Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmentechnik
WS 05/06

6. Musterlösung

Problem 1: Abgeschlossenheit der Addition *

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Summe $c_1 \oplus c_2$ zweier Kreise ist wieder ein Kreis.

Lösung.
Seien c_1, c_2 zwei beliebige Kreise. Die Verknüpfung $\oplus$ ist wie folgt definiert:

$$c_1 \oplus c_2 = (c_1 \cup c_2) \setminus (c_1 \cap c_2).$$

Zur Erinnerung: Ein Kreis ist ein Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat. Sei v ein beliebiger Knoten von $c_1 \oplus c_2$. Wir zeigen nun, dass dieser Knoten in $c_1 \oplus c_2$ einen geraden Grad hat. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\deg_{c_1 \oplus c_2}|v| &= |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \ e \in c_1 \setminus c_1 \cap c_2\}| + \\
&\quad |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \ e \in c_2 \setminus c_1 \cap c_2\}| \\
&= |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \ e \in c_1\}| + \\
&\quad |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \ e \in c_2\}| - \\
&\quad 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \ e \in c_1 \cap c_2\}| \\
&= \deg_{c_1}(v) + \deg_{c_2}(v) - 2 \cdot \deg_{c_1 \cap c_2}(v) \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Also hat jeder Knoten des Teilgraphen $c_1 \oplus c_2$ einen geraden Grad. Somit ist nach Definition $c_1 \oplus c_2$ ein Kreis.

□

Problem 2: LU Kreise sind Matroide **

Sei G ein Graph. $\mathcal{C}$ der Vektorraum aller Kreise von G über GF(2). Zeigen Sie: Die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{C}$ ist ein Matroid.

Lösung.
$\mathcal{C}$ ist ein Vektorraum. Also gilt:

- Die leere Menge ist linear unabhängig.
- Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind wieder linear unabhängig.
- Seien C_1, C_2 zwei linear unabhängige Mengen mit $|C_1| < |C_2|$. Da C_1 und C_2 linear unabhängige Mengen sind, folgt daraus $dim(span(C_1) < dim(span(C_2)$. Aus der LA-Vorlesung wissen wir, dass es dann ein $v \in C_2$ existiert, so dass keine lineare Kombination von Vektoren aus C_1 v ergibt (sonst wäre $dim(span(C_1) = dim(span(C_2))$. Also bildet $C_1 \cup \{v\}$ die gesuchte lineare unabhängige Menge.

Dies sind genau die drei Eigenschaften, die ein Matroid definieren. □

Problem 3: Vier Vermutungen **

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen oder finden Sie jeweils ein Gegenbeispiel.

(a) Die Fundamentalbasis zu einem MST ist eine MCB.

(b) Jede MCB ist eine Fundamentalbasis

(c) In jedem Graphen gibt es eine MCB, die eine Fundamentalbasis ist.

(d) Die Menge $\mathcal{K} := \{C_{\min}(e_i) \mid C_{\min}(e_i)$ kürzester Kreis, der e_i enthält, $e_i \in E\}$ ist im Allgemeinen keine Basis des Kreisraums.

Lösung. Alle Vermutungen sind falsch. Gegenbeispiele sind in der Abbildung 1 angegeben.

- Der punktierte MST in Abbildung 1(a) ist wegen der Gewichtsverteilung eindeutig bestimmt. Dieser Baum induziert eine eindeutige Fundamentalbasis FB, die aus den Fundamentalkreisen zu den zwei Nicht-Baumkanten (mit Gewicht $c+1$) besteht. Es gilt $|FB| = 8c + 2$.

  Betrachten wir als Gegenbeispiel die Kreisbasis CB, die aus dem Quadrat und dem Dreieck besteht. Es gilt: $|MCB| \leq |CB| = 7c + 3$. Da $7c + 3 \leq 8c + 2$ für $c \geq 2$ erhalten wir $|MCB| \leq |FB|$

- Wir betrachten den Graphen in Abbildung 1(b). Die aus den vier gekennzeichneten Dreiecke bestehende Kreisbasis CB ist eine MCB aber keine FB, da $dim(span(C_1) < dim(span(C_2)$ die Erzeugung dieser Basis in jedem Fall einen Kreis induziert:

  Wir versuchen einen MST für CB zu erzeugen. In jedem Kreis gibt es eine einzige Nicht-Baumkante. OBdA sei die Kante 3 die Nich-Baumkante zum inneren Kreis. Dann sind die Kanten 4 und 5 zwangsweise Baumkanten. Im oberen Dreieck müssen auch zwei Baumkanten enthalten sein: Die Kante 3 erzeugt den Kreis 3-4-5 und die Kanten 1 und 2 erzeugen den Kreis 1-2-5-4.

