Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmentechnik
WS 05/06

5. Musterlösung

Problem 1: Vitale Kanten *

In einem Netzwerk $(D = (V, E); s, t; c)$ mit Maximalfluß f heißen Kanten $e \in E$ *vital*, falls in dem modifizierte Netzwerk $(D' = (V, E \setminus \{e\}); s, t; c)$ für den Maximalfluß f' gilt

$$\omega(f) > \omega(f').$$

(a) Untersuchen Sie, ob es in jedem Netzwerk vitale Kanten gibt.

(b) *Vitalste* Kanten sind solche, die den Wert eines Maximalflusses um den größtmöglichen Betrag verringern. Ist eine Kante, die unter den Kanten eines Minimalschnittes die größte Kapazität hat, immer auch eine vitalste?

Lösung:

(a) Betrachten wir den Fall, in dem alle Kapazitäten größer Null sind. Angenommen es gäbe keine vitale Kante, dann ist auch unter den Kanten eines minimalen Schnittes keine vitale Kante enthalten. Also kann dieser minimale Schnitt um eine Kante mit Kapazität $\neq 0$ verringert werden. Nach dem Satz MinCutMaxFlow sinkt dann der Wert des maximalen Flusses. Somit erhalten wir einen Widerspruch.

Falls wir Null als Kapazität zulassen, können wir Netzwerke mit einem maximalen Fluss gleich Null konstruieren. In solchen Netzwerken existieren keine vitale Kanten.

(b) Nein, eine Kante, die unter den Kanten eines Minimalschnittes die grösste Kapazität hat, ist nicht immer auch eine vitalste Kante. Die Abbildung 1 zeigt einen Graphen, in dem zwei minimale Schnitte S_1 und S_2 existieren. Unter den Kanten von S_1 hat die Kante e_1 maximale Kapazität. Das Entfernen von e_1 verringert den maximalen Fluss um vier. Die Kante e_2 hat zwar die maximale Kapazität unter den Kanten von S_2, verringert aber den maximalen Fluss nur um drei. Sie ist somit keine vitalste Kante.

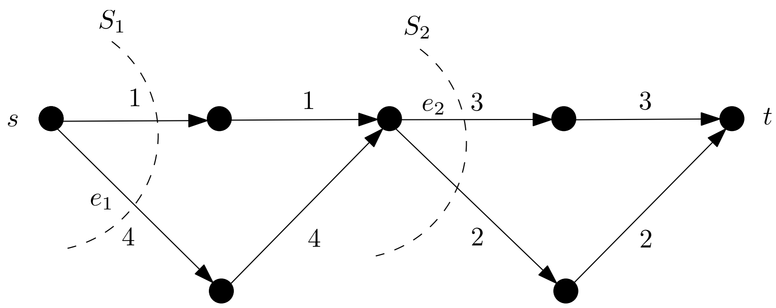

Abbildung 1: Gegenbeispiel für Teilaufgabe (b).

Problem 2: Kapazitätsbedingungen für Knoten *

Betrachten Sie ein Netzwerk $((V, E), s, t, c)$, bei dem es nicht nur Kapazitätsbedingungen auf den Kanten gibt, sonderen bei dem die Menge des Flusses, der in einen Knoten hineinfließt auch beschränkt ist, d.h. es ist $c : E \cup V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und für einen Fluß $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gelten neben den üblichen Flußerhatungsbedingungen die folgenden Kapazitätsbedingungen

$$f(v, w) \leq c(v, w) \text{ für } (v, w) \in E \qquad \text{und} \qquad \sum_{\substack{w \\ (w,v) \in E}} f(w, v) \leq c(v) \text{ für } v \in V.$$

Zeigen Sie, daß sich die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem solchen Netzwerk auf die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk, bei dem es nur Kantenkapazitäten gibt, zurückführen läßt.

Lösung:

Wir ersetzen jeden Knoten v mit Knotenkapazität $c(v)$ durch zwei Knoten v_1 und v_2, die durch eine Kante e_v verbunden sind. Die Knotenbedingung $c(v)$ wird in die Kantenbedingung $c(e_v) = c(v)$ überführt. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel dieser Überführung.

