Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 13.01.2011

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Organisatorisches

- Klausuranmeldung ab jetzt möglich
- **Anmeldeschluss: 04.02.2011**
- Anmeldung über Selbstbedienungsfunktion für Studierende

Typ–2 / Kontextfreie Grammatiken

Grammatiken, ausschließlich mit Ableitungsregeln der Form

$$A \to v \quad \text{mit } A \in V \text{ und } v \in (V \cup \Sigma)^*$$

Typ–2 Grammatiken: Beispiel 1

Die Sprache

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

Typ–2 Grammatiken: Beispiel 1

Die Sprache

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

wird erzeugt durch die Grammatik

$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ R &= \{S \to 01 \mid 0S1\}\ . \end{aligned}$$

Typ–2 Grammatiken: Beispiel 2

Sei $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$ die Sprache der Palindrome über $\{0,1\}$.

Es gilt:

1. $0, 1, \varepsilon$ sind Palindrome
2. falls w Palindrom, so auch $0w0$ und $1w1$
3. alle Palindrome lassen sich durch endliche viele Anwendungen von (1.) und (2.) erzeugen

Typ–2 Grammatiken: Beispiel 2

Sei $L = \left\{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R \right\}$ die Sprache der Palindrome über $\{0,1\}$.

Es gilt:

1. $0, 1, \varepsilon$ sind Palindrome
2. falls w Palindrom, so auch $0w0$ und $1w1$
3. alle Palindrome lassen sich durch endliche viele Anwendungen von (1.) und (2.) erzeugen

Zugehörige kontextfreie Grammatik:

$$\begin{array}{rcl} V & = & \{S\} \\ \Sigma & = & \{0,1\} \\ R & = & \{S \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 1, \\ & & \quad S \rightarrow 0S0 \mid 1S1\} \end{array}$$

Typ–2 Grammatiken: Beispiel 3

Sei L die Sprache aller $w \in \{0, 1\}^+$ bei denen die Anzahl der Nullen gleich der Anzahl der Einsen ist.

Typ–2 Grammatiken: Beispiel 3

Sei L die Sprache aller $w \in \{0,1\}^+$ bei denen die Anzahl der Nullen gleich der Anzahl der Einsen ist.

Setze

$$\begin{array}{rcl} V & = & \{S, A, B\} \\ \Sigma & = & \{0,1\} \\ R & = & \{S \to 0B \mid 1A, \\ & & \quad A \to 0 \mid 0S \mid 1AA, \\ & & \quad B \to 1 \mid 1S \mid 0BB\} \end{array}$$

Durch Induktion über die Länge der durch G erzeugten Wörter lässt sich beweisen, dass $L = L(G)$.

Syntaxbäume

Syntaxbäume visualisieren die Ableitung eines einzelnen Wortes.

- An der Wurzel eines Syntaxbaumes steht das Startsymbol.
- Jeder innere Knoten enthält eine Variable.
- Die Blätter sind Symbole aus Σ oder ε.
- Wenn ein innerer Knoten A als Nachfolger von links nach rechts $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V \cup \Sigma$ hat, so muss $A \to \alpha_1 \ldots \alpha_r$ eine Ableitungsregel der Grammatik sein.

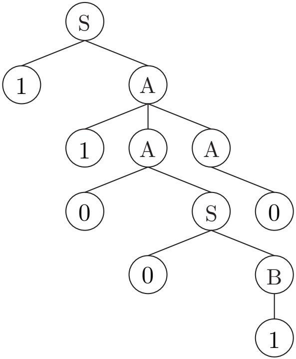
Syntaxbäume - Beispiel

Zu den Regeln

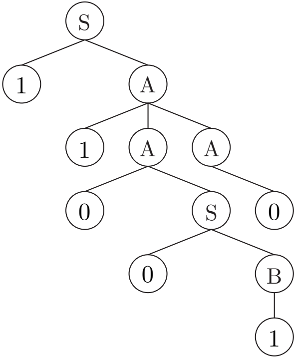
$$R = \{S \to 0B \mid 1A, A \to 0 \mid 0S \mid 1AA, B \to 1 \mid 1S \mid 0BB\}$$

