Übungen zu Algorithmentechnik Wintersemester 09/10

5. Sitzung

Thomas Pajor | 17. Dezember 2009

Wiederholung: Flüsse

Gegeben: Einfacher, gerichteter Graph $D = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ und dedizierte Knoten $s, t \in V$. Das Tupel (D, s, t, c) heißt *Netzwerk*.

Wiederholung: Flüsse

Gegeben: Einfacher, gerichteter Graph $D = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ und dedizierte Knoten $s, t \in V$. Das Tupel (D, s, t, c) heißt *Netzwerk*.

Fluss (vgl. Definition 4.1)

Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ heißt *s-t-Fluss*, wenn folgende Bedingungen von f erfüllt werden:

(i) Kapazitätsbedingung: Für alle $(u, v) \in E$ gilt

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

(ii) Flusserhaltungsbedingung: Für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$ gilt

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v, w).$$

Wiederholung: Flüsse

Fluss an Quelle/Senke (vgl. Lemma 4.2)

Ist f ein Fluss in einem Netzwerk (D, s, t, c) so gilt

$$\sum_{(s,v)\in E} f(s, v) - \sum_{(v,s)\in E} f(v, s) = \sum_{(v,t)\in E} f(v, t) - \sum_{(t,v)\in E} f(t, v).$$

Wiederholung: Flüsse

Fluss an Quelle/Senke (vgl. Lemma 4.2)

Ist f ein Fluss in einem Netzwerk (D, s, t, c) so gilt

$$\sum_{(s,v)\in E} f(s, v) - \sum_{(v,s)\in E} f(v, s) = \sum_{(v,t)\in E} f(v, t) - \sum_{(t,v)\in E} f(t, v).$$

Wert des Flusses (vgl. Definition 4.3)

Der Ausdruck

$$w(f) := \sum_{(s,v)\in E} f(s, v) - \sum_{(v,s)\in E} f(v, s)$$

heißt *Wert* des Flusses f.

Aufgabe 1

Flüsse

Sei (D, s, t, c) ein Netzwerk, in dem es zu einigen Kanten $(u, v) \in E$ auch Kanten $(v, u) \in E$ gibt. Weiterhin sei ein maximaler Fluss $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben.

Aufgabe 1

Flüsse

Sei (D, s, t, c) ein Netzwerk, in dem es zu einigen Kanten $(u, v) \in E$ auch Kanten $(v, u) \in E$ gibt. Weiterhin sei ein maximaler Fluss $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben.

Zeigen Sie, dass man dieses Flussproblem auf ein Flussproblem auf dem Netzwerk $D' = (V, E')$ überführen kann, wobei gilt:

E' ist maximale Teilmenge von E mit $(u, v) \in E' \Rightarrow (v, u) \notin E'$, so dass der Wert des Maximalflusses nicht verändert wird.

Aufgabe 2

Flüsse mit Knotenkapazitäten

Gegeben: Flussnetzwerk (D, s, t, c, γ) mit Kantenkapazitäten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und *Knotenkapazitäten* $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Aufgabe 2

Flüsse mit Knotenkapazitäten

Gegeben: Flussnetzwerk (D, s, t, c, γ) mit Kantenkapazitäten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und *Knotenkapazitäten* $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Eine Abbildung f ist ein Fluss, wenn sie neben den bekannten Eigenschaften für alle $v \in V$ auch die folgende *Knotenkapazitätsbedingung* erfüllt:

$$\sum_{(v,w) \in E} f(v, w) \leq \gamma(v) \qquad \text{wenn } v \neq t$$

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u, v) \leq \gamma(v) \qquad \text{wenn } v = t$$

Aufgabe 2

Flüsse mit Knotenkapazitäten

Gegeben: Flussnetzwerk (D, s, t, c, γ) mit Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ und *Knotenkapazitäten* $\gamma : V \to \mathbb{R}_0^+$.

Eine Abbildung f ist ein Fluss, wenn sie neben den bekannten Eigenschaften für alle $v \in V$ auch die folgende *Knotenkapazitätsbedingung* erfüllt:

$$\sum_{(v,w) \in E} f(v,w) \leq \gamma(v) \qquad \text{wenn } v \neq t$$

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u,v) \leq \gamma(v) \qquad \text{wenn } v = t$$

Zeigen Sie, dass die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk mit Kanten- **und** Knotenkapazitäten auf ein maximales Flussproblem in einem normalen (d. h. ohne Knotenkapazitäten) Netzwerk mit vergleichbarer Größe zurückgeführt werden kann.

