UNIVERSITÄT KARLSRUHE
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

4. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 12. Dezember 2005, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 15. Dezember 2005, Raum 301, 14:00 Uhr

Aufgabe 1

Ein Graph G heißt d-regulär, falls für jeden Knoten v gilt $\deg(v) = d$. Beispielsweise sind Kreise 2-regulär und der vollständige Graph K_n ist $(n-1)$-regulär.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es gibt einen 4-regulären planaren Graphen.

(b) Es gibt einen 5-regulären planaren Graphen.

(c) Es gibt einen 6-regulären planaren Graphen.

Aufgabe 2

Eine Familie $\mathcal{R} \neq \emptyset$ von linearen Ordnungen der Knotenmenge V eines Graphen G heißt *Realisierer* von G, falls es für jede Kante $e = \{u, v\}$ und jeden Knoten $x \notin e$ eine lineare Ordnung $L \in \mathcal{R}$ gibt, so dass in L $x > u$ und $x > v$, d.h. der Knoten x *über* der Kante $\{u, v\}$ liegt.

Die Dimension $\dim(G)$ ist die minimale Kardinalität eines Realisierers von G. Ein wichtiger Satz von Schnyder besagt, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn seine Dimension höchstens 3 ist.

(a) Bestimmen Sie die Dimension durch Angabe eines minimalen Realisierers für:

  (i) einen Pfad P_n mit n Knoten,

  (ii) einen Kreis C_n mit n Knoten,

  (iii) eine Raupe, d.h. einen Baum, bei dem nach Entfernen aller Blätter nur noch ein Pfad übrigbleibt.

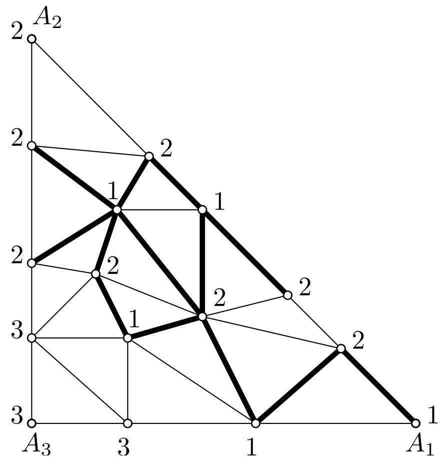
(b) Geben Sie einen möglichst einfachen Baum T mit $\dim(T) = 3$ an und begründen Sie Ihre Antwort.

bitte umblättern

Aufgabe 3

Es sei ein Dreieck $A_1A_2A_3$ in der Ebene gegeben, das wie in der Abbildung gezeigt so unterteilt wird, dass alle inneren Facetten Dreiecke sind. Alle Knoten werden mit den Zahlen 1, 2 oder 3 markiert. Dabei wird lediglich gefordert, dass die Ecken A_i jeweils mit der Zahl i ($i = 1, 2, 3$) markiert werden und alle Knoten, die auf der äußeren Dreiecksseite A_iA_j liegen, mit i oder j. Innere Knoten können beliebig markiert werden.

Zeigen Sie, dass es in einer solchen Dreiecksunterteilung stets ein inneres Dreieck gibt, dessen Ecken alle drei Markierungen tragen.



Hinweis: Betrachten Sie den zugehörigen Dualgraphen, eingeschränkt auf solche Dualkanten, die Kanten mit der Markierung 1 *und* 2 entsprechen (in der Abbildung fett gezeichnet).

Aufgabe 4

Der Satz von Tutte (s. Satz 1.6 im Skript) besagt, dass sich jeder dreifach zusammenhängende planare Graph konvex zeichnen lässt.

Tutte hat auch gezeigt, dass man in diesem Fall ein solches konvexes Layout erhält, indem man die Knoten der äußeren Facette auf einem konvexen Polygon fixiert und alle übrigen Knoten im Schwerpunkt ihrer Nachbarknoten platziert. Das bedeutet, dass die Koordinaten aller Knoten v, die nicht auf der äußeren Facette liegen, folgende Gleichungen erfüllen müssen:

$$x_v = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u:uv \in E} x_u \qquad\qquad y_v = \frac{1}{\deg(v)} \sum_{u:uv \in E} y_u.$$

Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die *Auflösung* des Layouts exponentiell schlecht sein kann. Dabei ist die Auflösung definiert als das Verhältnis des kleinsten zum größten Abstand zweier Knoten in der Zeichnung.

Geben Sie eine Familie $(G_n)_{n \in I}$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$ von dreifach zusammenhängenden planaren Graphen mit n Knoten an, deren Auflösung $O(1/\lambda^n)$ für ein $\lambda > 1$ beträgt.