betrachte die Ableitung

$$S \to 1A \to 11AA \to 11A0 \to 110S0 \to 1100B0 \to 110010$$



Syntaxbäume - Beispiel



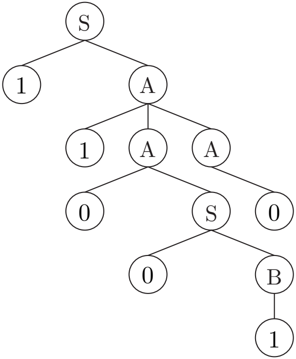
- Zu jeder Ableitung gehört genau ein Syntaxbaum
- Zu jedem Syntaxbaum gehören jedoch verschiedene Ableitungen des gleichen Wortes.

Syntaxbäume - Beispiel

$$R = \{S \to 0B \mid 1A,\, A \to 0 \mid 0S \mid 1AA,\, B \to 1 \mid 1S \mid 0BB\}$$

$$S \to 1A \to 11AA \to 110SA \to 1100BA \to 11001A \to 110010$$

$$S \to 1A \to 11AA \to 11A0 \to 110S0 \to 1100B0 \to 110010$$



Links/Rechtsableitung, Eindeutigkeit

Für Chomsky-2 Grammatiken gilt:

- Wegen der Kontextfreiheit ist die Reihenfolge, in der abgeleitet wird, für das Ergebnis unerheblich.

Eine **Linksableitung** (**Rechtsableitung**) ist eine Ableitung, bei der in jedem Schritt die linkeste (rechteste) Variable abgeleitet wird.

Eine kontextfreie Grammatik G heißt **eindeutig**, wenn es für jedes Wort $w \in L(G)$ genau einen Syntaxbaum gibt.

Eine kontextfreie Sprache L heißt **eindeutig**, wenn es eine eindeutige Grammatik G mit $L(G) = L$ gibt. Ansonsten heißt L **inhärent mehrdeutig**.

Beispiel

Die Sprache

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

erzeugt durch die Grammatik

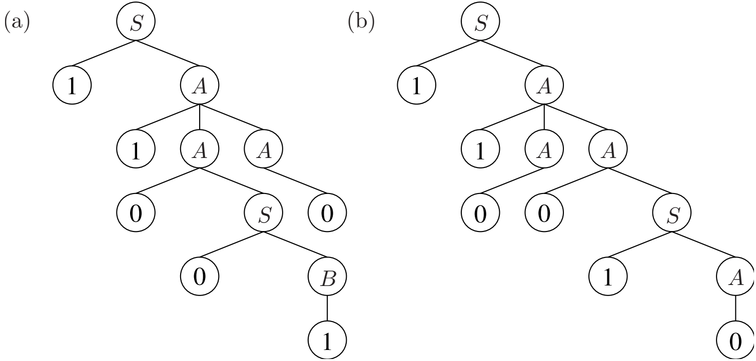
$$\begin{aligned} V &= \{S\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ R &= \{S \to 01 \mid 0S1\}\ . \end{aligned}$$

ist eindeutig.

Die Sprache gegeben durch die Regeln

$$R = \{S \to 0B \mid 1A, A \to 0 \mid 0S \mid 1AA, B \to 1 \mid 1S \mid 0BB\}$$

ist nicht eindeutig.



Chomsky-Normalform

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Chomsky–Normalform**, wenn alle Regeln von der Form:

$$A \to BC \qquad \text{oder} \qquad A \to a$$

sind, mit $A, B, C \in V$ und $a \in \Sigma$.

$$A \to BC \qquad \text{oder} \qquad A \to a$$

- Grammatiken in Chomsky–Normalform können also nicht das Wort ε erzeugen.

- Für kontextfreie Sprachen, die ε enthalten, läßt sich eine Grammatik leicht ergänzen durch die Regeln

$$S' \to \varepsilon \qquad \text{und} \qquad S' \to S$$

wobei S' ein neues Startsymbol zur Erzeugung von ε ist.

Satz:
Jede kontextfreie Grammatik, die nicht das leere Wort erzeugt, kann in eine Grammatik in Chomsky–Normalform überführt werden.