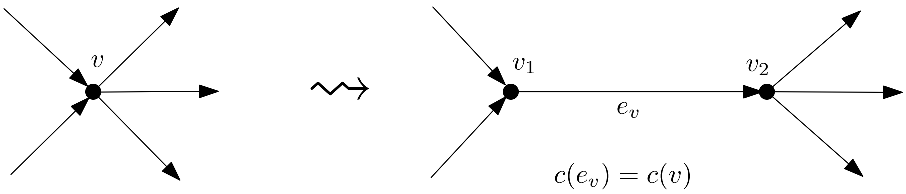

Abbildung 2: Überführung der Knotenbedingung $c(v)$ in die Kantenbedingung $c(e_v)$.

Flüsse im ursprünglichen Netzwerk entsprechen 1:1 „normalen" Flüssen im veränderten Netzwerk, denn durch die Kante e_v kann im veränderten Netzwerk maximal genau so viel Fluss fliessen, wie vorher durch den Knoten v.

Problem 3: Massenhochzeit (Satz von Hall) ***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $X \subseteq V$ sei $N(X) := \{w \in V;\ \{x, w\} \in E \text{ für ein } x \in X\}$ die *Nachbarschaft* von X. Eine Kantenmenge $E' \subseteq E$ heißt *Paarung* von G, wenn jeder Knoten aus V zu genau einer Kante aus E' inzident ist. Betrachte den Satz von Hall:
Ist $V = V_1 \dot\cup V_2$ ein Partition der Knotenmenge in zwei gleich große Teile und $E \subseteq \{\{v_1, v_2\};\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ (Graph ist bipartit), dann gilt: G hat genau dann eine Paarung, wenn $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ eine notwendige Bedingung für eine Paarung ist.

(b) Füge einen Knoten s hinzu, und Kanten (s, v_1), $\forall v_1 \in V_1$ sowie Analoges für V_2 und einen Knoten t, und richte den Graphen geeignet. Was sagt das MIN-CUT-MAX-FLOW-Theorem aus, wenn man zeigt, dass jeder s-t-Schnitt $S \geq |V_1|$ ist ?

(c) Zeigen sie mit Hilfe der vorangegangenen Teilaufgabe, dass $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ sogar eine hinreichende Bedingung für eine Paarung ist.

Lösung. (a) Sei X_1 eine beliebige Teilmenge von V_1. Für eine Paarung müssten mindestens $|X_1|$ Kanten existieren, die paarweise verschiedene Endknoten haben und aus der Knotenmenge X_1 in die Nachbarschaft $N(X_1)$ führen. Dann muss aber die Nachbarschaft von $N(X_1)$ mindestens $|X_1|$ Knoten enthalten. Also muss gelten $|N(X_1)| \geq |X_1|$. Somit ist die Bedingung $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ eine notwendige Bedingung für eine Paarung.

(b) Wir richten alle Kanten von s nach V_1 nach V_2 nach t. Alle Kapazitäten seien 1. Wir zeigen: Falls $c(S, V \setminus S) \geq |V_1|$ für jeden s-t-Schnitt, dann gibt es eine Paarung von G.

Da jeder Schnitt $S \geq |V_1|$ ist, so ist ein minimaler Schnitt ebenfalls größer gleich $|V_1|$. Nach dem MinCutMaxFlow-Satz gilt dann für den Wert $w(f)$ des maximalen Flusses: $w(f) \geq |V_1|$.

Wir betrachten den s-t-Schnitt $S_s := (\{s\}, V \setminus \{s\})$. Da $S_s \geq |V_1|$ ist, hat jeder Knoten in V_1 genau den Einfluss 1. Wegen der Flusserhaltugsbedingung hat jeder Knoten aus V_1 der Ausfluss 1. Also existieren mindestens $|V_1|$ Kanten von V_1 nach V_2. Wir behaupten, dass jeder Knoten in V_2 den Einfluss eins hat.

- Falls ein Knoten $v \in V_2$ den Einfluss 0 hat, dann hat v den Ausfluss 0 und der Schnitt $\{v, t\}, V \setminus \{v, t\}$ hat einen Wert von maximal $|V_1| - 1$, $|V_2| = |V_1|$. Widerspruch.

- Falls ein Knoten in V_2 einen Einfluss grösser zwei hat, dann ist die Flusserhaltungsbedingung verletzt, da der Ausfluss (nach t) gleich eins ist. Widerspruch.

Somit hat jeder Knoten in V_2 den Einfluss eins.