Strömungen

Gegeben: Einfacher, gerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ und untere Schranken $l : E \to \mathbb{R}_0^+$.

Für alle Kanten $(u, v) \in E$ gelte außerdem $l(u, v) \leq c(u, v)$.

Strömungen

Gegeben: Einfacher, gerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ und untere Schranken $l : E \to \mathbb{R}_0^+$.

Für alle Kanten $(u, v) \in E$ gelte außerdem $l(u, v) \leq c(u, v)$.

Strömung

Eine Funktion $\beta : E \to \mathbb{R}_0^+$ heißt *Strömung*, wenn die Flusserhaltungsbedingung für *alle* Knoten erfüllt ist, das heißt

$$\sum_{(u,v)\in E} \beta(u, v) - \sum_{(v,w)\in E} \beta(v, w) = 0 \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Strömungen

Gegeben: Einfacher, gerichteter Graph $G = (V, E)$, Kantenkapazitäten $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und untere Schranken $l : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Für alle Kanten $(u, v) \in E$ gelte außerdem $l(u, v) \leq c(u, v)$.

Strömung

Eine Funktion $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt *Strömung*, wenn die Flusserhaltungsbedingung für *alle* Knoten erfüllt ist, das heißt

$$\sum_{(u,v)\in E} \beta(u, v) - \sum_{(v,w)\in E} \beta(v, w) = 0 \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Zulässige Strömung

Eine Strömung β heißt *zulässig*, wenn für alle $(u, v) \in E$ gilt, dass $l(u, v) \leq \beta(u, v) \leq c(u, v)$.

Aufgabe 3

Gegeben: Netzwerk (G, l, c) gemäß letzter Folie.

Aufgabe 3

Gegeben: Netzwerk (G, l, c) gemäß letzter Folie.

Ziel: Algorithmus, der entscheidet ob in (G, l, c) eine zulässige Strömung β existiert.

Aufgabe 3

Gegeben: Netzwerk (G, l, c) gemäß letzter Folie.

Ziel: Algorithmus, der entscheidet ob in (G, l, c) eine zulässige Strömung β existiert.

Reduktion auf ein Flussnetzwerk

Konstruiere Graph $G' = (V', E')$ mit Knoten $V' = V \cup \{s, t\}$ und Kanten $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in V\} \cup \{(v, t) \mid v \in V\}$.

Aufgabe 3

Gegeben: Netzwerk (G, l, c) gemäß letzter Folie.

Ziel: Algorithmus, der entscheidet ob in (G, l, c) eine zulässige Strömung β existiert.

Reduktion auf ein Flussnetzwerk

Konstruiere Graph $G' = (V', E')$ mit Knoten $V' = V \cup \{s, t\}$ und Kanten $E' = E \cup \{(s, v) \mid v \in V\} \cup \{(v, t) \mid v \in V\}$.

Für die Kapazitäten $c' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ gilt:

$$c'(u, v) := c(u, v) - l(u, v) \qquad \text{für alle } (u, v) \in E$$

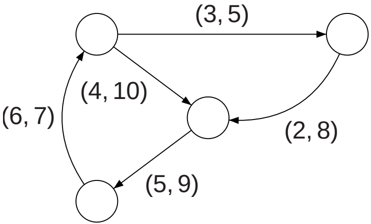
$$c'(s, v) := \sum_{(u,v) \in E} l(u, v) \qquad \text{für alle } v \in V \quad \text{(Mindestzufluss)}$$

$$c'(v, t) := \sum_{(v,w) \in E} l(v, w) \qquad \text{für alle } v \in V \quad \text{(Mindestabfluss)}$$

Aufgabe 3

Aufgabe

(a) Konstruieren Sie zu folgendem Graphen G den Graphen G'.



Aufgabe 3

Aufgabe

(a) Konstruieren Sie zu folgendem Graphen G den Graphen G'.