Beweis (konstruktiv):

- Wir geben eine Schritt–für–Schritt–Überführung der Regeln in Regeln in Normalform an.
- Großbuchstaben repräsentieren immer Nichtterminale
- Kleinbuchstaben repräsentieren immer Terminale

Wir veranschaulichen den Beweis an folgendem Beispiel:
Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{a, b\} \\ V &= \{A, B, C, D, E, S\} \end{aligned}$$

und der folgenden Regelmenge R:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid aAa \mid bBb \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow C \mid a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow CDE \mid \varepsilon \\ D &\rightarrow A \mid B \mid ab \\ E &\rightarrow B \end{aligned}$$

Schritt 1:

Ziel:

- Alle Regeln enthalten auf der rechten Seite nur Symbole aus V oder nur ein Symbol aus Σ.

Vorgehen:

- Ersetze dazu in allen rechten Seiten von Regeln Symbole aus $a \in \Sigma$ durch neue Variablen Y_a und füge die Regeln $Y_a \rightarrow a$ hinzu.

Schritt 1

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid aAa \mid bBb \mid \varepsilon \\
A &\rightarrow C \mid a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow CDE \mid \varepsilon \\
D &\rightarrow A \mid B \mid ab \\
E &\rightarrow B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid Y_aAY_a \mid Y_bBY_b \mid \varepsilon \\
A &\rightarrow C \mid a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow CDE \mid \varepsilon \\
D &\rightarrow A \mid B \mid Y_aY_b \\
E &\rightarrow B \\
Y_a &\rightarrow a \\
Y_b &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Schritt 2

Ziel:

- Alle rechten Seiten haben Länge ≤ 2.

Vorgehen:

- Sei $A \rightarrow B_1 \dots B_m$ Regel mit $m > 2$.
- Führe $m - 2$ neue Variablen $C_1, \dots, C_{m-2}$ ein, und ersetze die Regel

$$A \rightarrow B_1 \dots B_m$$

durch neue Regeln

$$\begin{array}{rcll} A & \rightarrow & B_1 C_1 & \\ C_i & \rightarrow & B_{i+1} C_{i+1} & \text{für } 1 \leq i \leq m-3 \\ C_{m-2} & \rightarrow & B_{m-1} B_m & \end{array}$$

Schritt 2

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid Y_aAY_a \mid Y_bBY_b \mid \varepsilon \\
A &\rightarrow C \mid a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow CDE \mid \varepsilon \\
D &\rightarrow A \mid B \mid Y_aY_b \\
E &\rightarrow B \\
Y_a &\rightarrow Y_a \\
Y_b &\rightarrow Y_b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid Y_aC_1 \mid Y_bC_2 \mid \varepsilon \\
A &\rightarrow C \mid a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow CC_3 \mid \varepsilon \\
D &\rightarrow A \mid B \mid Y_aY_b \\
E &\rightarrow B \\
C_1 &\rightarrow AY_a \\
C_2 &\rightarrow BY_b \\
C_3 &\rightarrow DE \\
Y_a &\rightarrow a \\
Y_b &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Schritt 3:

Ziel:

- Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

Vorgehen, Phase 1:
Finde die Menge V' aller Variablen A für die $A \overset{*}{\to} \varepsilon$ existiert:

- Es werden erst alle A mit $A \to \varepsilon$ in V' aufgenommen.
- Dann wird geprüft, ob neue Regeln $B \to \varepsilon$ entstehen, wenn man A in allen Regeln auf der rechten Seite A durch ε ersetzt.
- Ist dies der Fall, so werden die entsprechenden Variablen B in V' aufgenommen und genauso behandelt.
- Das Verfahren hört auf, wenn V' sich nicht mehr ändert

Schritt 3:

Ziel:

- Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

Vorgehen, Phase 1:
Finde die Menge V' aller Variablen A für die $A \xrightarrow{*} \varepsilon$ existiert:

- Bemerkung: In Phase 1 werden noch keine Regeln geändert
- Die Ersetzung ist also nur „testweise“
- Am Ende enthält V' alle Variablen A mit $A \xrightarrow{*} \varepsilon$.

Schritt 3:

Ziel:

- Es kommen keine Regeln $A \to \varepsilon$ vor.

Vorgehen, Phase 2: Ersetzung.

