tilde{E} &= E \cup \{\{s, x\} \mid x \in V_S\}.\end{aligned}$$

**Theorem 5.8.** *Ein minimaler Spannbaum auf  $\tilde{G}$ , welcher die neu hinzugefügten Kanten enthält, impliziert eine optimale Lösung des Verkabelungsproblems auf einem Baum mit Kantenlängen beliebig aus  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , einem unbeschränkten Kabeltyp und unbeschränkten Substation-Kapazitäten.*

*Beweis.* Für einen allgemeinen Graphen und seinen minimalen Spannbaum gilt, dass die längste Kante in jedem Kreis des Graphen in keinem minimalen Spannbaum enthalten ist (Kreiseigenschaft) [Kru56]. Außerdem gilt, dass die (eindeutig) kürzeste Kante in jedem Schnitt des Graphen Teil des minimalen Spannbaums ist (Schnitteigenschaft) [Pri57].

Wir wollen zeigen, dass ein minimaler Spannbaum in  $\tilde{G}$  berechnet werden muss, um in  $\tilde{G}$  alle Turbinen  $t \in \tilde{V}_T$  mit  $s$  möglichst günstig auf genau einem Weg zu verbinden. Ein minimaler Spannbaum ist zusammenhängend und verbindet somit jede Turbine auf mindestens einem Weg mit  $s$ . Da ein minimaler Spannbaum keinen Kreis, enthält ist jede Turbine auf genau einem Weg mit  $s$  verbunden. Bei einem minimalen Spannbaum, der alle zu  $s$  inzidenten Kanten enthält, ist dann jede Turbine auch mit nur genau einer Substation verbunden, sonst würde der Spannbaum einen Kreis enthalten. Das heißt die Kanten aus  $G$ , welche im minimalen Spannbaum von  $\tilde{G}$  enthalten sind, sind eine Lösung für das Verkabelungsproblem.

Nun muss gezeigt werden, dass diese Kanten auch eine Verkabelung mit minimalen Kosten sind. Da nur ein Kabeltyp zur Verfügung steht, gibt es pro Längeneinheit feste Kosten. Ein minimaler Spannbaum hat die minimale Gesamtkantenlänge unter allen Spannbäumen von  $\tilde{G}$ . Damit hat dann auch die Verkabelung minimale Kosten. Folglich wird durch einen minimalen Spannbaum in  $\tilde{G}$ , der jede zu  $s$  inzidente Kante enthält jede Turbine an genau eine Substation möglichst günstig angeschlossen. Werden dann  $s$  und die hinzugefügten Kanten aus dem minimalen Spannbaum entfernt, ergibt sich eine optimale Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$ .  $\square$

Wir haben nun gezeigt, dass ein minimaler Spannbaum von  $\tilde{G}$ , der die neu hinzugefügten Kanten enthält, eine optimale Lösung des Windfarm-Verkabelungsproblems impliziert. Allerdings haben wir nicht gezeigt, dass auch immer solch ein minimaler Spannbaum existiert.

**Lemma 5.9.** *Es existiert ein minimaler Spannbaum von  $\tilde{G}$ , der alle zu  $s$  inzidenten Kanten enthält.*

*Beweis.* Im Großen und Ganzen wird dieses Lemma von Prim in [Pri57] gezeigt. Prim zeigt, dass für einen minimalen Spannbaum jeder Knoten mit einem nächsten Nachbarn verbunden werden muss. Dabei ist ein nächster Nachbar eines Knoten  $v$  ein Knoten  $w$ , dessen Abstand zu  $v$  mindestens so klein ist wie der Abstand von  $v$  zu allen anderen Knoten. Wenn ein Knoten mehrere nächste Nachbarn hat, kann für die Konstruktion eines minimalen Spannbaums der Knoten mit einem beliebigen nächsten Nachbarn verbunden werden [Pri57].

Für jede Substation  $x$  aus  $\tilde{G}$  gilt, dass  $s$  ein nächster Nachbar der Substation ist, da die Kante  $\{x, s\}$  die Länge 0 hat und es keine Kanten mit negativer Länge gibt. Für einen minimalen Spannbaum von  $\tilde{G}$  kann  $x$  also immer mit  $s$  verbunden werden. Somit gibt es einen minimalen Spannbaum von  $\tilde{G}$ , der alle zu  $s$  inzidenten Kanten enthält.  $\square$

Der Graph  $\tilde{G}$  kann in  $O(|V_S|)$  konstruiert werden, da nur für jede Substation eine Kante zum Graphen  $G$  hinzugefügt werden muss. Der zusätzliche Knoten  $s$  kann in konstanter Zeit hinzugefügt werden. Ein minimaler Spannbaum von  $\tilde{G}$  lässt sich beispielsweise mit dem Algorithmus von Prim [Pri57] berechnen. Wenn alle zu  $s$  inzidenten Kanten im minimalen Spannbaum enthalten sein sollen, muss der Algorithmus von Prim dahingehend modifiziert werden, dass die zu  $s$  inzidenten Kanten gegenüber anderen Kanten der Länge 0 priorisiert werden. Die Anzahl der Kanten in  $\tilde{G}$  ist linear in der Anzahl der Knoten. Damit ist die Laufzeit des Algorithmus von Prim  $O(n \log n)$ , wobei  $n = |V|$ .

### 5.2.3 Baum mit Substation-Kapazitäten

Nun seien die Substation-Kapazitäten beschränkt, die Kantenlängen einheitlich und die Anzahl der Kabeltypen eins. Dieses eine Kabel habe unendliche Kapazität. Das Prinzip des Algorithmus für dieses Problem ist dasselbe wie beim analogen Problem in Pfadgraphen (Abschnitt 5.1.3). Der Baum wird von den Blättern (Substationen) aus von unten nach oben zur Wurzel (eine beliebige Substation) durchlaufen. Dabei werden den Substationen so viele Turbinen, wie durch die Substation-Kapazität zugelassen, in Richtung Wurzel zugewiesen. Ein Knoten wird immer erst dann bearbeitet, wenn alle seine Kindknoten schon fertig bearbeitet sind. Für eine Turbine wird Algorithmus 5.2 ausgeführt, um sie abzuarbeiten. Falls die Turbine nur ein Kind hat (Zeile 2), wird die Turbine entweder der nächsten Substation im Unterbaum (Zeile 5) zugewiesen, wenn diese noch über ausreichend Kapazität verfügt, oder in Richtung Wurzel verbunden (Zeile 8f.). Wird sie in Richtung Wurzel verbunden, wird der Graph für den Algorithmus so angepasst, dass keine Turbine mit Grad eins entsteht. Das heißt die Produktionen der Turbinen und aller Turbinen bis zum nächsten Kreuzungspunkt oder zur nächsten Substation werden diesem Kreuzungspunkt (Zeile 11) oder dieser Substation (Zeile 15) hinzugefügt. Ist die Turbine ein Kreuzungspunkt, wird sie der Substation im Unterbaum mit der größten freien Kapazität zugewiesen (Zeile 20). Falls keine ausreichende freie Kapazität bei den Substationen vorhanden ist, werden die Kanten zu den Kindknoten der Turbinen entfernt und die Turbine in Richtung Wurzel verbunden (Zeile 23f.). Dabei wird der Graph wie oben verändert. Die Substationen werden also so weit wie möglich in Richtung der Wurzel „expandiert“.

Bevor die Korrektheit von Algorithmus 5.2 gezeigt wird, beweisen wir folgendes Lemma.

**Lemma 5.10.** *Wenn Algorithmus 5.2 von unten nach oben vollständig auf alle Knoten eines durch Substationen beschränkten Abschnittes angewendet wurde, hat die Substation, die am nächsten an der Wurzel liegt, maximale freie Kapazität.*

*Beweis.* Dies wird nun per Induktion über die Anzahl  $n \in \mathbb{N}$  der Ebenen im Baum gezeigt. Die Ebene einer Substation  $w$  ist dabei die Anzahl der Substationen, die auf dem Pfad, der  $w$  mit der Wurzel verbindet, liegen. Das heißt, die Wurzel-Substation liegt auf Ebene 1 und die zur Wurzel benachbarten Substationen auf Ebene 2. Die Anzahl der Ebenen eines Baumes ist dann die maximale Ebene einer Substation dieses Baumes.

Für  $n = 1$  hat der Baum genau eine Substation. Da nur Instanzen betrachtet werden, die nur Substationen als Blätter haben, besteht der Baum aus genau dieser Substation. Die freie Kapazität der Substation ist also maximal.

Die Behauptung gelte nun für alle Bäume mit höchstens  $n \in \mathbb{N}$  Ebenen. Betrachte einen Baum mit  $n+1$  Ebenen. Sei  $s$  die Wurzel dieses Baumes. Alle zu  $s$  benachbarten Substationen  $S \subseteq V_S$  sind Wurzeln eines Baumes mit höchstens  $n$  Ebenen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also, dass diese Substationen maximale freie Kapazität haben, nachdem ihr jeweiliger Unterbaum abgearbeitet wurde. Nun wird also Algorithmus 5.2 auf jeden Knoten zwischen den Substationen aus  $S$  und  $s$  von unten nach oben angewendet. Dabei wird für jede Turbine von unten nach oben geprüft, ob sie noch einer Substation aus  $S$  zugewiesen werden kann (Zeile 4). Ist die Turbine ein Kreuzungspunkt, wird sie falls möglich, der Substation mit der größten freien Kapazität im Unterbaum zugewiesen (Zeile 20), da der Stromfluss nicht aufteilbar ist. Somit werden maximal viele Turbinen zwischen  $s$  und den Substationen aus  $S$ , den Substationen aus  $S$  zugewiesen. Es bleibt also nur noch eine minimale Anzahl an Turbinen übrig, die  $s$  zugewiesen werden müssen. Nach Abarbeitung des Unterbaums von  $s$  hat  $s$  folglich noch maximale freie Kapazität.  $\square$

Mit Hilfe des Lemmas 5.10 können wir nun folgendes Theorem beweisen.

