UNIVERSITÄT KARLSRUHE
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

6. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 23. Januar 2006, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 26. Januar 2006, Raum 301, 14:00 Uhr

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Jede Zeichnung eines Graphen G mit n Knoten und m Kanten hat mindestens $m - 3n + 6$ Kantenkreuzungen.

Aufgabe 2

Das Kreuzungslemma liefert für einen Graphen G mit n Knoten und $m \geq 4n$ Kanten eine untere Schranke der Größenordnung $\Omega(m^3/n^2)$ für die Kreuzungszahl $\mathrm{cr}(G)$.

Diese Schranke ist scharf in folgendem Sinne: Seien $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ die Knoten eines konvexen n-Ecks. Zeigen Sie, dass für den geometrischen Graphen G_k mit dieser Knotenmenge und der Kantenmenge $\{v_i v_j \mid i < j \leq i + k \pmod n\}$, gilt

$$\mathrm{cr}(G_k) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{m^3}{n^2}.$$

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Graphen, die eine k-beschränkte Zeichnung besitzen ($k = 0, 1, 2$), höchstens $(k + 3)(n - 2)$ Kanten haben. Zeigen Sie, dass die Schranke für $k = 1, 2$ optimal ist:

(a) Geben Sie für $k = 1$ und für $k = 2$ eine k-beschränkte Zeichnung eines Graphen mit $n = 8$ bzw. $n = 20$ Knoten und $m = (k + 3)(n - 2)$ Kanten an.

(b) Konstruieren Sie für $k = 1, 2$ jeweils eine unendliche Folge von k-beschränkten Graphen mit $m = (k + 3)(n - 2)$ Kanten.

Aufgabe 4

Ähnlich dem Satz von Szemerédi–Trotter für Inzidenzen zwischen Punkten und Geraden kann man auch Inzidenzen zwischen Punkten und Kreisen betrachten. Es bezeichne $I_{\mathrm{uc}}(n, m)$ die maximale Anzahl von Inzidenzen zwischen n Punkten und m Einheitskreisen in der Ebene.

Zeigen Sie mit Hilfe des Kreuzungslemmas, dass gilt

$$I_{\mathrm{uc}}(n, n) \in O(n^{4/3}).$$

Betrachten Sie dazu für ein Arrangement mit maximaler Anzahl von Inzidenzen den topologischen Graphen, dessen Knotenmenge durch die n Punkte gegeben ist und dessen (Multi-)Kantenmenge durch die Kreisbögen zwischen Punkten auf den n Einheitskreisen gegeben ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass das Kreuzungslemma nur für *einfache* Graphen gilt und entfernen Sie daher vor dessen Verwendung ggf. Schlingen und Multikanten.