(b) Zeigen Sie: Ist $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ eine beliebige Funktion, dann gilt für $f' : E' \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$f'(u,v) := f(u,v) - l(u,v) \qquad \text{für alle } (u,v) \in E \qquad (1)$$

$$f'(u,v) := c'(u,v) \qquad \text{für alle } (u,v) \in E' \setminus E \qquad (2)$$

für jeden Knoten $v \in V$, dass

$$\sum_{(v,w)\in E'} f'(v,w) = \sum_{(v,w)\in E} f(v,w)$$

und

$$\sum_{(u,v)\in E'} f'(u,v) = \sum_{(u,v)\in E} f(u,v).$$

Aufgabe 3

Karlsruhe Institute of Technology

Aufgabe

(c) Zeigen Sie: In G existiert genau dann eine bezüglich l und c zulässige Strömung β, wenn in G' der maximale s-t-Fluss f den Wert

$$w(f) = \sum_{(u,v)\in E} l(u,v)$$

besitzt.

Aufgabe 3

Aufgabe

(c) Zeigen Sie: In G existiert genau dann eine bezüglich l und c zulässige Strömung β, wenn in G' der maximale s-t-Fluss f den Wert

$$w(f) = \sum_{(u,v) \in E} l(u,v)$$

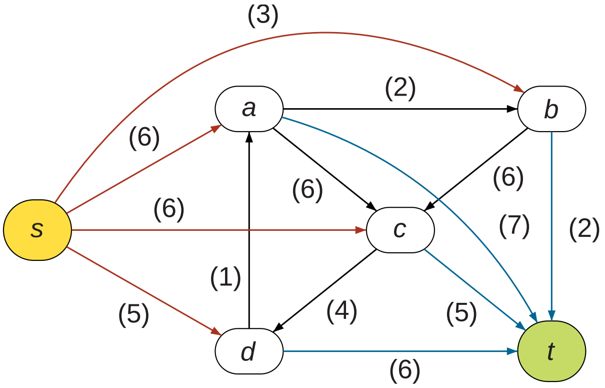
besitzt.

(d) Bestimmen Sie eine zulässige Strömung in dem Graphen aus Aufgabe (a).

Berechnen Sie dazu einen maximalen Fluss in G' den Sie in Aufgabe (a) erhalten haben mit dem Algorithmus von Goldberg & Tarjan.

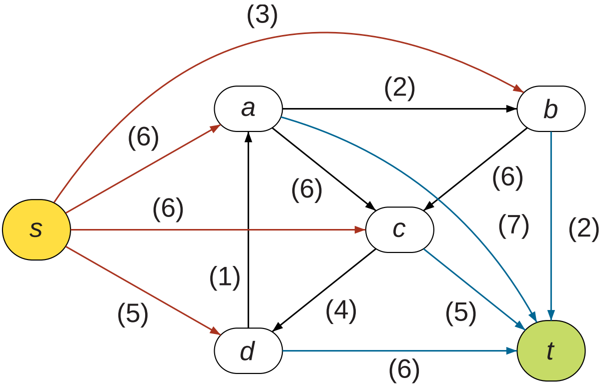
Aufgabe 3d: Lösung

Ausgangssituation:



Aufgabe 3d: Lösung

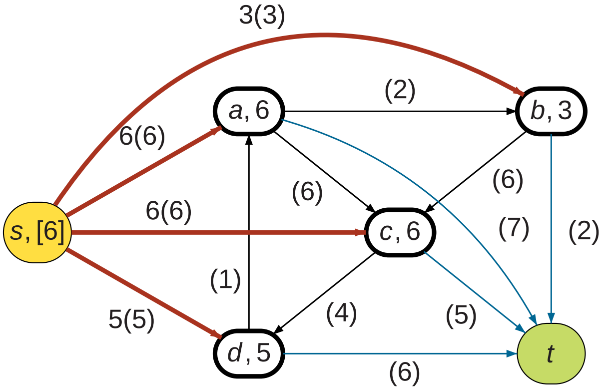
Ausgangssituation:



Schritt 1: $\textsc{Relabel}(s)$, $\textsc{Push}(s, v)$ mit $\Delta = c'(s, v)$ für alle $v \in V$