**Algorithmus 5.2:** EXPSUBSTATION

---

**Input:** Baum  $G = (V, E)$ , Knoten  $v \in V_T$

- 1 Für  $v$  seien alle Kindknoten schon abgearbeitet.
- 2 **if**  $d(v) = 2$  **then**
  - 3  $s$  sei die nächste Substation im Unterbaum von  $v$
  - 4 **if**  $p(v) \leq \text{cap}(s)$  **then**
    - 5 Füge  $v$  zu  $s$  hinzu.
    - 6  $\text{cap}(s) = \text{cap}(s) - p(v)$
  - 7 **else**
    - 8 Entferne die Kante zwischen  $v$  und dem Kindknoten von  $v$
    - 9 Sei  $P$  der Pfad von  $v$  bis zum nächsten Knoten  $u$  der Kreuzungspunkt oder Substation ist.
    - 10 **if**  $u \in V_S$  **then**
      - 11  $\text{cap}(u)- = \sum_{t \in P} p(t)$
      - 12 **if**  $\text{cap}(u) < 0$  **then**
        - 13 **return** *keine Lösung*
      - 14 **else**
        - 15  $p(u)+ = \sum_{t \in P} p(t)$
- 16 **else**
  - 17 //  $d(v) > 2$
  - 18 Die Kindknoten von  $v$  seien  $v_1, \dots, v_k$ .
  - 19 Jedes  $v_i$  ist einer Substation  $s_i$  zugewiesen.
  - 20 **if**  $\exists s_i : p(v) \leq \text{freie Kapazität von } s_i$  **then**
    - 21 Füge  $v$  der Substation  $s_j$  mit maximaler freier Kapazität hinzu.
    - 22 Entferne die Kanten zu den Kinder  $v_i$  mit  $i \neq j$
  - 23 **else**
    - 24 Entferne die Kante zwischen  $v$  und allen  $v_i$
    - 25 Sei  $P$  der Pfad von  $v$  bis zum nächsten Knoten  $u$  der Kreuzungspunkt oder Substation ist.
    - 26 **if**  $u \in V_S$  **then**
      - 27  $\text{cap}(u)- = \sum_{t \in P} p(t)$
      - 28 **if**  $\text{cap}(u) < 0$  **then**
        - 29 **return** *keine Lösung*
      - 30 **else**
        - 31  $p(u)+ = \sum_{t \in P} p(t)$

---

**Theorem 5.11.** *Wenn Algorithmus 5.2 von unten nach oben für jede Turbine des Baumes aufgerufen wird, ergibt sich eine optimale Lösung des Verkabelungsproblems auf einem Baum mit einheitlichen Kantenlängen, einem Kabeltyp und beschränkten Substation-Kapazitäten.*

*Beweis.* Eine Lösung, die Algorithmus 5.2 ausgibt, verletzt die Substation-Kapazitäten nicht, denn andernfalls wird in Zeile 13 oder Zeile 28 „keine Lösung“ ausgegeben. Außerdem wird jede Turbine genau einer Substation zugewiesen. Wenn möglich, wird sie einer Substation im Unterbaum (Zeile 20) zugewiesen und sonst der nächsten Substation in Richtung Wurzel (Zeile 23). Eine solche gültige Lösung ist immer eine optimale Lösung, weil die Anzahl der Kanten, die bei einer gültigen Lösung aus dem Graphen entfernt werden, immer  $|V_S| - 1$  ist. Jede Kante, die nicht entfernt wurde, kostet dann soviel wie der einzige Kabeltyp, da alle Kantenlängen gleich sind. Damit sind aber die Kosten jeder gültigen Lösung gleich und somit ist jede gültige Lösung auch eine optimale Lösung.

Nun ist zu zeigen, dass Algorithmus 5.2 auch immer eine gültige Lösung berechnet, wenn eine existiert.

Falls der Algorithmus keine Lösung für das Verkabelungsproblem findet (Zeile 13 und Zeile 28), gibt es einen durch Substationen beschränkten Abschnitt des Graphen, in dem eine Substation  $s$  nicht über ausreichend Kapazität für die ihr zugewiesenen Turbinen  $T \subseteq V_T$  verfügt. Substation  $s$  sei dabei der Knoten des Abschnittes mit dem kürzesten Abstand zur Wurzel. Für jede andere Substation in dem Abschnitt wurde in Zeile 8 bzw. Zeile 23 eine Kante des Abschnittes entfernt, sodass alle Turbinen aus  $T$  mit  $s$  verbunden wurden. Alle zu  $s$  benachbarten Substationen im Unterbaum von  $s$  können aber keine weiteren Turbinen aufnehmen. Denn für eine solche Substation  $s'$  gilt, dass die nächste Turbine in Richtung Wurzel die Kapazität der Substation überschreiten würde, also die Bedingung in Zeile 4 oder Zeile 19 nicht erfüllt ist. Oder es gilt, dass die nächste Turbine ein Kreuzungspunkt ist und einer Substation mit mehr freier Kapazität zugewiesen wurde (Zeile 20). Nach Lemma 5.10 kann die Verkabelung im Unterbaum von  $s'$  nicht so geändert werden, dass  $s'$  weitere Turbinen aus  $T$  aufnehmen kann. Damit müssen aber alle Turbinen aus  $T$  mit  $s$  verbunden werden. Da die Kapazität von  $s$  aber nicht ausreicht, ist das Verkabelungsproblem nicht lösbar. Daraus folgt wiederum, dass der Algorithmus eine Lösung findet, wenn eine Lösung des Verkabelungsproblem existiert.  $\square$

Algorithmus 5.2 hat lineare Zeitkomplexität, weil das Finden der nächsten Substation(en) in Zeile 3 und Zeile 18  $O(n)$  Schritte benötigt. Alle anderen Operationen sind in konstanter Zeit möglich, außer das Berechnen des Pfades von einem Knoten bis zum nächsten Kreuzungspunkt. Dies dauert ebenfalls  $O(n)$  Schritte und ist im Gesamtkontext sogar in amortisiert konstanter Zeit möglich, da für die Knoten des Pfades Algorithmus 5.2 nicht mehr ausgeführt wird. Da Algorithmus 5.2 für jeden Knoten des Baumes einmal ausgeführt wird, braucht das Finden einer Lösung für dieses Problem  $O(n^2)$  Schritte.

**Korollar 5.12.** *Algorithmus 5.2 kann für den Fall, dass der einzige Kabeltyp in seiner Kapazität beschränkt ist, angepasst werden. Statt der freien Kapazität der aktuell betrachteten Substation muss immer der kleinere Wert der freien Substation-Kapazität oder der freien Kabelkapazität betrachtet werden.*

#### 5.2.4 Verkabelung wird NP-schwer

In diesem Abschnitt zeigen wir für die noch fehlenden Fälle des Windfarm-Verkabelungsproblems auf Bäumen bei unteilbarem Fluss, dass sie NP-schwer sind. Zunächst betrachten wir das Problem mit beliebigen nicht negativen Kantenlängen, beschränkten Substationen und einem Kabeltyp mit unbeschränkter Kapazität.

**Theorem 5.13.** *Das Verkabelungsproblem ist auf einem Baum mit beliebigen nicht negativen Kantenlängen, beschränkten Substation-Kapazitäten und einem Kabeltyp (unbeschränkte Kapazität) NP-schwer.*

*Beweis.* Um Theorem 5.13 zu beweisen wird das Teilsommenproblem (Subset-Sum) auf das entsprechende Windfarm-Verkabelungsproblem reduziert.

**Teilsommenproblem:** Gegeben sei eine endliche Menge von natürlichen Zahlen  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und eine Zahl  $W \in \mathbb{N}$ . Gibt es eine Teilmenge  $U' \subseteq U$ , sodass  $\sum_{u \in U'} u = W$  ?

Das Teilsommenproblem ist NP-vollständig [ST02].

Eine Instanz des Teilsommenproblems, wie oben definiert, wird nun in eine Instanz des Windfarm-Verkabelungsproblems auf Bäumen transformiert.

Erzeuge einen Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = V_T \cup V_S$ . Dabei sei die Menge der Turbinen  $V_T = \{t_u \mid u \in U\}$  und  $p(t_u) = u$ . Die Menge der Substationen sei  $V_S = \{s_u \mid u \in U\} \cup \{s_W\}$  wobei  $cap(s_u) = u$  und  $cap(s_W) = W$ . Für jede Turbine  $t_u$  gebe es die Kante  $\{t_u, s_W\}$  mit Länge  $M - u$ , wobei  $M = \max(U) + 1$ , und die Kante  $\{t_u, s_u\}$  mit Länge  $M$ . Diese Konstruktion wird in Abbildung 5.6 gezeigt und ist in Linearzeit möglich. Zusätzlich gibt es einen Kabeltyp mit unendlicher Kapazität und Kosten 1. Gibt es eine Zuteilung von Turbinen zu Substationen und Kanten zu Kabeln bzw. kein Kabel, sodass die Substation-Kapazitäten nicht überschritten werden und Gesamtkabelkosten höchstens  $n \cdot M - W$ ?

Nun ist zu zeigen, dass aus einer Lösung des Teilsommenproblems eine Lösung des Verkabelungsproblems berechnet werden kann und umgekehrt.