- Gegeben V' aus Phase 1
- Streiche alle Regeln $A \to \varepsilon$
- Für $A \to BC$ füge die zusätzliche Regel
  - $A \to B$ falls $C \in V'$
  - $A \to C$ falls $B \in V'$

  ein.
- (Die Regel $A \to BC$ wird nicht gestrichen).

- Initialisierung
  $V' = \{A \mid A \to \varepsilon\} = \{S, C\}$
- Erster Durchlauf liefert: A
  $\Rightarrow V' = \{A, C, S\}$
- Zweiter Durchlauf liefert: D
  $\Rightarrow V' = \{A, C, D, S\}$
- Dritter Durchlauf liefert nichts neues

$$
\begin{array}{rcl}
S & \to & A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \mid \varepsilon \\
A & \to & C \mid a \\
B & \to & b \\
C & \to & C C_3 \mid \varepsilon \\
D & \to & A \mid B \mid Y_a Y_b \\
E & \to & B \\
C_1 & \to & A Y_a \\
C_2 & \to & B Y_b \\
C_3 & \to & DE \\
Y_a & \to & a \\
Y_b & \to & b
\end{array}
$$

- Streiche ε-Produktionen
- Simuliere Ableitungen $A \xrightarrow{*} \varepsilon$ auf den verbleibenden Regeln $V' = \{A, C, D, S\}$

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\
A & \to & C \mid a \\
B & \to & b \\
C & \to & C C_3 \mid C_3 \\
D & \to & A \mid B \mid Y_a Y_b \\
E & \to & B \\
C_1 & \to & A Y_a \mid Y_a \\
C_2 & \to & B Y_b \\
C_3 & \to & D E \mid E \\
Y_a & \to & a \\
Y_b & \to & b
\end{array}
$$

Schritt 4.

Karlsruher Institut für Technologie

Ziel

- Die Grammatik enthält keine (Ketten-)Regeln der Form $A \to B$.
- Beispiel

$$
\begin{aligned}
A &\to B \mid C \\
B &\to C \\
C &\to c
\end{aligned}
$$

Schritt 4.

Ziel

- Die Grammatik enthält keine (Ketten-)Regeln der Form $A \to B$.

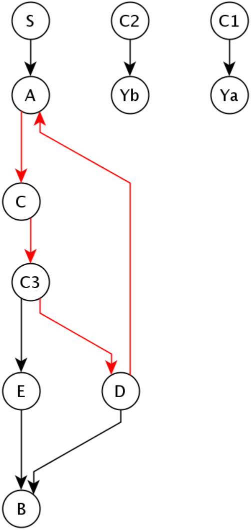
Vorgehen

- **Phase 1:** Finde alle Kreise $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to A_1$
  Ersetze alle A_i durch A_1
- **Phase 2:** Betrachte die Regeln der Form $A \to B$ in umgekehrt topologischer Reihenfolge
  - Für Regel $A \to B$ und jede Regel $B \to b$ füge Regel $A \to b$ hinzu
  - Lösche Regel $A \to B$

Topologische Sortierung der Regelmenge

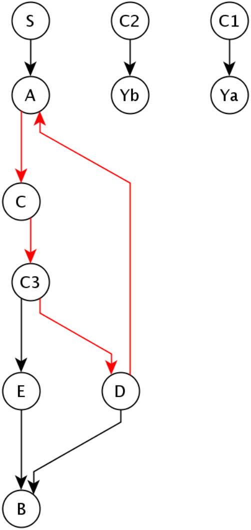
- $V_1, \ldots, V_k$ Menge von Variablen aus Kettenregeln
- $V_1, \ldots, V_k$ Topologisch sortiert, wenn gilt:
- $V_i \xrightarrow{*} V_j \Rightarrow i < j$
- Voraussetzung: Es gibt keine zyklischen Abhängigkeiten

Abhängigkeitsgraph



$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\
A &\rightarrow C \mid a \\
B &\rightarrow b \\
C &\rightarrow C C_3 \mid C_3 \\
D &\rightarrow A \mid B \mid Y_a Y_b \\
E &\rightarrow B \\
C_1 &\rightarrow A Y_a \mid Y_a \\
C_2 &\rightarrow B Y_b \\
C_3 &\rightarrow D E \mid E \\
Y_a &\rightarrow a \\
Y_b &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Schritt 4 - Phase 1