Aufgabe 3d: Lösung

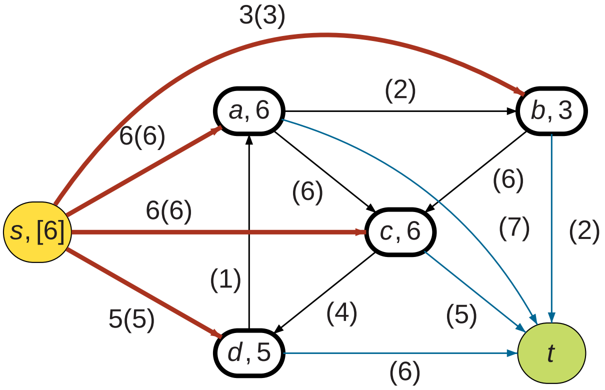
Situation nach Schritt 1:



Schritt 1: $\text{Relabel}(s)$, $\text{Push}(s, v)$ mit $\Delta = c'(s, v)$ für alle $v \in V$

Aufgabe 3d: Lösung

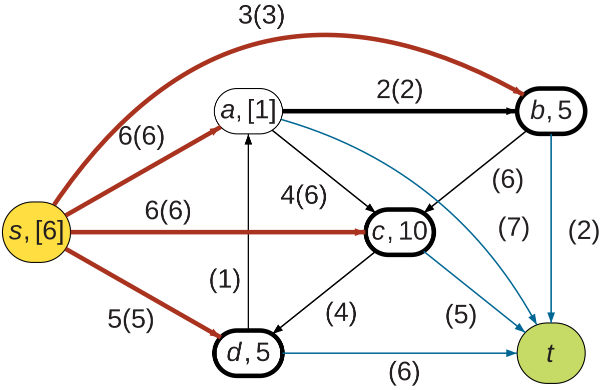
Situation nach Schritt 1:



Schritt 2: RELABEL(a), PUSH(a, b) mit $\Delta = 2$, PUSH(a, c) mit $\Delta = 4$.

Aufgabe 3d: Lösung

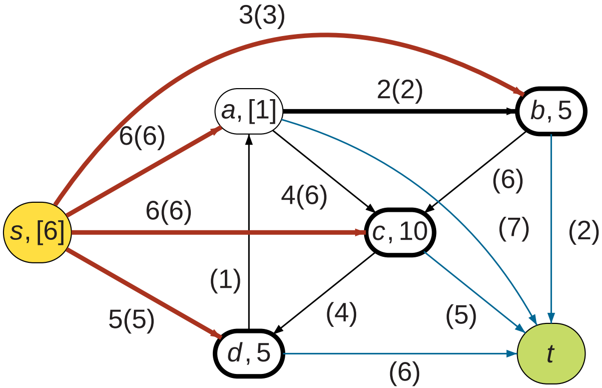
Situation nach Schritt 2:



Schritt 2: RELABEL(a), PUSH(a, b) mit $\Delta = 2$, PUSH(a, c) mit $\Delta = 4$.

Aufgabe 3d: Lösung

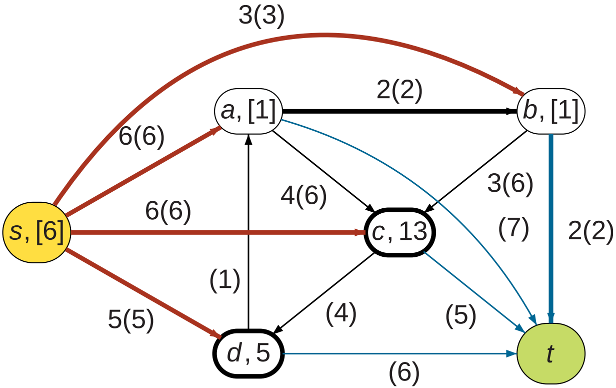
Situation nach Schritt 2:



Schritt 3: RELABEL(b), PUSH(b, t) mit $\Delta = 2$, PUSH(b, c) mit $\Delta = 3$.