Um einen maximalen Fluss von V_1 nach V_2 zu leiten, müssen genau $|V_1|$ Kanten passiert werden. Zwei dieser Kanten können nicht einen gemeinsamen inzidenten Knoten haben, da sonst der Einfluss bzw. der Ausfluss solcher Knoten ungleich eins wäre. Andererseits decken diese Kanten $V_1 \cup V_2$ vollständig ab. Somit bilden diese Kanten eine Paarung.

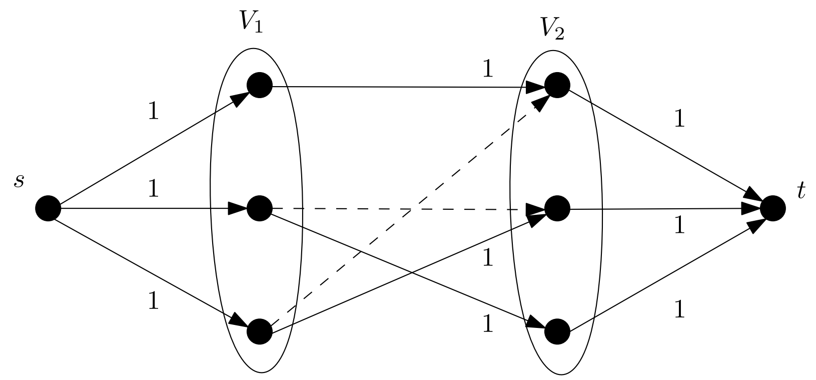

Abbildung 3: Der maximale Fluss induziert eine Paarung.

(c) Wir betrachten das gleiche Netzwerk wie in der Teilaufgabe (b) und die Knotenmengen X_1, X_2, Y_1 und Y_2, so daß $V_1 = X_1 \cup X_2$ und $V_2 = Y_1 \cup Y_2$. Sei $S = (\{s\} \cup X_1 \cup Y_1, \{t\} \cup X_2 \cup Y_2)$ ein beliebiger s-t-Schnitt. Wir zeigen dass $c(S) \geq |V_1| =: n$ ist (vgl. Abb. 4). Dann folgt aus Teil b) die Behauptung.

Sei $p := |X_1|, q := |Y_1|$, also $|X_2| = n - p, |Y_2| = n - q$. Die Anzahl der Kanten von X_1 nach Y_2 sei r. Es gilt $c(S, V \setminus S) = p + q + r$. Nach Vorraussetzung wissen wir: $|N(X_1)| \geq |X_1| = n - p$. Zu jedem $v \in N(X_1) \cap Y_1$ gibt es eine Kante nach t. Die Menge all dieser

Kanten sei E_1. Zu jedem $w \in N(X_1) \cap Y_2$ gibt es eine Kante nach X_1. Die Menge dieser Kanten sei E_2. Alle diese Kanten sind verschieden. Es gilt also $|E_1 \cup E_2| = |N(X_1)| \geq |X_1| = n - p$. Also gilt $c(S, V \setminus S) \geq p + |E_1| + |E_2| = p + (n - p) = n$, q.e.d.