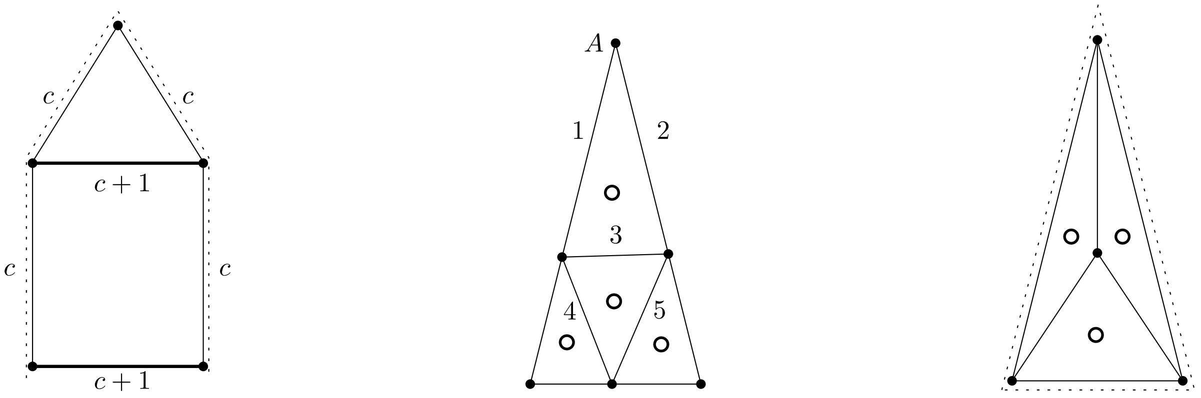
- Da die MCB in diesem Graphen Abbildung 1(b) eindeutig ist und nach 3 keine FB, folgt die Aussage.

- In Abbildung 1(c) besteht$\mathcal{K}$ aus den vier gekennzeichneten Dreiecke. Die Dimension von MCB ist aber $m - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ (siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 4).

□

Problem 4: Besser? **

Ist die oben definierte Menge $\mathcal{K}$ ein guter Ersatz für die Kandidatenmenge $\mathcal{H}$ im Algorithmus von Horton?



(a) Gegenbeispiel für (a)

(b) Gegenbeispiel für (b) und (c)

(c) Gegenbeispiel für (d)

Abbildung 1: Illustrationen für Aufgabe 3.

Lösung. Nein, die Menge $\mathcal{K}$ ist kein guter Ersatz für die Kandidatenmenge $\mathcal{H}$ im Algorithmus von Horton. In Abbildung 2 enthält $\mathcal{K}$ die acht kleinen Kreise. Aber es gilt: $dim(MCB) = m - n + 1 = 16 - 8 + 1 = 9$. Es fehlt ein Kreis, der das innere Quadrat enthält bzw. aufspannt.

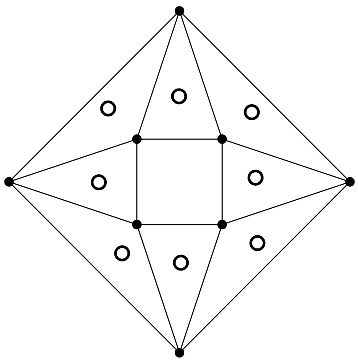


Abbildung 2: Gegenbeispiel für Aufgabe 4.

□

Problem 5: Basiswandel *

In der Vorlesung wird der Korrektheitsbeweis des Algorithmus von de Pina über den Beweis von Simple MCB geleitet. Um zu zeigen, dass tatsächlich eine minimale Kreisbasis entsteht wird ein Widerspruchsbeweis geführt. Ein wichtiger Teil davon ist die Behauptung, dass $\mathcal{B}^* := \mathcal{B} \setminus \{D_j\} \cup \{C_{i+1}\}$ wieder eine Kreisbasis ist (siehe Vorlesungsaufschrieb).

Beweisen sie, dass $\mathcal{B}^*$ wieder eine Basis ist.

Lösung. Wir betrachten eine Basis $\mathcal{B} := \{D_1, \ldots, D_n\}$ und Kreise C_{i+1} und S_{i+1}, so dass C_{i+1} der kürzeste Kreis mit $\langle C_{i+1}, S_{i+1} \rangle = 1$ ist$dim(span(C_1) < dim(span(C_2)$.

Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es eine eindeutige Darstellung von C_{i+1} als Summe von Vektoren aus $\mathcal{B}$. Aus $C_{i+1} = D_1 \oplus \cdots \oplus D_l$ und $\langle C_{i+1}, S_{i+1}\rangle = 1$ folgt, dass es ein $D_j \neq 0$ existiert, so dass $\langle D_j, S_{i+1}\rangle = 1$ gilt.