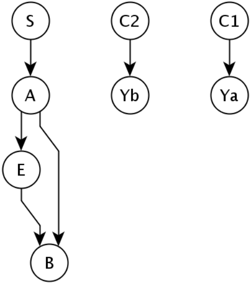
- Zykus $A \to C \to C_3 \to D \to A$
- $\Rightarrow A, C, C3, D$ äquivalent
- Entferne an Zyklus beteiligte Regeln
- Ersetze Vorkommen von C, C_3, D in allen Regeln durch A
- Lösche Regeln der Form $A \to A$

Zyklus: $A \to C \to C_3 \to D \to A$

$$
\begin{aligned}
S &\to A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\
A &\to C \mid a \\
B &\to b \\
C &\to C C_3 \mid C_3 \\
D &\to A \mid B \mid Y_a Y_b \\
E &\to B \\
C_1 &\to A Y_a \mid Y_a \\
C_2 &\to B Y_b \\
C_3 &\to D E \mid E \\
Y_a &\to a \\
Y_b &\to b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\to A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\
A &\to a \\
B &\to b \\
A &\to A A \\
A &\to B \mid Y_a Y_b \\
E &\to B \\
C_1 &\to A Y_a \mid Y_a \\
C_2 &\to B Y_b \mid Y_b \\
A &\to A E \mid E \\
Y_a &\to a \\
Y_b &\to b
\end{aligned}
$$

Schritt 4 - Phase 2



$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\
A &\rightarrow a \mid AA \mid B \mid Y_a Y_b \mid AE \mid E \\
B &\rightarrow b \\
E &\rightarrow B \\
C_1 &\rightarrow AY_a \mid Y_a \\
C_2 &\rightarrow BY_b \mid Y_b \\
Y_a &\rightarrow a \\
Y_b &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Topologische Sortierung: $S, A, E, B, C_2, Y_b, C_1, Y_a$

- Gehe in umgekehrter topologischer Sortierung vor
- Ersetze $A \to B$ durch $A \to \beta$, falls Regel $B \to \beta$ existiert
- Topologische Sortierung: $S, A, E, B, C_2, Y_b, C_1, Y_a$

$$
\begin{aligned}
S &\to A \mid Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\
A &\to a \mid AA \mid B \mid Y_a Y_b \mid AE \mid E \\
B &\to b \\
E &\to B \\
C_1 &\to AY_a \mid Y_a \\
C_2 &\to BY_b \mid Y_b \\
Y_a &\to a \\
Y_b &\to b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\to Y_a C_1 \mid Y_b C_2 \\
S &\to a \mid AA \mid b \mid Y_a Y_b \mid AE \mid b \\
B &\to b \\
E &\to b \\
C_1 &\to AY_a \mid a \\
C_2 &\to BY_b \mid b \\
Y_a &\to a \\
Y_b &\to b
\end{aligned}
$$

Sonderbehandlung von ε-Produktionen

- Grammatik ist nun in Chomsky-Normalform, aber
- G enthält Regel $S \to \varepsilon$ (haben wir entfernt)
- Erweitere Grammatik um Regeln $S' \to S$ und $S' \to \varepsilon$ für neues Startsymbol S'

Der CYK-Algorithmus

Satz:
Es gibt einen Algorithmus (den Cocke–Younger–Kasami Algorithmus), der für eine kontextfreie Grammatik G in Chomsky–Normalform und ein Wort $w \in \Sigma^*$ in Zeit $\mathcal{O}(|R| \cdot n^3)$ entscheidet, ob $w \in L(G)$, wobei $n = |w|$ und $|R|$ die Anzahl der Regeln von G ist.

Beweis - Beschreibung des CYK-Algorithmus

- Sei $w = w_1 \dots w_n$.
- Sei $V_{ij} \subseteq V$ so dass $A \xrightarrow{*} w_i \dots w_j$ impliziert $A \in V_{ij}$.

- Für alle $1 \leq i \leq j \leq n$ berechne die Menge $V_{ij} \subseteq V$.
- Dann ist $w \in L(G)$ genau dann, wenn $S \in V_{1n}$ ist.

- Die Tabelle der V_{ij} wird nach wachsendem $\ell := j - i$ aufgebaut, beginnend mit $\ell = 0$.
- Für $j - i = \ell > 0$ wird die Berechnung von V_{ij} systematisch auf zuvor berechnete V_{ik}, $V_{k+1\,j}$ mit $i \leq k < j$ zurückgeführt

Bemerkung

- Wir benutzen dynamische Programmierung.

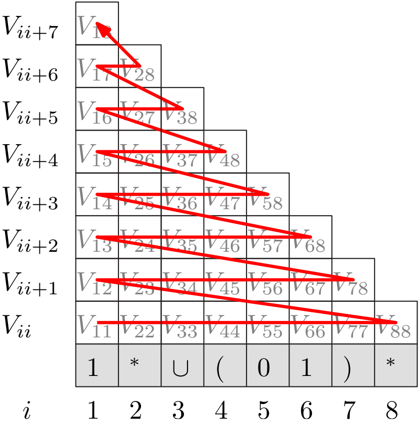
$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
&\quad\; SS \mid Y_(C_2 \mid \\
&\quad\; e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	V_{11}	V_{22}	V_{33}	V_{44}	V_{55}	V_{66}	V_{77}	V_{88}
	1	$*$	$\cup$	(	0	1	)	$*$
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
& SS \mid Y_(C_2 \mid \\
& e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$



Fall $\ell = 0$:

- Konstruiere die Mengen V_{ii}, d.h. alle $A \in V$ mit $A \xrightarrow{*} w_i$.
- Da G in Chomsky–Normalform ist, gilt $A \xrightarrow{*} w_i$ nur, wenn $(A \to w_i) \in R$.
- Die Berechnung von V_{ii} ist für alle $i \in \{1, \ldots n\}$ in $\mathcal{O}(|R|)$ möglich.

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & SY_* \mid SC_1 \mid \\
 & & SS \mid Y_(C_2 \mid \\
 & & e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 & \rightarrow & Y_\cup S \\
C_2 & \rightarrow & SY_) \\
Y_* & \rightarrow & * \\
Y_\cup & \rightarrow & \cup \\
Y_(& \rightarrow & (\\
Y_) & \rightarrow &)
\end{array}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	V_{11}	V_{22}	V_{33}	V_{44}	V_{55}	V_{66}	V_{77}	V_{88}
	1	*	$\cup$	(	0	1	)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & SY_* \mid SC_1 \mid \\
 & & SS \mid Y_(C_2 \mid \\
 & & e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 & \rightarrow & Y_\cup S \\
C_2 & \rightarrow & SY_) \\
Y_* & \rightarrow & * \\
Y_\cup & \rightarrow & \cup \\
Y_(& \rightarrow & (\\
Y_) & \rightarrow &)
\end{array}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	$*$	$\cup$	$($	0	1	$)$	$*$
i	1	2	3	4	5	6	7	8

Fall $\ell > 0$:

- Jede Ableitung von $w_i \dots w_j$ muss mit einer Regel der Form

$$A \to BC$$

beginnen, wobei ein $k \in \{i, \dots, j-1\}$ existiert mit

  - $B \xrightarrow{*} w_i \dots w_k$ und
  - $C \xrightarrow{*} w_{k+1} \dots w_j$.

Verfahren

- Speichere alle Mengen V_{rs} als Arrays der Länge $|V|$, in denen für jedes $A \in V$ markiert ist, ob $A \in V_{rs}$.
- **Berechnung von V_{ij}:**
  Überprüfe für jede Regel $(A \to BC) \in R$ und jedes k, ob

$$\begin{aligned} B &\xrightarrow{*} w_i \dots w_k \\ C &\xrightarrow{*} w_{k+1} \dots w_j \end{aligned}$$

  durch Ansehen der Stelle
  - B im Array zu V_{ik} und
  - C im Array zu $V_{k+1\ j}$.

Verfahren

- Speichere alle Mengen V_{rs} als Arrays der Länge $|V|$, in denen für jedes $A \in V$ markiert ist, ob $A \in V_{rs}$.