Aufgabe 3d: Lösung

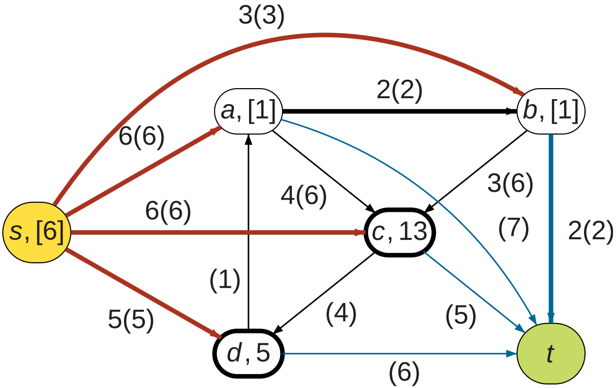
Situation nach Schritt 3:



Schritt 3: RELABEL(b), PUSH(b, t) mit $\Delta = 2$, PUSH(b, c) mit $\Delta = 3$.

Aufgabe 3d: Lösung

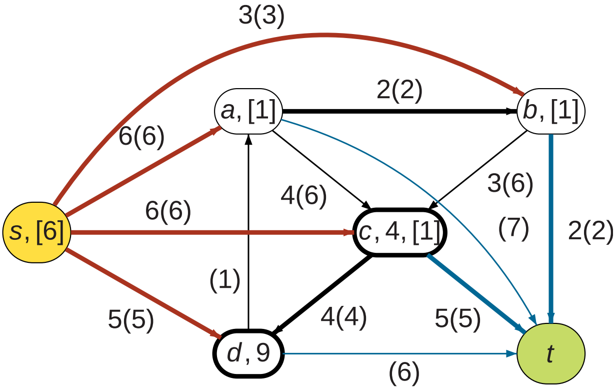
Situation nach Schritt 3:



Schritt 4: Relabel(c), Push(c, t) mit $\Delta = 5$, Push(c, d) mit $\Delta = 4$.

Aufgabe 3d: Lösung

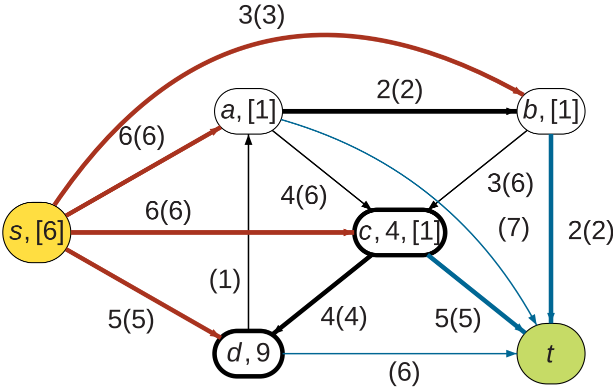
Situation nach Schritt 4:



Schritt 4: RELABEL(c), PUSH(c, t) mit $\Delta = 5$, PUSH(c, d) mit $\Delta = 4$.

Aufgabe 3d: Lösung

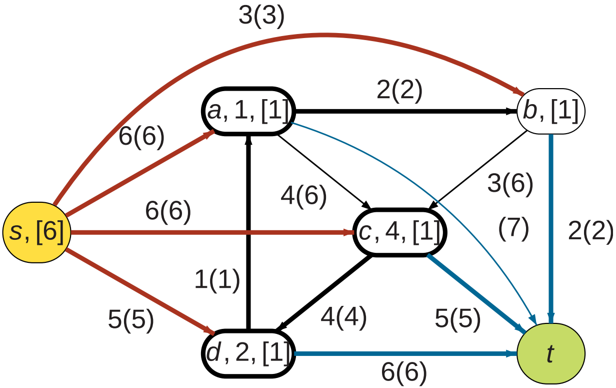
Situation nach Schritt 4:



Schritt 5: RELABEL(d), PUSH(d, t) mit $\Delta = 6$, PUSH(d, a) mit $\Delta = 1$.

Aufgabe 3d: Lösung

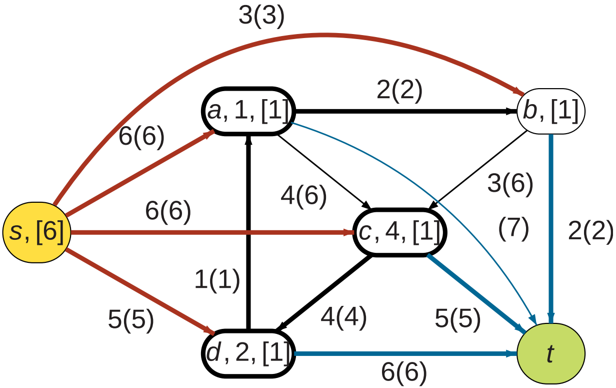
Situation nach Schritt 5:



Schritt 5: $\textsc{Relabel}(d)$, $\textsc{Push}(d, t)$ mit $\Delta = 6$, $\textsc{Push}(d, a)$ mit $\Delta = 1$.