Nun sei eine Lösung  $U' \subseteq U$  des Teilsommenproblems gegeben. Verbinde genau die, den Elementen aus  $U'$  entsprechenden, Turbinen mit der Substation  $s_W$ . Alle anderen Turbinen werden mit ihrer anderen adjazenten Substation verbunden. Mit dieser Zuteilung werden die Kapazitätsbedingungen der Substationen  $s_u$  offensichtlich eingehalten. Da  $\sum_{u \in U'} u = W$  und genau die Turbinen  $t_u$  für  $u \in U'$  mit  $s_W$  verbunden werden, ist auch die Kapazitätsbedingung von  $s_W$  erfüllt. Sei  $q = |U'|$ . Dann sind die Kosten dieser Zuteilung:

$$(n - q) \cdot M + \sum_{u \in U'} (M - u) = (n - q) \cdot M + q \cdot M - \sum_{u \in U'} u = n \cdot M - \underbrace{\sum_{u \in U'} u}_{=W} = n \cdot M - W$$

Jetzt ist noch zu zeigen, dass aus einer Lösung des Verkabelungsproblems eine Lösung des Teilsommenproblems konstruiert werden kann. Ist eine Lösung des Verkabelungsproblems gegeben, werden genau die Elemente für  $U'$  gewählt, die den Turbinen entsprechen, welche an die Substation  $s_W$  angeschlossen sind. Also  $U' = \{u \mid t_u \text{ ist mit } s_W \text{ verbunden}\}$ . Damit gilt:  $\sum_{u \in U'} u \leq W$ . Sei wieder  $q = |U'|$ , dann gilt für die Kosten:

$$\begin{aligned} (n - q) \cdot M + \sum_{u \in U'} (M - u) &\leq n \cdot M - W \\ \Leftrightarrow n \cdot M - \sum_{u \in U'} u &\leq n \cdot M - W \\ \Leftrightarrow \sum_{u \in U'} u &\geq W \end{aligned}$$

Da aber auch  $\sum_{u \in U'} u \leq W$  gilt, folgt  $\sum_{u \in U'} u = W$ .



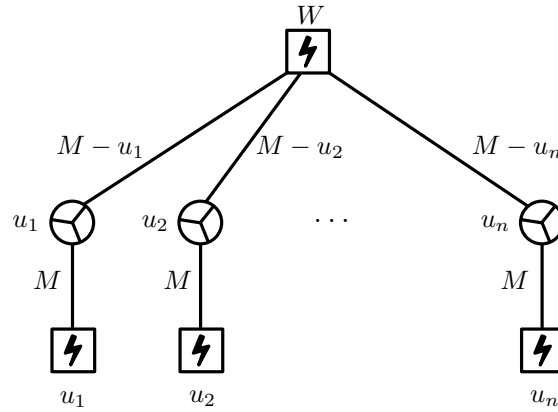


Abbildung 5.6: Konstruktion des Windfarm-Verkabelungsproblems ausgehend vom Teilsommenproblem gegeben durch die Menge von natürlichen Zahlen  $U$  und die Zahl  $W$ . Dabei ist  $M = \max U + 1$ . Die Beschriftungen an den Kanten beschreiben die Kantenlänge und die Beschriftungen der Turbinen und Substationen deren Produktion bzw. Kapazität.

Das heißt, dass genau dann eine Lösung des Teilsommenproblems existiert, wenn auch eine Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$  existiert. Somit ist das betrachtete Verkabelungsproblem NP-schwer.  $\square$

Mit einem ähnlichen Beweis kann man zeigen, dass das Problem schon auf einem Baum mit einer beliebigen Anzahl an Kabeltypen, aber einheitlichen Kantenlängen und unbeschränkten Substation-Kapazitäten NP-schwer ist.

**Theorem 5.14.** *Das Verkabelungsproblem auf einem Baum mit einheitlichen Kantenlängen, unbeschränkten Substation-Kapazitäten und beliebig vielen Kabeltypen mit beschränkter Kapazität ist NP-schwer.*

*Beweis.* Wie im Beweis zu Theorem 5.13 wird eine Instanz des Teilsommenproblems in eine Instanz des Windfarm-Verkabelungsproblems transformiert. Eine Instanz des Teilsommenproblems sei, wie oben definiert, gegeben durch eine Menge von natürlichen Zahlen  $U$  mit  $|U| = n$  und eine Zahl  $W \in \mathbb{N}$ . Gesucht ist  $U' \subseteq U$  mit  $\sum_{u \in U'} u = W$ .

Aus dem Teilsommenproblem wird ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = V_S \cup V_T$  konstruiert, wie in Abbildung 5.7 gezeigt. Dabei sei

$$\begin{aligned} V_S &= \{s_u \mid u \in U\}, \\ V_T &= \{t\} \cup \{t_u \mid u \in U\} \cup \{w_u \mid u \in U\}, \\ E &= \{\{s_u, w_u\}, \{w_u, t_u\}, \{t_u, t\} \mid u \in U\}. \end{aligned}$$

Alle Substationen haben unendliche Kapazität und für die Produktionen der Turbinen gelte  $p(t) = 2(W + 1)$  und  $p(t_u) = u$  und  $p(w_u) = W + 1$ . Die Längen der Kanten seien alle 1. Sei  $M = 2W$  und  $S = \sum_{u \in U} u$ . Zusätzlich gebe es eine Menge von Kabeltypen  $K$ . Der erste Kabeltyp  $k_0$  habe Kapazität  $W + 1$  und Kosten 1. Weiterhin gebe es für jedes  $u \in U$  den Kabeltyp  $k_u$  mit Kapazität  $W + 1 + u$  und Kosten  $1 + u$ . Außerdem gebe es den Kabeltyp  $k_W$  mit Kapazität  $4W + 3$  und Kosten  $M$ . Tabelle 5.1 listet die Kabeltypen nochmals übersichtlich auf. Gibt es eine Lösung für das Verkabelungsproblem auf  $G$  mit Kosten von höchstens  $2n - 2 + 3M + S - W$ ?

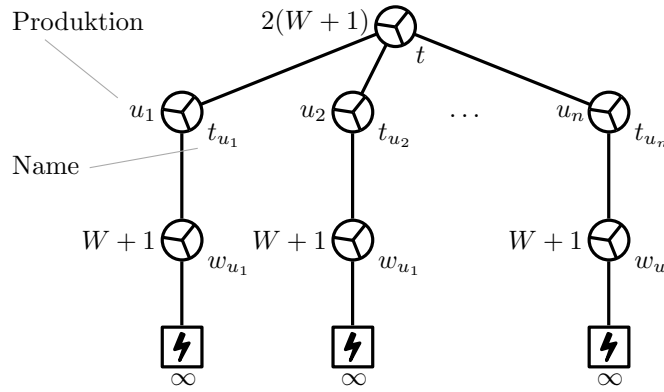


Abbildung 5.7: Der abgebildete Graph wird aus einer Instanz des Teilsommenproblems mit der Menge  $U$  und der Zahl  $W$  konstruiert.

Kabel	Kapazität	Kosten
$k_0$	$W + 1$	1
$\forall u \in U : k_u$	$W + 1 + u$	$1 + u$
$k_W$	$4W + 3$	$M (= 2W)$

Tabelle 5.1: Kabelkosten und -kapazitäten des Reduktionsbeweises für Theorem 5.14

Wir zeigen, dass eine Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$  mit Kosten von höchstens  $2n - 2 + 3M + S - W$  genau dann existiert, wenn eine Lösung des Teilsommenproblems existiert.

Für eine Lösung  $U' \subseteq U$  des Teilsommenproblems werden die Turbinen  $t_u$  für  $u \in U'$  mit  $t$  verbunden. Diese Menge an Turbinen wird dann an genau eine beliebige Substation  $s_{\hat{u}}$  für  $\hat{u} \in U'$  über  $w_{\hat{u}}$  angeschlossen. Die anderen Turbinen  $t_u$  für  $u \in U \setminus U'$  werden über die entsprechende Turbine  $w_u$  mit  $s_u$  verbunden. Alle  $w_u$  werden mit ihrer zugehörigen Substation  $s_u$  verbunden. Dabei ist die Kapazität des Kabels  $k_W$  ausreichend, denn  $\sum_{u \in U'} p(t_u) = W$  und diese Turbinen werden nur mit  $t$  und  $w_{\hat{u}}$  verbunden. Somit ist die maximale Strommenge, die über ein Kabel fließt, höchstens  $4W + 3$  und damit ist die Verkabelung eine gültige Lösung. Die Kosten der Lösung setzen sich aus mehreren Teilkosten zusammen. In Abbildung 5.8 wird dies beispielhaft gezeigt. Die Kosten für die Verkabelung von  $t$  und aller mit  $t$  verbundenen Turbinen zur Substation sind  $C_t = 3M + |U'| - 1$ . In Abbildung 5.8 ist das der blaue Bereich. Die Turbinen  $w_u$ , für die  $t_u$  mit  $t$  verbunden ist, werden bis auf diejenige, über die  $t$  mit einer Substation verbunden ist, mit dem Kabel  $k_0$  an die jeweilige Substation  $s_u$  angeschlossen. Das ist durch den orangefarbenen Bereich in Abbildung 5.8 dargestellt. Dies sind dann Kosten von  $|U'| - 1$ . Die restlichen Turbinen  $t_u$  die nicht mit  $t$  verbunden sind, werden mit der entsprechenden Turbine  $w_u$  an die jeweilige Substation  $s_u$  angeschlossen, was in Abbildung 5.8 grün markiert ist. Dabei entstehen die Kosten  $C_r = n - |U'| + \sum_{u \in U \setminus U'} (1 + u)$ . Für die Gesamtkosten  $C$  der Lösung ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 C &= C_t + C_r + |U'| - 1 \\
 &= 3M + |U'| - 1 + n - |U'| + \sum_{u \in U \setminus U'} (1 + u) + |U'| - 1 \\
 &= 3M - 1 + n + \sum_{u \in U \setminus U'} (u) + |U \setminus U'| + |U'| - 1 \\
 &= 3M - 1 + n + \underbrace{\sum_{u \in U \setminus U'} (u)}_{=S-W} + n - 1 \\
 &= 3M + 2n - 2 + S - W
 \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass aus einer Lösung des Verkabelungsproblems eine Lösung für das Teilsommenproblem berechnet werden kann. Sei also eine Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$  gegeben. Für eine gültige Verkabelung auf  $G$  muss für jedes  $u \in U$  die Turbine  $w_u$  mit der zugehörigen Substation  $s_u$  verbunden werden. Andernfalls wären mindestens zwei der Turbinen  $w_u$  und die Turbine  $t$  über ein Kabel an eine Substation angeschlossen. Die Summe der Produktionen dieser Turbinen ist aber  $4W + 4$  und somit zu groß für die Kapazität des Kabeltyps  $k_W$ , welcher die größte Kapazität aller Kabeltypen hat. Aus der Lösung des Verkabelungsproblems wird eine Lösung des Teilsommenproblems konstruiert, indem genau die Elemente  $u \in U$  für  $U'$  gewählt werden, für die  $t_u$  mit  $t$  verbunden ist. Diese Turbinen sind zusammen mit der Turbine  $t$  und einer Turbine  $w_{\hat{u}}$  über ein Kabel an dieselbe Substation  $s_{\hat{u}}$  angeschlossen. Die Summe der Produktionen all dieser Turbinen ist also maximal  $4W + 3$ . Da aber  $p(t) + p(w_{\hat{u}}) = 3W + 3$  ist, ist die Summe der Turbinen  $t_u$ , die direkt mit  $t$  verbunden sind, maximal  $W$ . Damit ist auch die Summe der Elemente aus  $U'$  maximal  $W$ . Die Kosten  $C$  setzen sich genauso wie oben zusammen  $C = 3M - 1 + n + \sum_{u \in U \setminus U'} (u) + n - 1$  und es gilt  $C \leq 2n - 2 + 3M + S - W$ . Also gilt

$$\begin{aligned}
 &3M - 1 + n + \sum_{u \in U \setminus U'} (u) + n - 1 \leq 2n - 2 + 3M + S - W \\
 \Leftrightarrow &\sum_{u \in U \setminus U'} u \leq S - W \\
 \Leftrightarrow &\sum_{u \in U} u - \sum_{u \in U'} u \leq S - W \\
 \Leftrightarrow &W \leq \sum_{u \in U'} u.
 \end{aligned}$$

Da aber  $\sum_{u \in U'} u \leq W$  ebenso gilt, ist  $\sum_{u \in U'} u = W$ . Also kann genau dann eine Lösung des Verkabelungsproblems gefunden werden, wenn eine Lösung für das Teilsommenproblem existiert. Damit ist das Windfarm-Verkabelungsproblem auf einem Baum mit einer beliebigen Anzahl an Kabeltypen, aber einheitlichen Kantenlängen und unbeschränkten Substation-Kapazitäten NP-schwer.  $\square$

Mit diesem Beweis haben wir jede Parameterkombination bei unteilbarem Stromfluss betrachtet und entweder einen polynomiellen Algorithmus oder einen Beweis für NP-schwere angegeben. Im Folgenden werden wir das Verkabelungsproblem bei teilbarem Stromfluss untersuchen.

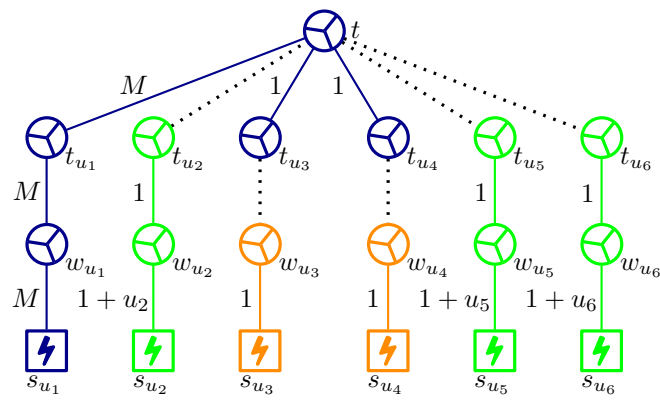


Abbildung 5.8: Die abgebildete Verkabelung wurde wie im Beweis zu Theorem 5.14 aus einer Lösung des Teilsommenproblems konstruiert. Die Beschriftungen an den Kanten sind die Kosten des Kabeltyps, der an der jeweiligen Kante verlegt wird.

## 6. Windfarm-Verkabelung bei teilbarem Stromfluss

Nun betrachten wir das Windfarm-Verkabelungsproblem, wenn der Stromfluss teilbar ist. Im Gegensatz zu unteilbarem Stromfluss, wie in Kapitel 5, kann einmal zusammengeführter Strom wieder aufgeteilt werden und auf mehrere Substationen verteilt werden. Das heißt, dass auch die Produktion einer Turbine auf mehrere Substationen verteilt werden kann. Allerdings kann Strom weiterhin nicht wieder aus Substationen herausfließen. Ist der Stromfluss teilbar, gibt es weniger Einschränkungen und somit mehr Möglichkeiten für eine gültige Verkabelung. Es müssen also nicht immer  $|V_S| - 1$  Kanten für eine optimale Lösung des Windfarm-Verkabelungsproblems entfernt werden. Teilbarer Stromfluss ermöglicht eventuell Instanzen zu lösen, die bei unteilbarem Stromfluss nicht lösbar sind, wie in Abbildung 6.1 gezeigt. Hier sind die Kapazitäten der einzelnen Substationen nicht ausreichend, um die gesamte Produktion der Turbine aufzunehmen. Wird die Produktion der Turbine aber aufgeteilt, ist das Problem lösbar. Es kann auch Instanzen geben, die im Gegensatz zum unteilbaren Stromfluss günstiger gelöst werden. Dadurch, dass der Strom aufgeteilt wird, kann für die, in Abbildung 6.2 gezeigte, Instanz ein günstigerer Kabeltyp verwendet werden.

Wir betrachten für teilbaren Stromfluss dieselben Parameter, wie im vorhergehenden Kapitel 5. Den Stromfluss überhaupt aufzuteilen ergibt erst bei bestimmter Parameterwahl Sinn. Sind die Produktionen alle einheitlich, kann der Stromfluss auf einem Pfadgraphen nicht aufgeteilt werden. Bei Bäumen betrachten wir den Fall der einheitlichen Produktionen nicht. Wenn keine Kapazitätseinschränkungen durch Substation-Kapazitäten oder beschränkte Kabeltypen vorhanden sind, gibt es keinen Grund den Stromfluss aufzuteilen. Denn durch Aufteilen des Stromflusses werden für eine Lösung mehr Kanten verwendet als bei unteilbarem Stromfluss. Dadurch wird die Verkabelung nicht günstiger, da auf

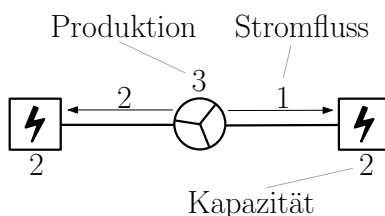


Abbildung 6.1: Das gezeigte Problem ist für unteilbaren Stromfluss nicht lösbar. Bei teilbarem Stromfluss kann das Problem wie gezeigt gelöst werden.

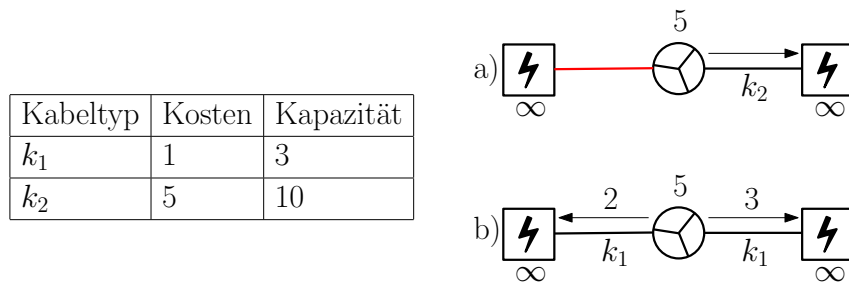


Abbildung 6.2: Bei unteilbarem Stromfluss, wie in a) sind die minimalen Kosten 5. Bei teilbarem Stromfluss in b) dagegen nur 2.

jeder Kante das gleiche Kabel verlegt werden würde. Außerdem gibt es keine fehlenden Kapazitäten, die ein Aufteilen des Stromflusses nötig machen würden, wie es zum Beispiel in Abbildung 6.1 der Fall ist. Das heißt, erst wenn verschiedene Produktionen zusammen mit Substation-Kapazitäten oder mindestens einem kapazitätsbeschränkten Kabeltyp betrachtet werden, kann der Stromfluss sinnvoll aufgeteilt werden. Alle anderen Fälle, die auch für unteilbaren Fluss gelöst wurden, können mit den dort benutzten Algorithmen auch für teilbaren Fluss gelöst werden.

## 6.1 Pseudopolynomieller Ansatz für die Pfad-Verkabelung

Für einen Algorithmus, welcher das Verkabelungsproblem bei teilbarem Stromfluss auf einem Pfadgraphen löst, muss folgendes beachtet werden. Eine Lösung, bei welcher die Produktion von mindestens einer Turbine aufgeteilt wird, enthält mehr Kanten als eine Lösung für unteilbaren Fluss. Hierfür ist nämlich jede Turbine mit genau einer Substation verbunden. Die Turbine, an welcher der Stromfluss aufgeteilt wurde, ist aber mit mindestens zwei Substationen verbunden. Also wurden aus dem gegebenen Graphen weniger als  $|V_S| - 1$  Kanten entfernt. Wenn nur ein Kabeltyp zur Verfügung steht, haben alle Kanten feste Kosten. Das heißt aber, wenn für einen Pfadgraphen nur ein Kabeltyp zur Verfügung steht, ist eine für unteilbaren Fluss gültige Lösung günstiger als eine, bei welcher der Fluss aufgeteilt wurde. Damit ergibt sich folgende Beobachtung.