Die Idee ist nun D_j aus $\mathcal{B} \setminus \{D_j\} \cup \{C_{i+1}\}$ zu konstruieren.

$$\begin{aligned} C_{i+1} = D_1 \oplus \cdots \oplus D_j \oplus \cdots \oplus D_l \quad &\Longrightarrow \quad C_{i+1} \oplus \bigoplus_{i \neq j} D_i = D_1 \oplus \cdots \oplus D_j \oplus \cdots \oplus D_l \oplus \bigoplus_{i \neq j} D_i \\ &\Longrightarrow \quad D_j = C_{i+1} \oplus \bigoplus_{i \neq j} D_i \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus $D_k \oplus D_k = 0$ für alle Kreise D_k. Da $D_j \neq 0$ ist, erhalten wir eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren, die somit die Basis $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \setminus \{D_j\} \cup \{C_{i+1}\}$ bilden.

□

Problem 6: Goldberg-Tarjan **

Sei $(D; s; t; c)$ ein Netzwerk, f ein Präfluss. Ein saturierter Schnitt (bzgl. f) ist ein s-t-Schnitt $(S, V \setminus S)$, so dass gilt:

$$\forall u \in S, v \in V \setminus S\colon f(u,v) = c(u,v)$$

Wir betrachten nun den Präfluss f und die Markierung dist zu irgendeinem Zeitpunkt der Ausführung des Goldberg-Tarjan-Algorithmus.

(a) Zeigen Sie: Nach jeder Push- und Relabel-Operation gibt es einen saturierten Schnitt bzgl. des aktuellen Präflusses f.

(b) Folgern Sie mit Hilfe von (a), dass der Algorithmus einen maximalen Fluss berechnet, falls er terminiert.

(c) Für jede Kante (v, t) gilt: Aus $\text{dist}(v) > 1$ folgt $f(v,t) = c(v,t)$.

(d) Für jeden Knoten v gilt: Wenn es einen (bzgl. f) erhöhenden Weg von v nach t gibt, dann ist $\text{dist}(v)$ eine untere Schranke für die Länge dieses Weges.

Lösung.

(a) Nach der Initialisierung ist $(\{s\}, V \setminus \{s\})$ ein saturierter Schnitt. Im allgemeinen Fall sei S die Menge aller Knoten, die von s aus auf einem erhöhenden Weg erreichbar sind. Mit anderen Worten: S ist die Menge der Knoten, die von s aus im Residualgraphen erreichbar sind. S kann wegen Lemma 4.22 aus der Vorlesung (bzw. wegen der Zulässigkeit von dist) den Knoten t nicht enthalten. Für jede Kante e, die von S nach $V \setminus S$ führt, gilt $f(e) = c(e)$ (nach Konstruktion), also ist $(S, V \setminus S)$ saturiert.

(b) Wenn der Algorithmus terminiert ist f ein Fluss, da es keine aktiven Knoten mehr gibt. Für den saturierten Schnitt $(S, V \setminus S)$, der nach (a) existiert, gilt

$$c(S, V \setminus S) = \sum_{u \in S, v \notin S} c(u,v) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u,v) = w(f) \ .$$

Also ist $(S, V \setminus S)$ ein minimaler Schnitt und f ein maximaler Fluss.

(c) Wegen der Zulässigkeitsbedingung von $\textsc{Relabel}(v)$ kann die Kante (v, t) bei der Erhöhung von $\mathrm{dist}(v)$ auf 2 nicht im Resiualgraphen enthalten gewesen sein. Da $\mathrm{dist}(t)$ nie verändert wird, gilt auch für den Rest des Algorithmus $f(v, t) = c(v, t)$.

(d) Sei v ein beliebiger Knoten. $\delta(v)$ sei die Distanz von v nach t im Residualgraphen. Wir machen Induktion nach $\delta(v)$.

$\delta(v) = 0$ bedeutet $v = t$ und $\mathrm{dist}(v) = 0$.
Sei nun $\delta(v) > 0$. Die Kante (v, w) sei die erste Kante eines kürzesten Weges von v nach t. Dann gilt $f(v, w) < c(v, w)$, also auch $\mathrm{dist}(v) \leq \mathrm{dist}(w) + 1$ wegen der Zulässigkeit von dist. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\mathrm{dist}(v) \leq \mathrm{dist}(w) + 1 \leq \delta(w) + 1 = \delta(v)$.
Im Falle von $\delta(v) = \infty$ gilt die Behauptung offensichtlich.

$\square$