Aufgabe 3d: Lösung

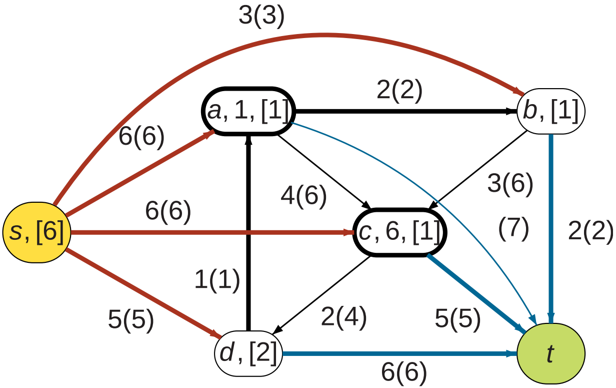
Situation nach Schritt 5:



Schritt 6: RELABEL(d), PUSH(d, c) mit $\Delta = 2$.

Aufgabe 3d: Lösung

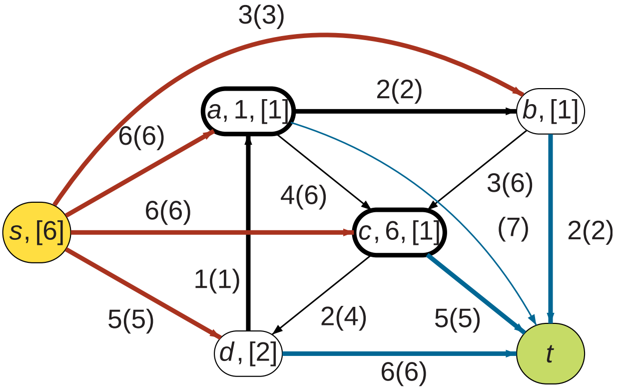
Situation nach Schritt 6:



Schritt 6: RELABEL(d), PUSH(d, c) mit $\Delta = 2$.

Aufgabe 3d: Lösung

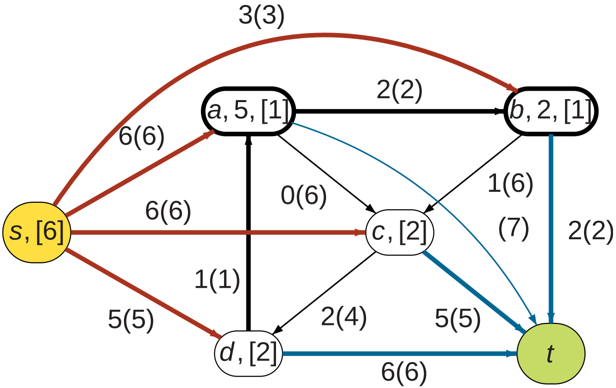
Situation nach Schritt 6:



Schritt 7: RELABEL(c), PUSH(c, a) mit $\Delta = 4$, PUSH(c, b) mit $\Delta = 2$.

Aufgabe 3d: Lösung

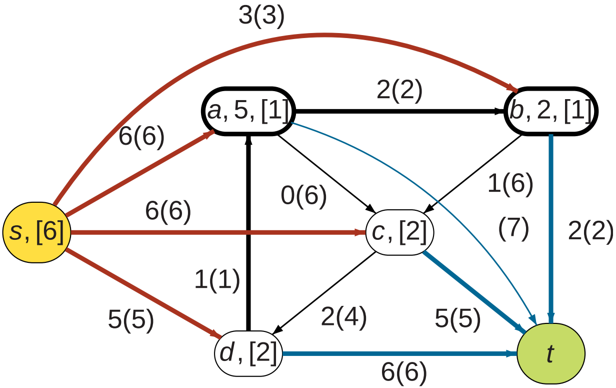
Situation nach Schritt 7:



Schritt 7: RELABEL(c), PUSH(c, a) mit $\Delta = 4$, PUSH(c, b) mit $\Delta = 2$.