**Beobachtung 6.1.** *Ein Algorithmus für teilbaren Stromfluss muss auf einem Pfadgraphen, wenn nur ein Kabeltyp zur Verfügung steht, für jede bei unteilbarem Stromfluss lösbare Instanz ebenso eine optimale Lösung finden.*

Die Algorithmen für das Verkabelungsproblem auf einem Pfad mit unteilbarem Stromfluss können genutzt werden, um Pseudopolynomialzeit-Algorithmen für das analoge Verkabelungsproblem mit teilbarem Stromfluss zu konstruieren. Dafür wird aus dem gegebenen Pfadgraphen  $G$  der Graph  $\tilde{G}$  konstruiert, indem jede Turbine  $t$  mit  $p(t) > 1$  in  $p(t)$  Turbinen aufgeteilt wird. Dabei hat jede der neuen Turbinen  $t'$  die Produktion  $p(t') = 1$ . Die neuen Turbinen werden anstelle von  $t$  in den Graphen  $G$  eingefügt, wobei die Kanten zwischen den neuen Turbinen die Länge 0 haben. Diese Konstruktion ist in Abbildung 6.3 beispielhaft veranschaulicht. Auf den so konstruierten Graphen  $\tilde{G}$  kann dann der entsprechende Algorithmus für unteilbaren Stromfluss angewendet werden. Für den Fall des vollständigen Verkabelungsproblem auf einem Pfadgraphen wäre das Algorithmus 5.1. Wird durch den Algorithmus eine der neu eingefügten Kanten mit Länge 0 aus  $\tilde{G}$  entfernt, wird an der entsprechenden Turbine in  $G$  die Produktion der Turbine aufgeteilt. Da durch die neu hinzugefügten Kanten keine Kosten entstehen, sind in  $\tilde{G}$  nur die Kanten für Kostenberechnung relevant, die schon in  $G$  existieren.

Die Laufzeit des Algorithmus' hängt dann von der Summe der Produktionen der Turbinen ab. Die Anzahl der Knoten in  $\tilde{G}$  ist dann  $n' = |V_S| + \sum_{v \in V_T} p(v)$ . Die Laufzeit des

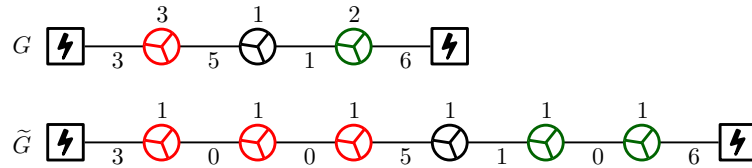


Abbildung 6.3: Die rote und die grüne Turbine aus  $G$  werden jeweils in mehrere Turbinen aufgeteilt, abhängig von ihrer Produktion. Die neu entstandenen Turbinen werden durch Kanten der Länge 0 verbunden.

vollständigen Verkabelungsproblem auf einem Pfadgraphen bei teilbarem Fluss ist dann in  $O((n')^2)$ , wobei  $n' \leq n \cdot \max_{v \in V_T} p(v)$ .

## 6.2 Verkabelung auf Bäumen

Der gleiche pseudopolynomielle Ansatz wie bei Pfadgraphen in Abschnitt 6.1 kann für Bäume nicht angewendet werden. Beim Pfadgraphen kann eine Turbine entlang des Pfades in mehrere Turbinen aufgeteilt werden. Betrachten wir aber bei Bäumen eine Turbine mit einem Grad von mindestens drei, kann diese Turbine nicht eindeutig in mehrere Turbinen aufgeteilt werden, da es mehrere Möglichkeiten gibt, die Turbine auf die ausgehenden Kanten aufzuteilen.

Für das Verkabelungsproblem auf allgemeinen Bäumen bei teilbarem Stromfluss konnten wir keine polynomiellen Algorithmen finden. Allerdings kann man für einige Fälle beweisen, dass sie NP-schwer sind, indem ähnliche Reduktionen wie bei unteilbarem Fluss durchgeführt werden.

### 6.2.1 NP-schwere Verkabelung

Das Theorem 5.13 für unteilbaren Stromfluss lässt sich auch auf den Fall des teilbaren Stromflusses übertragen.

**Theorem 6.2.** *Das Verkabelungsproblem auf einem Baum mit beschränkten Substation-Kapazitäten, beliebigen nicht negativen Kantenlängen, einem Kabeltyp und teilbarem Stromfluss ist NP-schwer.*

*Beweis.* Für den Beweis kann dieselbe Konstruktion verwendet werden, wie im Beweis für das analoge Problem bei unteilbarem Fluss. Diese ist in Abbildung 5.6 gezeigt. Im Beweis für Theorem 5.13 wurde gezeigt, dass eine Lösung für das Verkabelungsproblem bei unteilbarem Stromfluss auf dem konstruierten Graphen  $G$  genau dann gefunden werden kann, wenn eine Lösung des Teilsommenproblems existiert. Das Teilsommenproblem ist durch eine Menge  $U$  und eine Zahl  $W$  gegeben.

Nun wird gezeigt, dass eine Lösung des Verkabelungsproblems bei teilbarem Stromfluss auf  $G$  mit maximalen Kosten  $n \cdot M - W$  genau dann existiert, wenn das Teilsommenproblem lösbar ist. Dabei ist  $M = \max(U) + 1$ .

Gibt es also eine Lösung für das Teilsommenproblem, kann für unteilbaren Stromfluss eine Verkabelung gefunden werden, deren Kosten maximal  $n \cdot M - W$  sind (Theorem 5.13). So eine Verkabelung ist aber offensichtlich auch eine gültige Verkabelung bei teilbarem Stromfluss.

Damit muss nur noch gezeigt werden, dass es auch eine Lösung für das Teilsommenproblem gibt, wenn eine Lösung für das Verkabelungsproblem existiert. Wir zeigen dafür,

dass keine Lösung des Verkabelungsproblems existiert, wenn es keine Lösung für das Teilsommenproblem gibt.

Ist das Teilsommenproblem nicht lösbar, kann für unteilbaren Stromfluss keine gültige Verkabelung in  $G$  gefunden werden, deren Kosten höchstens  $n \cdot M - W$  sind (Theorem 5.13). Betrachte nun eine Lösung, welche die Kapazitätsbedingung der Substationen nicht verletzt und bei der mindestens eine Turbine  $t_u$  sowohl mit der Substation  $s_W$  als auch mit der zugehörigen Substation  $s_u$  verkabelt ist. Verbindet man nun alle Turbinen  $t_u$ , bei denen das der Fall ist, nur mit  $s_u$ , ergibt sich pro Turbine eine Kosteneinsparung von  $M - u$ . Die Lösung, die sich so ergibt, ist also günstiger und überschreitet die Kapazitäten der Substationen nicht. Da diese Lösung aber eine Lösung für unteilbaren Stromfluss ist, sind die Kosten der Lösung trotzdem noch größer als  $n \cdot M - W$ . Also lässt sich auch für teilbaren Stromfluss keine Lösung mit Kosten von höchstens  $n \cdot M - W$  finden, wenn das Teilsommenproblem nicht lösbar ist.

Damit ist das Verkabelungsproblem auf einem Baum mit beschränkten Substationen, beliebigen nicht negativen Kantenlängen, einem Kabeltyp und teilbarem Stromfluss NP-schwer.  $\square$

Genauso kann man zeigen, dass das Verkabelungsproblem auf einem Baum mit beliebigen nicht negativen Kantenlängen und einem beschränkten Kabeltyp NP-schwer ist.

**Theorem 6.3.** *Das Verkabelungsproblem auf einem Baum mit beliebigen nicht negativen Kantenlängen, einem beschränkten Kabeltyp, aber unbeschränkten Substationen und teilbarem Stromfluss ist NP-schwer.*

*Beweis.* Erneut wird das Teilsommenproblem auf das entsprechende Windfarm-Verkabelungsproblem reduziert.

Für eine Instanz des Teilsommenproblems, gegeben durch die Menge  $U$  und die Zahl  $W$ , wird das folgende Verkabelungsproblem konstruiert. Erzeuge den Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = V_S \cup V_T$ , wie in Abbildung 6.4 gezeigt. Dabei sei

$$\begin{aligned} V_T &= \{t_u \mid u \in U\} \cup \{t\} \\ V_S &= \{s_u \mid u \in U\} \\ E &= \{\{t_u, t\} \mid u \in U\} \cup \{\{t_u, s_u\} \mid u \in U\} \end{aligned}$$

Für die Produktionen der Turbinen gelte  $p(t_u) = u$  und  $p(t) = 1$ . Alle Substationen haben unendliche Kapazität. Sei  $M = \max(U) + 1$ . Für jede Turbine  $t_u$  habe die Kante  $\{t_u, t\}$  die Länge  $M - u$  und die Kante  $\{t_u, s_u\}$  die Länge  $M$ . Zusätzlich gebe es einen Kabeltypen mit Kosten 1 und Kapazität  $W + 1$ . Gibt es eine Lösung für das Verkabelungsproblem auf  $G$  mit Kosten von höchstens  $(n + 1) \cdot M - W$ ?

Es wird gezeigt, dass es eine Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$  genau dann gibt, wenn das zugehörige Teilsommenproblem lösbar ist.

Ist eine Lösung  $U' \subseteq U$  des Teilsommenproblems gegeben, wird daraus eine Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$  konstruiert. Dafür wird jede Turbine  $t_u$  für  $u \in U'$  mit der Turbine  $t$  verbunden und eine beliebige dieser  $t_u$  mit ihrer adjazenten Substation. Alle anderen Turbinen werden direkt mit ihrer adjazenten Substation verbunden. Bei dieser Verkabelung wird die Kapazität des einzigen Kabeltyps nicht überschritten, denn für die Summe der Elemente aus  $U'$  gilt  $\sum_{u \in U'} u = W$ . Dies gilt dann auch für die Summe der Produktionen der Turbinen, die mit  $t$  verbunden sind. Mit  $p(t)$  zusammen ist diese aber höchstens  $W + 1$ . Für die Kosten  $C$  der Verkabelung gilt:

$$C = (n - |U'|) \cdot M + M + \sum_{u \in U'} (M - u) = (n + 1) \cdot M - \sum_{u \in U'} (u) = (n + 1) \cdot M - W$$



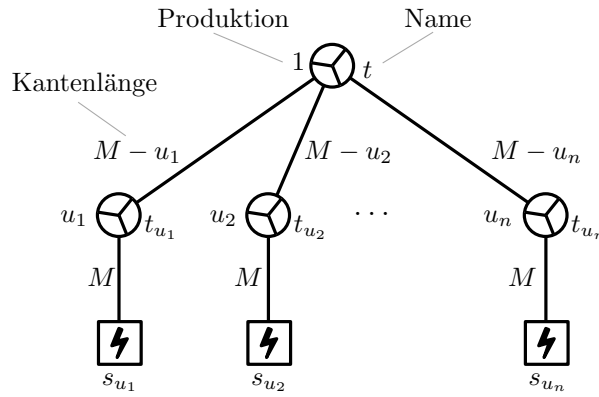


Abbildung 6.4: Der abgebildete Graph wird aus einer Instanz des Teilsommenproblems, gegeben durch die Menge von natürlichen Zahlen  $U$  und die Zahl  $W$ , konstruiert.

Nun sei das Teilsommenproblem nicht lösbar. Betrachte eine beliebige gültige Lösung des Verkabelungsproblems. Falls es Turbinen  $t_u$  gibt, bei welchen ein Teil der Produktion Richtung  $t$  fließt und der andere Teil in Richtung der adjazenten Substation  $s_u$ , dann verkabele diese Turbinen stattdessen nur mit der adjazenten Substation  $s_u$ . Diese Verkabelung überschreitet die Kapazität des einzigen Kabeltyps nicht und ist günstiger, denn es wird mindestens eine Kante weniger verwendet. Jetzt ist die Verkabelung ebenso für unteilbaren Stromfluss eine gültige Verkabelung. Sei  $T = \{t_u \mid t_u \text{ ist mit } t \text{ verbunden}\}$ . Für die Kosten der Verkabelung gilt:

$$C = (n + 1) \cdot M - \sum_{t_u \in T} u$$

Es muss aber  $\sum_{t_u \in T} u \leq W$  gelten, da sonst die Kapazität des Kabels nicht ausreichen würde. Da es aber keine Lösung für das Teilsommenproblem gibt, gilt sogar  $\sum_{t_u \in T} u < W$ . Andernfalls wäre  $U' = \{u \mid t_u \in T\}$  eine gültige Lösung des Teilsommenproblems. Damit gilt für die Kosten:

$$C = (n + 1) \cdot M - \underbrace{\sum_{t_u \in T} u}_{< W} > (n + 1) \cdot M - W$$

Daraus folgt, dass jede beliebige Verkabelung auf  $G$ , welche die Kapazität des einzigen Kabels nicht überschreitet, Kosten von mehr als  $(n + 1) \cdot M - W$  hat.

Das Verkabelungsproblem auf  $G$  ist also genau dann lösbar, wenn die dazugehörige Instanz des Teilsommenproblems lösbar ist.  $\square$

Aus diesem Beweis folgt auch, dass der analoge Fall des Problems für unteilbaren Fluss ebenso NP-schwer ist.

Durch eine Reduktion des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems kann gezeigt werden, dass das Windfarm-Verkabelungsproblem bereits auf einem Baum mit einheitlichen Kantenlängen, unbeschränkten Substation-Kapazitäten und einer beliebigen Anzahl an Kabeltypen NP-schwer ist. Das max-n-unbeschränkte Teilsommenproblems ist wie folgt definiert.

**max-n-unbeschränktes Teilsommenproblem :** Gegeben sei eine Menge von natürlichen Zahlen  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  und eine Zahl  $W \in \mathbb{N}$ . Gibt es Zahlen  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$ , mit  $\sum_{i=1}^n a_i \leq n$  und  $\sum_{i=1}^n a_i u_i = W$ ?

**Theorem 6.4.** *Das max-n-unbeschränkte Teilsommenproblem ist NP-schwer.*

*Beweis.* Für den Beweis wird der Reduktionsbeweis für das unbeschränkte Teilsommenproblem aus [Het14] auf das max-n-unbeschränkte Teilsommenproblem angepasst.

Sei also eine Instanz des Teilsommenproblems mit einer Menge  $U$  und  $W \in \mathbb{N}$  gegeben. Sei  $n = |U|$ . Daraus wird nun eine Instanz des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems konstruiert.

Sei  $M = \max U$ , dann kann für jede Instanz des Teilsommenproblems angenommen werden  $W \leq nM$ . Eine Instanz des Teilsommenproblems, bei der  $W$  größer als  $nM$  und somit größer als die Summe aller Elemente wäre, ist trivialerweise nicht lösbar.

Für jedes Element  $u_i \in U$  mit  $i = 1, \dots, n$  werden zwei neue Elemente erzeugt:  $u_i^0 = (2^{n+1} + 2^i) \cdot nM$  und  $u_i^1 = (2^{n+1} + 2^i) \cdot nM + u_i$ . Diese Elemente bilden zusammen die Menge  $\hat{U}$ . Sei  $\hat{W} = (n2^{n+1} + \sum_{i=1}^n 2^i) \cdot nM + W$ . Gesucht seien nun die Faktoren  $a_1^0, \dots, a_n^0, a_1^1, \dots, a_n^1$  mit  $\sum_{i=1}^n (a_i^0 + a_i^1) \leq |\hat{U}| = 2n$ , für die gilt  $\sum_{i=1}^n (a_i^0 u_i^0 + a_i^1 u_i^1) = \hat{W}$ .

Sei nun eine Lösung  $U'$  des Teilsommenproblems gegeben und sei  $a_i^1 = 1$  und  $a_i^0 = 0$  falls  $u_i \in U'$  und sonst  $a_i^1 = 0$  und  $a_i^0 = 1$ . Dann sind diese Faktoren eine Lösung des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems, denn die Summe der  $a_i$  ist genau  $n$ . Für die Summe  $\sum_{i=1}^n (a_i^0 u_i^0 + a_i^1 u_i^1)$  gilt  $\sum_{i=1}^n (a_i^0 u_i^0 + a_i^1 u_i^1) \geq (n2^{n+1} + \sum_{i=1}^n 2^i) \cdot nM$ , denn für jedes Element aus  $U$  ist entweder  $a_i^0 = 1$  oder  $a_i^1 = 1$ . Da für jedes Element  $u_i$  aus  $U'$  aber noch der Summand  $u_i$  hinzukommt, ergibt sich für die Summe  $\sum_{i=1}^n (a_i^0 u_i^0 + a_i^1 u_i^1) = \hat{W}$ . Damit kann also aus einer Lösung des Teilsommenproblems eine Lösung des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems in Polynomialzeit konstruiert werden.

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass aus einer Lösung des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems eine Lösung des Teilsommenproblems in Polynomialzeit berechnet werden kann.

Seien die Faktoren  $a_1^0, \dots, a_n^0, a_1^1, \dots, a_n^1$  eine Lösung des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems. Die Summe der Faktoren kann höchstens  $n$  sein, weil für jedes Element  $u$  aus  $\hat{U}$  gilt  $u > 2^{n+1} \cdot nM$ . Für  $\hat{W}$  gilt aber

$$\begin{aligned} \hat{W} &= (n2^{n+1} + \sum_{i=1}^n 2^i) \cdot nM + W \\ &= ((n+1)2^{n+1} - 2) \cdot nM + W \\ &= (n+1) \cdot nM \cdot 2^{n+1} - 2nM + \underbrace{W}_{\leq nM} \\ &< (n+1) \cdot nM \cdot 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Summe von  $n+1$  Elementen aus  $\hat{U}$  ist also immer größer als  $\hat{W}$  und somit ist die Summe der  $a_i$  höchstens  $n$ . Der Teil  $\sum_{i=1}^n 2^i$  in  $\hat{W}$  erzwingt aber, dass genau eine Version jedes Elements, also entweder  $u_i^1$  oder  $u_i^0$ , den zugehörigen Faktor 1 hat. Für jedes  $i$  gibt es eine Stelle  $2^i$  in  $\hat{W}$ , die durch  $u_i^1$  oder  $u_i^0$  belegt werden muss. Würde man stattdessen zweimal  $2^{i-1}$  wählen oder eine beliebige andere Kombination von mehreren Elementen, könnten nicht alle Stellen belegt werden, ohne dass die Summe der  $a_i$  größer als  $n$  werden würde. Daraus folgt aber auch, dass für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  entweder  $a_i^1 = 1$  oder  $a_i^0 = 1$  sein muss. Dann ist  $U' = \{u_i \in U \mid a_i^1 = 1\}$  eine Lösung für das Teilsommenproblem, denn für die  $u_i^0$  gilt

$$\sum_{i=1}^n u_i^0 = (n2^{n+1} + \sum_{i=1}^n 2^i) \cdot nM = \hat{W} - W.$$

Das heißt, dass die  $u_i^1$  mit  $a_i^1 = 1$  dafür sorgen, dass die Summe  $\sum_{i=1}^n (a_i^0 u_i^0 + a_i^1 u_i^1)$  genau  $\hat{W}$  ergibt und somit muss gelten

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\} | a_i^1 = 1} (u_i^1 - u_i^0) = W.$$

Aber  $(u_i^1 - u_i^0) = u_i$  und somit ist die Summe der Elemente aus  $U'$  genau  $W$ .

Eine Instanz des Teilsommenproblems lässt sich also genau dann lösen, wenn sich die zugehörige Instanz des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems lösen lässt. Damit ist das max-n-unbeschränkte Teilsommenproblem NP-schwer.  $\square$

Mit Hilfe des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems beweisen wir nun Theorem 6.5.