- **Berechnung von V_{ij}:**
  Überprüfe für jede Regel $(A \to BC) \in R$ und jedes k, ob

$$
\begin{aligned}
B &\xrightarrow{*} w_i \dots w_k \\
C &\xrightarrow{*} w_{k+1} \dots w_j
\end{aligned}
$$

  durch Ansehen der Stelle
  - B im Array zu V_{ik} und
  - C im Array zu $V_{k+1\ j}$.

Bemerkung

- Dies benötigt Aufwand in $\mathcal{O}(n \cdot |R|)$

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
&\quad\; SS \mid Y_(C_2 \mid \\
&\quad\; e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	V_{12}	V_{23}	V_{34}	V_{45}	V_{56}	V_{67}	V_{78}	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	*	$\cup$	(	0	1	)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
& SS \mid Y_(C_2 \mid \\
& e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	V_{13}	V_{24}	V_{35}	V_{46}	V_{57}	V_{68}		
V_{ii+1}	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	C_2	$\emptyset$	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	$*$	$\cup$	$($	0	1	$)$	$*$
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
&\quad\; SS \mid Y_(C_2 \mid \\
&\quad\; e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	V_{14}	V_{25}	V_{36}	V_{47}	V_{58}			
V_{ii+2}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_2	$\emptyset$		
V_{ii+1}	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	C_2	$\emptyset$	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	*	$\cup$	(	0	1	)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & SY_* \mid SC_1 \mid \\
 & & SS \mid Y_(C_2 \mid \\
 & & e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 & \rightarrow & Y_\cup S \\
C_2 & \rightarrow & SY_) \\
Y_* & \rightarrow & * \\
Y_\cup & \rightarrow & \cup \\
Y_(& \rightarrow & (\\
Y_) & \rightarrow &)
\end{array}$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	V_{15}	V_{26}	V_{37}	V_{48}				
V_{ii+3}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$			
V_{ii+2}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_2	$\emptyset$		
V_{ii+1}	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	C_2	$\emptyset$	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	*	$\cup$	(	0	1	)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
  &\quad\; SS \mid Y_(C_2 \mid \\
  &\quad\; e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	V_{16}	V_{27}	V_{38}					
V_{ii+4}	$\emptyset$	$\emptyset$	C_1	S				
V_{ii+3}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$			
V_{ii+2}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_2	$\emptyset$		
V_{ii+1}	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	C_2	$\emptyset$	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	*	$\cup$	(	0	1	)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
  & SS \mid Y_(C_2 \mid \\
  & e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	V_{17}	V_{28}						
V_{ii+5}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$					
V_{ii+4}	$\emptyset$	$\emptyset$	C_1	S				
V_{ii+3}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$			
V_{ii+2}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_2	$\emptyset$		
V_{ii+1}	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	C_2	$\emptyset$	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	*	$\cup$	(	0	1	)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
& SS \mid Y_(C_2 \mid \\
& e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	V_{18}							
V_{ii+6}	S	$\emptyset$						
V_{ii+5}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$					
V_{ii+4}	$\emptyset$	$\emptyset$	C_1	S				
V_{ii+3}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$			
V_{ii+2}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_2	$\emptyset$		
V_{ii+1}	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	C_2	$\emptyset$	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	$*$	$\cup$	$($	0	1	$)$	$*$
i	1	2	3	4	5	6	7	8

$w = 1^* \cup (01)^*$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow SY_* \mid SC_1 \mid \\
&\quad\; SS \mid Y_(C_2 \mid \\
&\quad\; e \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \\
C_1 &\rightarrow Y_\cup S \\
C_2 &\rightarrow SY_) \\
Y_* &\rightarrow * \\
Y_\cup &\rightarrow \cup \\
Y_(&\rightarrow (\\
Y_) &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

V_{ii+7}	S							
V_{ii+6}	S	$\emptyset$						
V_{ii+5}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$					
V_{ii+4}	$\emptyset$	$\emptyset$	C_1	S				
V_{ii+3}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$			
V_{ii+2}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	C_2	$\emptyset$		
V_{ii+1}	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	C_2	$\emptyset$	
V_{ii}	S	Y_*	$Y_\cup$	$Y_($	S	S	$Y_)$	Y_*
	1	*	$\cup$	(	0	1	)	*
i	1	2	3	4	5	6	7	8