UNIVERSITÄT KARLSRUHE – FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR ALGORITHMEN UND KOGNITIVE SYSTEME
INSTITUT FÜR LOGIK, KOMPLEXITÄT UND DEDUKTIONSSYSTEME

6. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 17. Januar 2005, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 20. Januar 2005, Raum -101, 11:30 Uhr

Aufgabe 1
Gegeben sei eine Menge $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ von Halbebenen im $\mathbb{R}^2$ sowie ein Vektor $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Wir nehmen an, dass $\bigcap H$ beschränkt und nicht-leer ist. Ausserdem sei o.E. h_1 eine Halbebene, deren definierende Gerade orthogonal auf c steht und die den Ursprung sowie den Punkt $(-\infty, -\infty)$ enthält. Gesucht ist ein Punkt $p \in \bigcap H$, so dass die x-Koordinate der orthogonalen Projektion von p auf die Ursprungsgerade mit Richtung c maximal ist. Wir nennen p einen Punkt in $\bigcap H$, der extremal in Richtung c liegt.

(a) Welche Punkte in h_1 liegen extremal in Richtung c?

(b) Geben Sie einen deterministischen Algorithmus an, der p in $O(n^2)$ Zeit bestimmt.

(c) Geben Sie eine Menge H an, für die ein deterministischer inkrementeller Algorithmus $\Theta(n^2)$ Zeit benötigt.

(d) Zeigen Sie, dass „der" randomisiert-inkrementelle Algorithmus zur Berechnung von p in erwartet $O(n)$ Zeit läuft.

Tipp: Benützen Sie Rückwärtsanalyse.

Aufgabe 2
Beweisen Sie Lemma 7.14:
Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft, dass $M + M = \{k + \ell \mid k, \ell \in M\} \subseteq M$ und $\gcd M = 1$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\{k_0, k_0+1, k_0+2, \dots\} \subseteq M$, d.h. M enthält ab irgendeinem k_0 *alle* natürlichen Zahlen.

Aufgabe 3
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dessen Kanten $\{i, j\} \in E$ mit nichtnegativen reellen Zahlen $c(i, j)$ gewichtet sind. $\Gamma(i)$ bezeichne die Menge der Knoten, zu denen von i eine Kante führt. Es sei M die aus G konstruierte Markov-Kette mit Zustandsmenge $S = V$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P_{i,j} = \frac{c(i,j)}{\sum_{k \in \Gamma(i)} c(i,k)} \ .$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{p}$ mit

$$\mathbf{p}_i = \frac{\sum_{k \in \Gamma(i)} c(i,k)}{\sum_{m \in V} \sum_{k \in \Gamma(i)} c(m,k)}$$

eine stationäre Verteilung ist. (Hinweis: detailed balance).

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die in Definition 7.31 festgelegten Markov-Ketten die Gleichverteilung als stationäre Verteilung haben.

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}$ sei G_n das $n \times n$-Gitter, also der ungerichtete Graph mit Knotenmenge $V_n = \{1, \dots, n\}^2$, bei dem eine Kante genau dann zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) existiert, wenn $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$ ist.

Es sei M_n die Markov-Kette, die sich aus G_n gemäß Definition 7.31 für $\beta = 1/2$ ergibt (also Übergangswahrscheinlichkeit zwischen benachbarten Knoten $1/8$).

Zeigen Sie, dass der Leitwert von M_n in $O(1/n)$ ist, indem Sie Flüsse f_{ij} angeben, für die die relative Kantenauslastung $\rho(f) \in O(n)$ ist. (Hinweis: kürzeste Wege mit maximal einem Knick.)