**Theorem 6.5.** *Das Windfarm-Verkabelungsproblem auf einem Baum mit einheitlichen Kantenlängen, unbeschränkten Substation-Kapazitäten und einer beliebigen Menge an Kabeltypen ist bei teilbarem Stromfluss NP-schwer.*

*Beweis.* Um die Behauptung zu beweisen, wird eine Instanz des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems, gegeben durch eine Menge  $U$  und  $W \in \mathbb{N}$ , in eine Instanz des Windfarm-Verkabelungsproblems transformiert.

Dazu wird der folgende Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = V_S \cup V_T$  wie in Abbildung 6.5 konstruiert.

$$\begin{aligned} V_T &= \{t\} \\ V_S &= \{s_j \mid j = 1, \dots, |U| = n\} \\ E &= \{\{s_j, t\} \mid s_j \in V_S\} \end{aligned}$$

Die Turbine  $t$  hat dabei die Produktion  $p(t) = W$  und alle Substationen haben unendliche Kapazität. Die Längen der Kanten aus  $E$  sind alle 1. Für jedes Objekt  $u \in U$  gibt es einen Kabeltyp  $k_u$  mit Kosten  $u$  und Kapazität  $u$ , wie ebenfalls in Abbildung 6.5 zu sehen ist. Gibt es eine Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$  mit Kosten von höchstens  $W$ ?

Es ist zu zeigen, dass das Verkabelungsproblem auf  $G$  genau dann gelöst werden kann, wenn das zugehörige max-n-unbeschränkte Teilsommenproblem lösbar ist.

Sei eine Lösung  $a_1, \dots, a_n$  des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems gegeben. Daraus wird eine Lösung des Verkabelungsproblems, indem für jeden Faktor  $a_i$  der Kabeltyp  $k_{u_i}$  auf  $a_i$  bisher unbenutzten Kante  $e \in E$  verlegt wird. Da die Anzahl der Kanten  $n$  ist und  $\sum_{i=1}^n a_i$  maximal  $n$  ist, kann für jeden Faktor eine ausreichende Menge an Kanten gefunden werden. Außerdem ist die Kapazität der Kabel ausreichend, da für die  $a_i$  gilt:  $\sum_{i=1}^n a_i u_i = W$ . Die Kosten der Verkabelung sind dann ebenso  $W$ .

Nun sei eine Lösung des Verkabelungsproblems auf  $G$  gegeben mit Kosten von höchstens  $W$ . Sei  $a_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Anzahl der verwendeten Kabel vom Typ  $k_{u_i}$ . Dann ist  $a_1, \dots, a_n$  eine Lösung für das max-n-unbeschränkte Teilsommenproblem, denn die Kosten der Kabel sind maximal  $W$  und somit gilt  $\sum_{i=1}^n a_i u_i \leq W$ . Außerdem haben die verwendeten Kabel zusammengenommen mindestens die Kapazität  $W$ , um die gesamte Produktion der Turbine  $t$  zu den Substationen leiten zu können. Damit ist  $\sum_{i=1}^n a_i u_i \geq W$ . Also muss gelten  $\sum_{i=1}^n a_i u_i = W$ . Da es nicht mehr als  $n$  Kanten gibt, können auch höchstens  $n$  Kabel verwendet werden und somit ist  $\sum_{i=1}^n a_i \leq n$ .

Das Verkabelungsproblem auf  $G$  kann also genau dann mit Kosten von höchstens  $W$  gelöst werden, wenn eine Lösung für das max-n-unbeschränkte Teilsommenproblem existiert. Somit ist das Verkabelungsproblem auf Bäumen mit einer beliebigen Anzahl an Kabeltypen, aber einheitlichen Kantenlängen und unbeschränkten Substation-Kapazitäten NP-schwer.  $\square$

Kabeltyp	Kosten	Kapazität
$\forall u \in U : k_u$	$u$	$u$

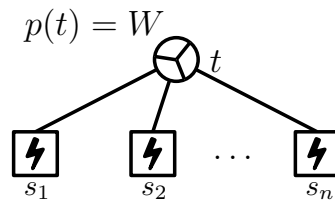


Abbildung 6.5: Der abgebildete Graph wird aus einer Instanz des max-n-unbeschränkten Teilsommenproblems mit der Menge  $U$  und der Zahl  $W$  konstruiert.

Ein Fall des Verkabelungsproblems bei teilbarem Fluss auf Bäumen wurde noch nicht betrachtet. Der Fall, bei dem die Substation-Kapazitäten beschränkt sind, aber alle Kantenlängen einheitlich und nur ein Kabeltyp zur Verfügung steht, konnte von uns nicht gelöst werden. Das heißt wir haben weder einen Polynomialzeitalgorithmus gefunden, noch einen Beweis für NP-schwere. Für alle anderen Fälle des Windfarm-Verkabelungsproblems bei teilbarem Fluss konnten wir in diesem Kapitel entweder zeigen, dass sie NP-schwer sind oder mindestens einen Algorithmus mit pseudopolynomieller Laufzeit angeben.

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Windfarm-Verkabelungsproblem auf Bäumen betrachtet. Dabei wurde das Verkabelungsproblem durch mehrere Parameter beschrieben und die Komplexität des Problems je nach Wahl der Parameter untersucht. Die Parameter sind die Folgenden:

- Teilbarkeit: Ist der Fluss teilbar oder nicht?
- Graph: Ist der zugrundeliegende Graph ein allgemeiner Baum oder ein Pfad?
- Kantenlängen: Ist die Länge der Kanten beliebig nicht negativ oder 1?
- beschränkte Substationen: Sind die Kapazitäten der Substationen beschränkt oder nicht?
- Kabeltypen: Gibt es mehrere Kabeltypen oder nur einen (unbeschränkten) Kabeltyp?
- beliebige Produktionen: Sind die Produktionen der Turbinen beliebig aus  $\mathbb{N}$  oder einheitlich (nur betrachtet, wenn der Graph ein Pfad ist)?

In Abbildung 7.1 sind die Ergebnisse für die einzelnen Fälle des Windfarm-Verkabelungsproblems nochmals übersichtlich dargestellt.

Bei unteilbarem Stromfluss ist das Verkabelungsproblem auf einem Pfadgraphen unabhängig von der Wahl der anderen Parameter in Polynomialzeit lösbar. Mit Algorithmus 5.1 lässt sich das vollständige Verkabelungsproblem in  $O(n^2)$  Zeit lösen. Ist nicht für alle Parameter die schwierigere Variante gewählt, kann das Problem in manchen dieser Fälle auch in linearer Laufzeit gelöst werden. Sind beispielsweise nur beliebige Produktionen und Kantenlängen vorgegeben, kann das Verkabelungsproblem, wie in Abschnitt 5.1.2 beschrieben, in Linearzeit gelöst werden.

Wenn für das Verkabelungsproblem auf einem Baum eine beliebige Menge Kabeltypen zur Verfügung steht, ist es bereits NP-schwer. Dies ist unabhängig davon, wie die anderen Parameter gewählt sind und gilt sowohl für unteilbaren Fluss (Theorem 5.14) als auch für teilbaren Fluss (Theorem 6.5).

Also dürfen nicht beliebig viele Kabeltypen zur Verfügung stehen, wenn ein Polynomialzeit-Algorithmus für das Verkabelungsproblem auf einem Baum gesucht ist. Für das Verkabelungsproblem, bei dem nur beschränkte Substationen gefordert waren, wurde Algorithmus 5.2 angegeben, der, von unten nach oben auf jede Turbine angewandt, eine optimale Lösung in  $O(n^2)$  Schritten berechnet. Sind die Substationen unbeschränkt, aber Längen der Kanten beliebig nicht negativ, kann ein Algorithmus zur Berechnung eines minimalen

Spannbaums auf einen modifizierten Graphen angewendet werden, um eine optimale Lösung zu berechnen. Sobald aber der einzige Kabeltyp in seiner Kapazität beschränkt ist, ist das Verkabelungsproblem, bei beliebigen Kantenlängen NP-schwer. Dies folgt direkt aus dem Beweis zu Theorem 6.3, welcher für teilbaren Fluss zeigt, dass ein beschränkter Kabeltyp und beliebige nicht negative Kantenlängen in Kombination NP-schwer sind.

Es kann sowohl das Verkabelungsproblem, bei dem nur beschränkte Substationen als auch das, bei dem beliebige Kantenlängen gefordert sind, in Polynomialzeit gelöst werden. Wenn aber beide Parameter kombiniert werden, ist dies nicht möglich, falls  $P \neq NP$ .

Für teilbaren Fluss können dieselben Algorithmen wie bei unteilbarem Fluss verwendet werden, wenn es weder beschränkte Kabeltypen noch beschränkte Substation-Kapazitäten gibt. Dann muss der Stromfluss nicht aufgeteilt werden, weil es keine Beschränkungen gibt, wie viel Strom über eine Kante fließen darf. Das Gleiche gilt für das Problem auf einem Pfadgraphen, wenn die Produktion der Turbinen für alle Turbinen eins ist. Abgesehen von diesen Spezialfällen konnten wir für teilbaren Fluss keine Polynomialzeit-Algorithmen für das Windfarm-Verkabelungsproblem auf Bäumen finden. Wenn das Verkabelungsproblem allerdings auf einem Pfad betrachtet wird, können die Algorithmen für unteilbaren Fluss genutzt werden, um Lösungen in pseudopolynomieller Zeit zu finden. Dafür werden die Turbinen des gegebenen Graphen abhängig von ihrer Produktion in mehrere Turbinen aufgeteilt. Auf den resultierenden Graphen können dann die Algorithmen für unteilbaren Stromfluss angewendet werden.

