Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 5

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 08/09

Ausgabe 16. Dezember 2008
Abgabe 13. Januar 2009, 15:30 Uhr (im Kasten vor Zimmer 319, Informatik-Hauptgebäude, 3. OG)

Bitte schreiben Sie nur Ihren Namen und keine Matrikelnummer auf Ihr Übungsblatt. Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Algorithmus von De Pina

Abbildung 1 zeigt den sogenannten *Peterson-Graph*. Ein aufspannender Baum des Graphen ist grau und fett hinterlegt. Alle Kantengewichte seien 3.

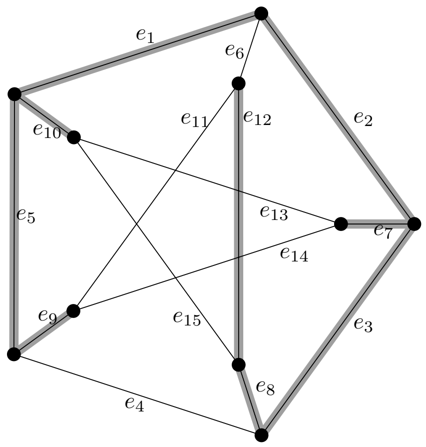


Abbildung 1: Der *Peterson-Graph*.

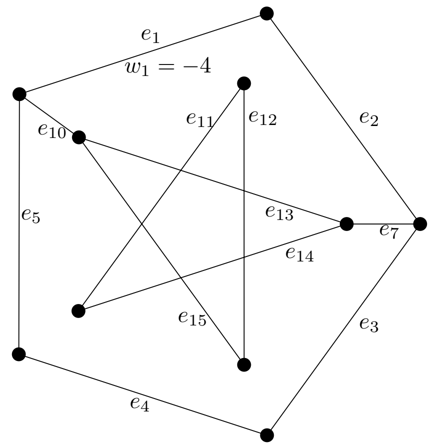
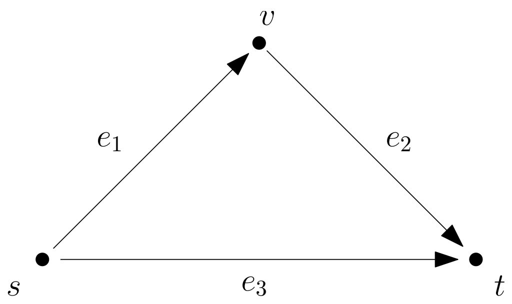


Abbildung 2: Variante von *Pete*.

(a) Führen Sie den Algorithmus von de Pina (algebraisch, Algorithmus 41 im Skript) auf dem Graphen in Abbildung 1 aus. Nutzen Sie den eingezeichneten Baum und halten sie sich an die Reihenfolge der Kanten entsprechend ihrer Nummerierung. Notieren Sie für jeden Schleifendurchlauf der Zeilen 3 bis 7 des Algorithmus k, C_k, S_k sowie alle S_i, die geändert werden, und die resultierende Basis.

(b) In Abbildung 2 ist $\text{Pete}_{6,8,9}$ zu sehen. Beachten Sie das negative Kantengewicht -4 von e_1. Alle anderen Gewichte seien hier 1. Raten Sie eine minimale Kreisbasis von $\text{Pete}_{6,8,9}$ und geben sie diese zusammen mit ihrem Gewicht an.

Problem 2: Flussnetzwerke und Lineare Programmierung



Für das obige Netzwerk seien die Kantenkapazitäten $c(e_1) := 1$, $c(e_2) := 2$ und $c(e_3) := 3$ gegeben.

(a) Stellen Sie das Maximalflussproblem für dieses Netzwerk als lineares Programm dar und bringen Sie es anschließend in die in der Vorlesung definierte Standardform.