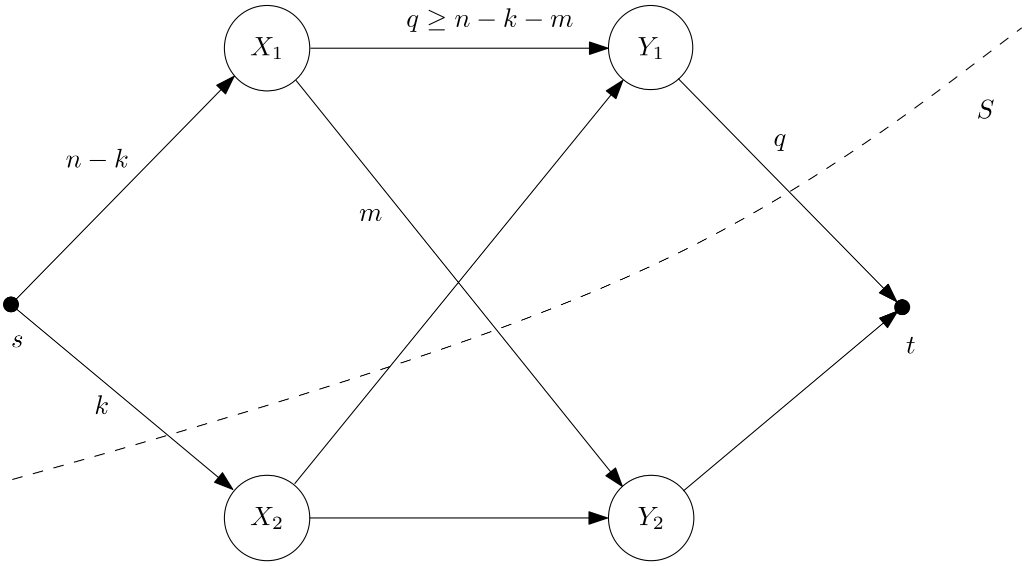

Abbildung 4: Beliebiger s-t-Schnitt.

□

Problem 4: Kreisbasen **

Wir betrachten einen konstruktiven Beweis der folgenden Aussage:
Die Dimension des Kreisraums eines zusammenhängenden, ungerichteten Graphen $G(V, E)$ mit $|E| = m$ Kanten und $|V| = n$ Knoten ist $m - n + 1$.

(a) Man betrachte einen aufspannenden Baum $T(V', E')$ von $G(V, E)$. Jede Nichtbaumkante $e \in E \setminus E'$ induziert einen eindeutigen Kreis C_e. Die Menge aller solcher Kreise sei $B = \{C_e \mid e \in E \setminus E'\}$. Zeigen sie dass gilt $|B| = m - n + 1$

(b) Zeigen sie, dass B linear unbhängig ist.

(c) Zeigen sie dass B eine Kreisbasis ist. Gehen sie dabei konstruktiv vor und beschreiben sie, wie ein beliebiger Kreis durch Linearkombination von Elementen aus B gebildet werden kann.

Lösung:

(a) Ein aufspannender Baum T in G hat genau $n - 1$ Kanten (siehe Übungsblatt 3, Aufgabe 2). Die restlichen $m - n + 1$ Kanten sind Nichtbaumkanten, die jeweils einen Kreis aus B induzieren. Jeder induzierte Kreis C_e enthält genau eine Nichtbaumkante e, die ihn induziert. Somit ist $|B| = m - n + 1$.

(b) Wir betrachten den Vektor X_e, der den Kreis C_e darstellt. Es gilt: X_e hat den Eintrag 1 für alle $e' \in C_e$, sonst Nullen. Da jeder solcher Kreis nur eine Nichtbaumkante e enthält, hat X_e den Eintrag 1 für e, sonst 0 für alle andere Nichtbaumkanten. Ein Kreis C_e kann also nicht aus der Linearkombination der Kreise $B \setminus C_e$ gebildet werden. Damit ist B linear unabhängig.

(c) Wir zeigen, dass sich jeder Kreis als Linearkombination von Elementen aus B erzeugen lässt. Dafür betrachten wir einen beliebigen Kreis C und seinen Vektor X_C als Repräsentanten im Kreisraum. Wir wollen zeigen, dass die Linearkombination

$$C^* := \sum_{e \in C \setminus E'} C_e$$

aller Kreise zu Nichtbaumkanten von C den Kreis C erzeugt. Der zu C^* gehörende Koordinatenvektor sei X^*.

1. Für jede „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kante" $e \in C \setminus E'$ kommt der Kreis $C_e \in B$ in der Linearkombination vor. C_e ist der einzige Basiskreis, der e enthält, also hat X^* an der Stelle e eine 1.

2. Jede „Baum-aber-nicht-Kreis-Kante" $a = (u, v) \in E' \setminus C$ induziert einen Schnitt A, der N_u und N_v trennt, wobei N_u, die von u in $T \setminus a$ über einen Weg erreichbaren Knoten seien. Da T ein Baum ist, ist dieser Schnitt eindeutig und es gibt außer a keine Kanten aus T, die Knoten aus $N(u)$ mit Knoten aus $N(v)$ verbinden. Der Kreis C kreuzt diesen Schnitt eine gerade Anzahl von Malen. Jede Kreiskante $e' \in C$, die diesen Schnitt kreuzt ist keine Baumkante und induziert somit einen Kreis in B, der in C^* vorkommt (da e' „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kante"). Sei $B' \subseteq B$ die Menge der Kreise, die induziert werden durch die Kanten $e' \in C$, die A kreuzen. Jeder Kreis aus B' enthält a und es gilt $|B'| \equiv 0 \pmod 2$. Kein anderer Kreis, der in C^* vorkommt, enthält a. Damit hat X^* den Eintrag 0 für die Kante a.

3. Jede „Baum-und-Kreis-Kante" $b \in E' \cap C$ induziert auch einen Schnitt D, den nun aber nur noch eine ungerade Anzahl weiterer „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kanten" kreuzt (gleiches Argument wie eins vorher). Sei $B'' \subseteq B$ die Menge der Kreise, die induziert werden von den „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kanten", die D kreuzen. Es gilt $|B''| \equiv 1 \pmod 2$. Somit hat X^* den Eintrag 1 für die Kante b.

4. Jede „Nicht-Baum-und-nicht-Kreis-Kante" $d \in E \setminus C \setminus E'$ hat den Eintrag 0 in X^*, da kein Kreis in C^* die Kante d enthält.

Insgesamt hat man in X^* für alle Kanten des Kreises C eine 1 und für alle anderen eine 0. Somit gilt $X_C = X^*$. Da C beliebig gewählt wurde, und $\mathcal{C}$ von den Kreisen erzeugt wird, bildet B eine Basis des Kreisraums.

Hinweis: Der Kreisraum wird von den Kreisen in G über GF(2) erzeugt. Damit ist noch nicht gesagt, dass der Kreisraum nur Kreise enthält. Das ist zwar wahr, müsste aber erst noch (in einer weiteren Übung) gezeigt werden.

Problem 5: Finde die Kreisbasis! *

Betrachte folgenden Graphen (Abb. 5):

(a) Konstruieren sie eine Kreisbasis.

(b) Bilden sie die Linearkombination aller Basisvektoren, was erhalten sie?

(c) Erstellen sie mit einer linearen Kombination der Basisvektoren den schraffierten Kreis.

Lösung:

(a) Wir betrachten den in Abbildung 5 angegebenen aufspannenden Baum T. Die Nichtbaumkanten sind 4, 5, 7, 8 und 10. Sie induzieren die Kreise: $C_4 = (2,3,4)$, $C_5 = (2,3,6,5), C_7 = (1,2,3,7), C_8 = (1,2,3,6,8)$ und $C_{10} = (10,11,12)$. Nach Aufgabe 4 ist $B = \{C_4, C_5, C_7, C_8, C_{10}\}$ eine Kreisbasis. Die Basisvektoren für diese Basis sind:

$$
\begin{aligned}
X_4 &= (011100000000) \\
X_5 &= (011011000000) \\
X_7 &= (111000100000) \\
X_8 &= (111001010000) \\
X_{10} &= (000000000111)
\end{aligned}
$$

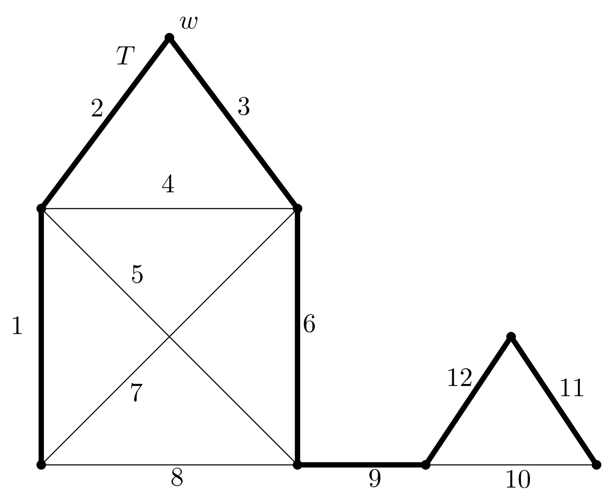

Abbildung 5: Aufspannender Baum T.

(b) Die Summe der Basisvektoren ist $X = \sum_{X_i \in B} X_i = (000110110111)$. Dieser Vektor entspricht dem (nicht einfachen) Kreis: $C = (4,5,7,8) \cup (10,11,12)$.

(c) Der schraffierte Kreis $C' = (2,3,7,8,5)$ enthält die Nichtnaumkanten 5,7 und 8. Aus Aufgabe 4, Teil (c) folgt:

$$
\begin{aligned}
X_{C'} &= X_5 + X_7 + X_8 \\
&= (011011000000) + \\
&\quad\ (111000100000) + \\
&\quad\ (111001010000) \\
&= (011010110000)
\end{aligned}
$$