

Weihnachtsübungsblatt (Blatt 5)

Abgabe: Montag, 9. Januar 2006, zu Beginn der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 12. Januar 2006, Raum 301, 14:00 Uhr

Aufgabe 1

Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon mit den Eckpunkten $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Zeigen Sie, dass P gerade die Menge aller *Konvexkombinationen* seiner Eckpunkte ist, also dass gilt:

$$P = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}.$$

Aufgabe 2

Im Beweis von Satz 2.7 der Vorlesung wird die vom Schnyder-Hain induzierte geodätische Zeichnung ζ eines Graphen G mit Einbettung \mathcal{E} orthogonal auf die Ebene E_{f-1} projiziert.

- Zeigen Sie, dass diese Projektion eine ebene Zeichnung von G mit Einbettung \mathcal{E} liefert.
- Wie lässt sich die Zeichnung in der Ebene $E_{f-1} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear auf ein zweidimensionales Gitter in \mathbb{R}^2 abbilden? Warum bleibt dadurch die Konvexität der Facetten erhalten?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die im Beweis der Rückrichtung von Satz 2.9 konstruierte Abbildung ζ den Graphen G so auf $\partial\mathcal{F}_A$ zeichnet, dass dabei die Einbettung \mathcal{E} erhalten bleibt. (Dabei ist A die Menge der Regionenvektoren der Knoten von G .)

Aufgabe 4

Der neueste Schrei aus der Marketingabteilung des Grußkartenherstellers "WorldGreet Inc." sind dreieckige Weihnachtskarten. Auf die Vorderseiten sollen möglichst platzsparend große Weihnachtsbäume gedruckt werden. Allerdings sind die Mitarbeiter dort mit dem Problem, Bäume zu zeichnen völlig überfordert. Für eine effiziente Lösung verspricht die Firma Ihnen lebenslang Gratisgrußkarten.

Da der schärfste Konkurrent von "WorldGreet Inc." bereits Weihnachtskarten mit vollständigen Binärbäumen bedruckt, muss die neue Grußkarte natürlich besser sein. Es sollen nämlich vollständige *Tertiärbäume* gedruckt werden, d.h. alle inneren Knoten haben drei Kinder und alle Blätter liegen in der gleichen Tiefe. Abbildung 1 zeigt einen vollständigen Tertiärbaum der Tiefe 3. Die Zeichenfläche der Grußkarten ist ein gleichseitiges Dreieck, das mit einem Dreiecksgitter überzogen ist, so dass Knoten nur auf Gitterpunkten platziert werden können, siehe Abbildung 2.

bitte umblättern

- (a) Sie denken natürlich sofort an Ihre Vorlesung “Geometrische Graphen und Arrangements” und erinnern sich an das Verfahren von Schnyder zum Zeichnen von planaren Graphen. Dazu muss der Graph allerdings dreifach zusammenhängend sein. Überlegen Sie sich, wie Sie den Baum zu einem dreifach zusammenhängenden planaren Graphen erweitern können. Wie groß ist dann das benötigte Gitter für die Zeichnung bezüglich der Anzahl der Baumknoten?
- (b) Mit diesem Ergebnis sind Sie aber noch nicht zufrieden und es packt Sie der Ehrgeiz. Überlegen Sie sich ein Verfahren zum geradlinigen Zeichnen von vollständigen Tertiärbäumen auf Dreiecksgitter, das einen im O -Kalkül echt kleineren Platzbedarf hat und begründen Sie Ihre Aussage.
- (c) Letztendlich hat eine Marktstudie ergeben, dass sich die Empfänger der Grußkarten über einen Tertiärbaum der Tiefe 3 am meisten freuen. Ihre tollen Ideen für allgemeine Tertiärbäume werden einfach verworfen und Sie sollen bloß noch einen Baum der Tiefe 3 (Abbildung 1) in ein möglichst kleines Dreiecksgitter zeichnen. Welche Seitenlänge benötigt Ihr Dreiecksgitter?

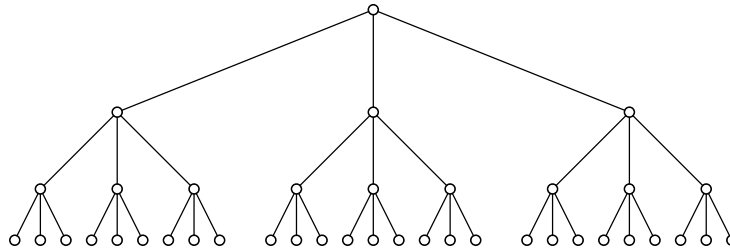


Abbildung 1: Tertiärbaum der Tiefe 3

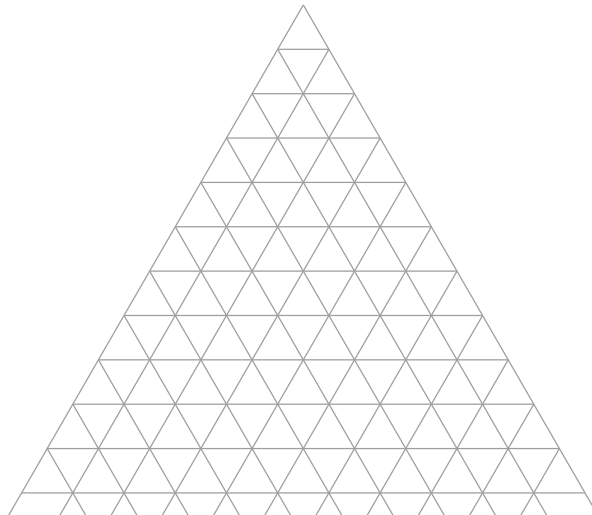


Abbildung 2: Dreiecksgitter

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!