(b) Stellen sie das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder sowie die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene graphisch dar. Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

(c) Führen Sie die Simplexmethode auf dem Polyeder durch: Starten Sie dazu im Nullpunkt. Welches sind die *verbessernden Kanten* von dort aus? Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese im Ausgangsgraphen? Welches ist der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?

Betrachten wir nun ein allgemeines Flussproblem.

$$\max \sum_{(s,i)\in E} x_{s,i} - \sum_{(i,s)\in E} x_{i,s}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} x_{i,j} &\le c_{i,j} \\ x_{i,j} &\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{i,j} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{j,i} = 0 \qquad \forall j \in V \setminus \{s,t\}$$

In Matrixform laute dies

$$\max\ a^T x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{I} & x & \le c \\ -\mathbb{I} & x & \le 0 \\ B & x & = 0\ . \end{array}$$

Dabei sei $\mathbb{I}$ eine Einheitsmatrix und B die Matrix, die sich aus den Flusserhaltungsbedingungen ergibt.

(e) Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?

(f) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

(g) Welche Dimension hat das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder im Allgemeinen?

(h) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren. (Hinweis: Ein Extrempunkt eines Polygons P kann nicht als Konvexkombination $\lambda \cdot s + (1 - \lambda) \cdot t$ zweier verschiedener Punkte von P dargestellt werden. Ein Punkt auf einer Kante von P kann nur als konvexe Kombination zweier verschiedener Punkte der selben Kante dargestellt werden.)

(i) Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

Problem 3: Euklidischer Handlungsreisender

Das *Problem des euklidischen Handlungsreisenden* ist folgendermaßen definiert: Gegeben seien n Punkte $p_i \in P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene mit Koordinaten (x_i, y_i) für jeden Punkt $p_i \in P$. Gesucht ist die kürzeste Rundtour, die alle Knoten mindestens einmal besucht. Rundtour bedeutet, dass die Tour an dem gleichen (frei wählbaren) Knoten beginnen und enden muss. Der Abstand zweier Punkte ist definiert durch den euklidischen Abstand der beiden Punkte.

Modellieren Sie das Problem als (gegebenenfalls) ganzahliges lineares Programm. Erklären Sie hierbei Zielfunktion, alle Variablen und alle Nebenbedingungen.

Problem 4: Dualität

Marco Stanley Fogg[1] ist ein Student, dem nach dem Tod seines Onkels lediglich dessen antiquarische Buchsammlung als finanzielle Rücklage bleibt. Um sein Studium möglichst lange durch den Verkauf der Bücher finanzieren zu können, versucht er, die Kosten für seine Ernährung auf ein Minimum zu beschränken, ohne dabei jedoch seine Gesundheit zu strapazieren. Nachdem er für eine Menge von m wichtigen Nährstoffen $1, \ldots, m$ jeweils den minimalen täglichen Bedarf b_i $(i = 1, \ldots, m)$ für einen Mann seines Alters und Gewichts in Erfahrung gebracht hat, sucht er den lokalen Supermarkt auf und ermittelt für eine Menge von n Produkten $1, \ldots, n$ jeweils den Preis pro Einheit c_j $(j = 1, \ldots, n)$ sowie den Anteil a_{ij} des Nährstoffes i $(i = 1, \ldots, m)$ am Produkt j $(j = 1, \ldots, n)$. Wieviele Einheiten der Produkte $1, \ldots, n$ muss Fogg jeweils kaufen, damit die Kosten des Einkaufs minimal sind und gleichzeitig der Minimalbedarf an Nährstoffen abgedeckt wird?

(a) Formulieren das beschriebene Optimierungsproblem als lineares Programm L.

(b) Formulieren Sie das zu L duale lineare Programm D. Geben Sie eine sinnvolle Interpretation des dualen Programms an und überlegen Sie sich dabei, wer ein Interesse daran haben könnte, das duale Programm zu optimieren.

[1] Figur aus dem Roman “Moon Palace” von Paul Auster, die Handlung wurde leicht abgeändert ;)