Für zukünftige Forschung könnte nun das Verkabelungsproblem auf Bäumen bei teilbarem Stromfluss genauer betrachtet werden. Der Fall, bei dem nur beschränkte Substationen gegeben sind, konnte von uns nicht in Polynomialzeit gelöst werden, aber wir konnten auch nicht beweisen, dass das Problem NP-schwer ist. Auch die Fälle auf einem Pfadgraphen, bei welchen wir Pseudopolynomialzeitalgorithmen angegeben haben, können weiter untersucht werden. Zudem kann das Problem betrachtet werden, wenn man zum Beispiel die Anzahl der Substation fest vorgibt. Eventuell könnten bei festen Parametern weitere der untersuchten Varianten des Verkabelungsproblems in Polynomialzeit gelöst werden.

In dieser Arbeit haben wir die Verkabelung von Windfarmen nur unter dem Aspekt der Kostenminimierung betrachtet. Es könnte aber weitere Ziele bei der Verkabelung von Windfarmen geben, wie zum Beispiel die Ausfallsicherheit der Verkabelung, wodurch sich ein neues Verkabelungsproblem ergeben würde, was weiter untersucht werden könnte.

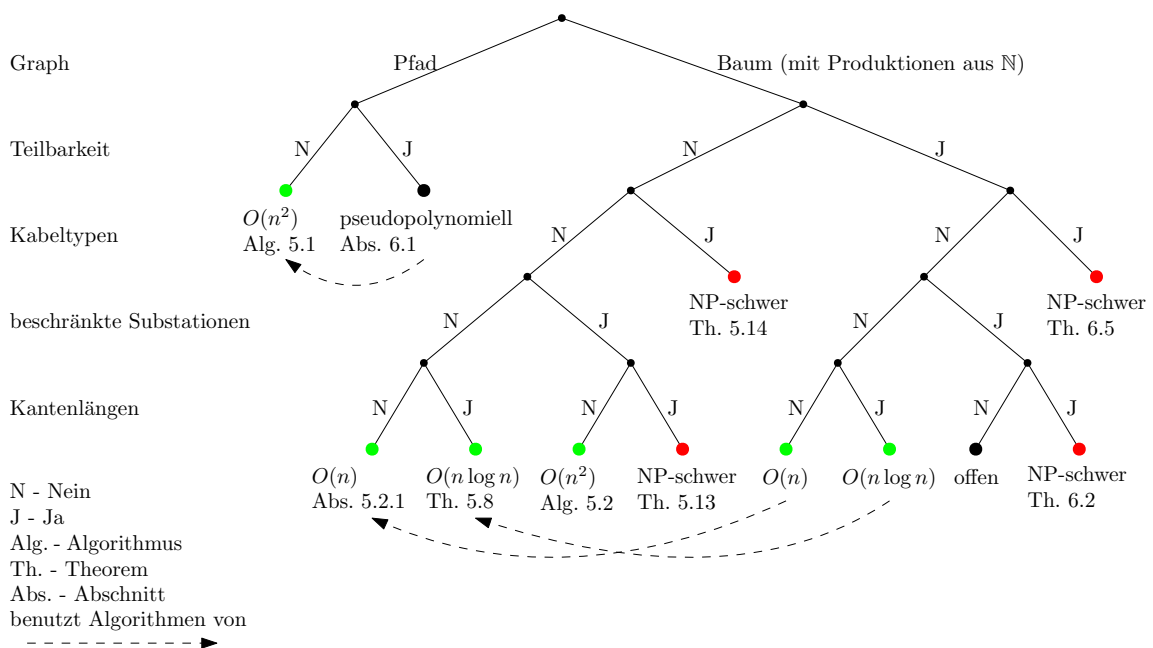


Abbildung 7.1: Der Graph zeigt für die betrachteten Fälle des Verkabelungsproblems die Worst-Case Laufzeiten der Algorithmen oder ob der Fall NP-schwer ist.





# Literaturverzeichnis

- [BL15] Joanna Bauer und Jens Lysgaard: *The offshore wind farm array cable layout problem: a planar open vehicle routing problem*. JORS, 66:360–368, 2015.
- [BMW18] *Informationsportal Erneuerbare Energien - Übersicht Offshore Netzanbindungen*, 2018. <https://www.erneuerbare-energien.de/EE/Navigation/DE/Technologien/Windenergie-auf-See/Offshore-Projekte/Netzanbindungen/netzanbindungen.html>, besucht: 2018-9-7.
- [Bun18] *Bundesregierung | Erneuerbare Energien | Wind*, 2018. <https://www.bundesregierung.de/Content/DE/StatischeSeiten/Breg/Energiekonzept/1-EnergieErzeugen/23-11-11-wind.html>, besucht: 2018-8-24.
- [BVMO11] Constantin Berzan, Kalyan Veeramachaneni, James McDermott und Una May O'Reilly: *Algorithms for cable network design on large-scale wind farms*. Massachusetts Institute of Technology, Seiten 1–24, 2011.
- [CW64] Geoff Clarke und John W. Wright: *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points*. Operations research, 12(4):568–581, 1964.
- [Deu18] *Deutschland - Offshore-Windindustrie*, 2018. <https://www.offshore-windindustrie.de/windparks/deutschland>, besucht: 2018-8-24.
- [Die17] Reinhard Diestel: *Graph Theory, 5th Edition*, Band 173 der Reihe *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2017, ISBN 978-3-662-53621-6.
- [EGRS10] Friedrich Eisenbrand, Fabrizio Grandoni, Thomas Rothvoß und Guido Schäfer: *Connected facility location via random facility sampling and core detouring*. Journal of Computer and System Sciences, 76(8):709–726, 2010.
- [EW66] Larry R. Esau und Kenneth C. Williams: *On teleprocessing system design, Part II: A method for approximating the optimal network*. IBM Systems Journal, 5(3):142–147, 1966.
- [Gan18] *The World's 10 Largest Wind Farms*, 2018. <https://www.worldatlas.com/articles/the-10-largest-wind-farms.html>, besucht: 2018-9-11.
- [GI06] Fabrizio Grandoni und Giuseppe F. Italiano: *Improved approximation for single-sink buy-at-bulk*. In: *International Symposium on Algorithms and Computation*, Seiten 111–120. Springer, 2006.
- [GRS11] Fabrizio Grandoni, Thomas Rothvoß und Laura Sanità: *From uncertainty to nonlinearity: Solving virtual private network via single-sink buy-at-bulk*. Mathematics of Operations Research, 36(2):185–204, 2011.
- [GWE11] Global Wind Energy Council GWEC: *Global wind report 2010*, 2011. [http://gwec.net/wp-content/uploads/2012/06/GWEC\\_annual\\_market\\_update\\_2010\\_-\\_2nd\\_edition\\_April\\_2011.pdf](http://gwec.net/wp-content/uploads/2012/06/GWEC_annual_market_update_2010_-_2nd_edition_April_2011.pdf), besucht: 2018-9-7.

- [GWE17] Global Wind Energy Council GWEC: *Global Wind Report 2016*, 2017. <http://gwec.net/publications/global-wind-report-2/global-wind-report-2016/>, besucht: 2018-8-31.
- [Hau17] Erich Hau: *Windkraftanlagen: Grundlagen. Technik. Einsatz. Wirtschaftlichkeit*. Springer-Verlag, 2017.
- [Hel] Helix Energy Solutions Group HelixESG: *Canyon Offshore T1200 case study*. <http://www.helixesg.com/default/About-Publications/Canyon%20offshore%20T1200%20case%20study.pdf>, besucht: 2018-9-8.
- [Her17] Javier C. Hernández: *It Can Power a Small Nation. But This Wind Farm in China Is Mostly Idle*. New York Times, 2017. <https://www.nytimes.com/2017/01/15/world/asia/china-gansu-wind-farm.html>, besucht: 2018-9-7.
- [Het14] Magnus L. Hetland: *Python Algorithms: mastering basic algorithms in the Python Language*. Apress, 2014.
- [HMM<sup>+</sup>12] Alain Hertz, Odile Marcotte, Asma Mdimagh, Michel Carreau und Francois Welt: *Optimizing the design of a wind farm collection network*. INFOR: Information Systems and Operational Research, 50(2):95–104, 2012.
- [Kru56] Joseph B. Kruskal: *On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem*. Proceedings of the American Mathematical society, 7(1):48–50, 1956.
- [LPSG12] Ivana Ljubić, Peter Putz und Juan José Salazar-González: *Exact approaches to the single-source network loading problem*. Networks, 59(1):89–106, 2012.
- [LRWW17] Sebastian Lehmann, Ignaz Rutter, Dorothea Wagner und Franziska Wegner: *A simulated-annealing-based approach for wind farm cabling*. In: *Proceedings of the Eighth International Conference on Future Energy Systems*, Seiten 203–215. ACM, 2017.
- [NG14] Bogdan C. Neagu und Gheorghe Georgescu: *Wind farm cable route optimization using a simple approach*. In: *Electrical and Power Engineering (EPE), 2014 International Conference and Exposition on*, Seiten 1004–1009. IEEE, 2014.
- [Pap78] Christos H. Papadimitriou: *The complexity of the capacitated tree problem*. Networks, 8(3):217–230, 1978.
- [Pri57] Robert C. Prim: *Shortest connection networks and some generalizations*. The Bell System Technical Journal, 36(6):1389–1401, Nov 1957, ISSN 0005-8580.
- [SCRS01] F. Sibel Salman, Joseph Cheriyan, Ramamoorthi Ravi und Sairam Subramanian: *Approximating the single-sink link-installation problem in network design*. SIAM Journal on Optimization, 11(3):595–610, 2001.
- [SRH08] F. Sibel Salman, Ramamoorthi Ravi und John N. Hooker: *Solving the capacitated local access network design problem*. INFORMS Journal on Computing, 20(2):243–254, 2008.
- [ST02] Nei Y. Soma und Paolo Toth: *An exact algorithm for the subset sum problem*. European Journal of Operational Research, 136(1):57 – 66, 2002, ISSN 0377-2217. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221700003295>.
- [VdMH06] D. J. Van der Merwe und Johannes M Hattingh: *Tree knapsack approaches for local access network design*. European Journal of Operational Research, 174(3):1968–1978, 2006.