Aufgabe 3d: Lösung

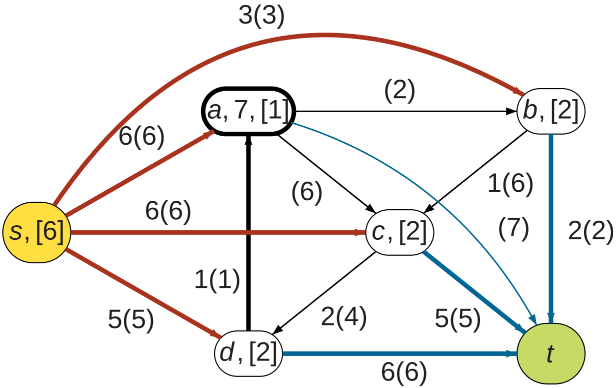
Situation nach Schritt 7:



Schritt 8: $\textsc{Relabel}(b)$, $\textsc{Push}(b, a)$ mit $\Delta = 2$.

Aufgabe 3d: Lösung

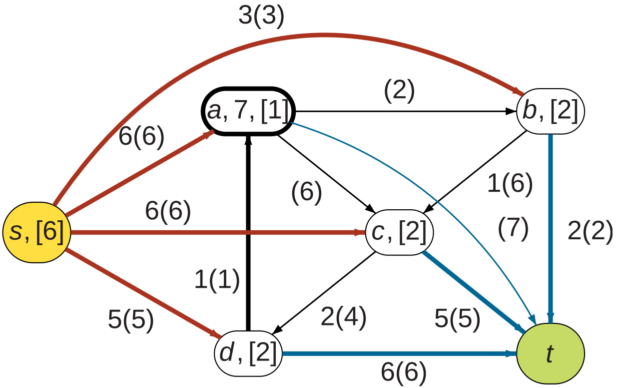
Situation nach Schritt 8:



Schritt 8: RELABEL(b), PUSH(b, a) mit $\Delta = 2$.

Aufgabe 3d: Lösung

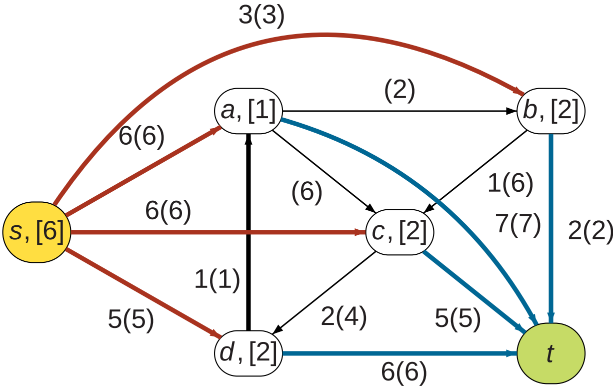
Situation nach Schritt 8:



Schritt 9: PUSH(a, t) mit $\Delta = 7$.

Aufgabe 3d: Lösung

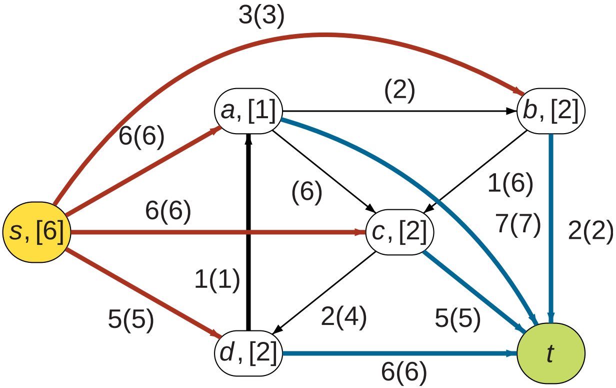
Endsituation:



Schritt 9: $\text{P}\textsc{ush}(a, t)$ mit $\Delta = 7$.

Aufgabe 3d: Lösung

Endsituation:



Es ist $w(f) = 20 = \sum_{(u,v)\in E} l(u,v) \Rightarrow \exists$ zulässige Strömung β in G.

Aufgabe 3d: Lösung

Mit $\beta(u, v) := f(u, v) + l(u, v)$ für alle $(u, v) \in E$ erhält man die zulässige Strömung β wie folgt: