Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmentechnik
WS 05/06

5. Übungsblatt

Ausgabe: 4. Januar 2006
Abgabe: 16. Januar, 14 Uhr im ITI Wagner (Informatik-Hauptgebäude, 3. Stock)

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Vitale Kanten *

In einem Netzwerk $(D = (V, E); s, t; c)$ mit Maximalfluss f heißen Kanten $e \in E$ *vital*, falls in dem modifizierte Netzwerk $(D' = (V, E \setminus \{e\}); s, t; c)$ für den Maximalfluss f' gilt

$$\omega(f) > \omega(f').$$

(a) Untersuchen Sie, ob es in jedem Netzwerk vitale Kanten gibt.

(b) *Vitalste* Kanten sind solche, die den Wert eines Maximalflusses um den größtmöglichen Betrag verringern. Ist eine Kante, die unter den Kanten eines Minimalschnittes die größte Kapazität hat, immer auch eine vitalste?

Problem 2: Kapazitätsbedingungen für Knoten *

Betrachten Sie ein Netzwerk $((V, E), s, t, c)$, bei dem es nicht nur Kapazitätsbedingungen auf den Kanten gibt, sonderen bei dem die Menge des Flusses, der in einen Knoten hineinfließt auch beschränkt ist, d.h. es ist $c : E \cup V \to \mathbb{R}_0^+$ und für einen Fluss $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ gelten neben den üblichen Flusserhaltungsbedingungen die folgenden Kapazitätsbedingungen

$$f(v, w) \leq c(v, w) \text{ für } (v, w) \in E \qquad \text{und} \qquad \sum_{\substack{w \\ (w,v) \in E}} f(w, v) \leq c(v) \text{ für } v \in V.$$

Zeigen Sie, dass sich die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem solchen Netzwerk auf die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk, bei dem es nur Kantenkapazitäten gibt, zurückführen lässt.

Problem 3: Massenhochzeit (Satz von Hall) ***

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $X \subseteq V$ sei $N(X) := \{w \in V;\ \{x, w\} \in E \text{ für ein } x \in X\}$ die *Nachbarschaft* von X. Eine Kantenmenge $E' \subseteq E$ heißt *Paarung* von G, wenn jeder Knoten aus V zu genau einer Kante aus E' inzident ist. Betrachten Sie den Satz von Hall:
Ist $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ ein Partition der Knotenmenge in zwei gleich große Teile und $E \subseteq \{\{v_1, v_2\};\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ (Graph ist bipartit), dann gilt: G hat genau dann eine Paarung, wenn $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ eine notwendige Bedingung für eine Paarung ist.

(b) Füge einen Knoten s hinzu, und Kanten (s, v_1), $\forall v_1 \in V_1$ sowie Analoges für V_2 und einen Knoten t, und richte den Graphen geeignet. Was sagt das MIN-CUT-MAX-FLOW-Theorem aus, wenn man zeigt, dass jeder s-t-Schnitt $S \geq |V_1|$ ist ?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der vorangegangenen Teilaufgabe, dass $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ sogar eine hinreichende Bedingung für eine Paarung ist.

Problem 4: Kreisbasen **

Wir betrachten einen konstruktiven Beweis der folgenden Aussage:
Die Dimension des Kreisraums eines zusammenhängenden, ungerichteten Graphen $G(V, E)$ mit $|E| = m$ Kanten und $|V| = n$ Knoten ist $m - n + 1$.

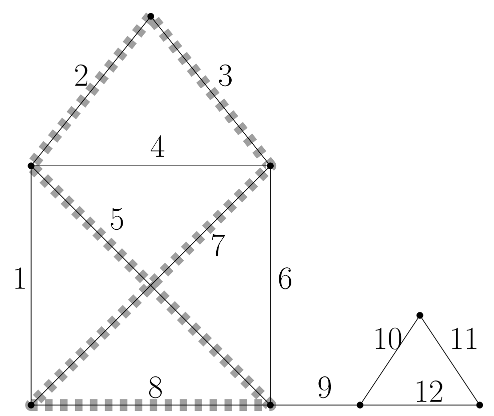
(a) Man betrachte einen aufspannenden Baum $T(V', E')$ von $G(V, E)$. Jede nicht-Baumkante $e \in E \setminus E'$ induziert einen eindeutigen Kreis C_e. Die Menge aller solcher Kreise sei $B = \{C_e \mid e \in E \setminus E'\}$. Zeigen Sie dass gilt $|B| = m - n + 1$

(b) Zeigen Sie, dass B linear unbhängig ist.

(c) Zeigen Sie dass B eine Kreisbasis ist. Gehen Sie dabei konstruktiv vor und beschreiben Sie, wie ein beliebiger Kreis durch Linearkombination von Elementen aus B gebildet werden kann.

Problem 5: Finde die Kreisbasis! *

Betrachten Sie folgenden Graphen:



(a) Konstruieren Sie eine Kreisbasis.

(b) Bilden Sie die Linearkombination aller Basisvektoren, was erhalten Sie?

(c) Erstellen Sie mit einer linearen Kombination der Basisvektoren den schraffierten Kreis.