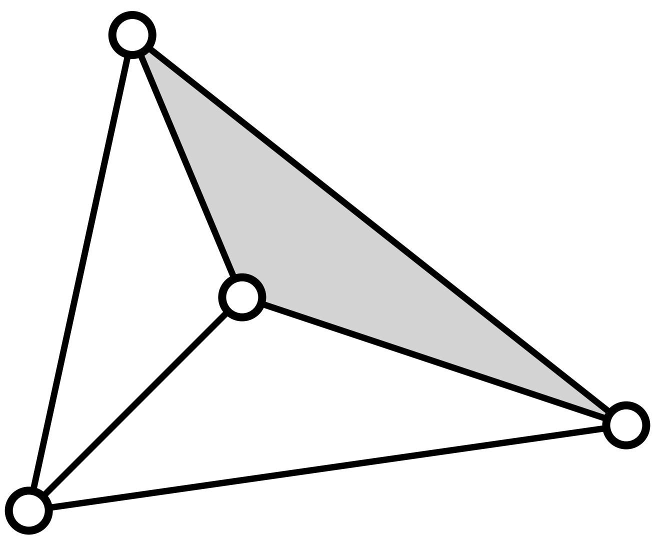
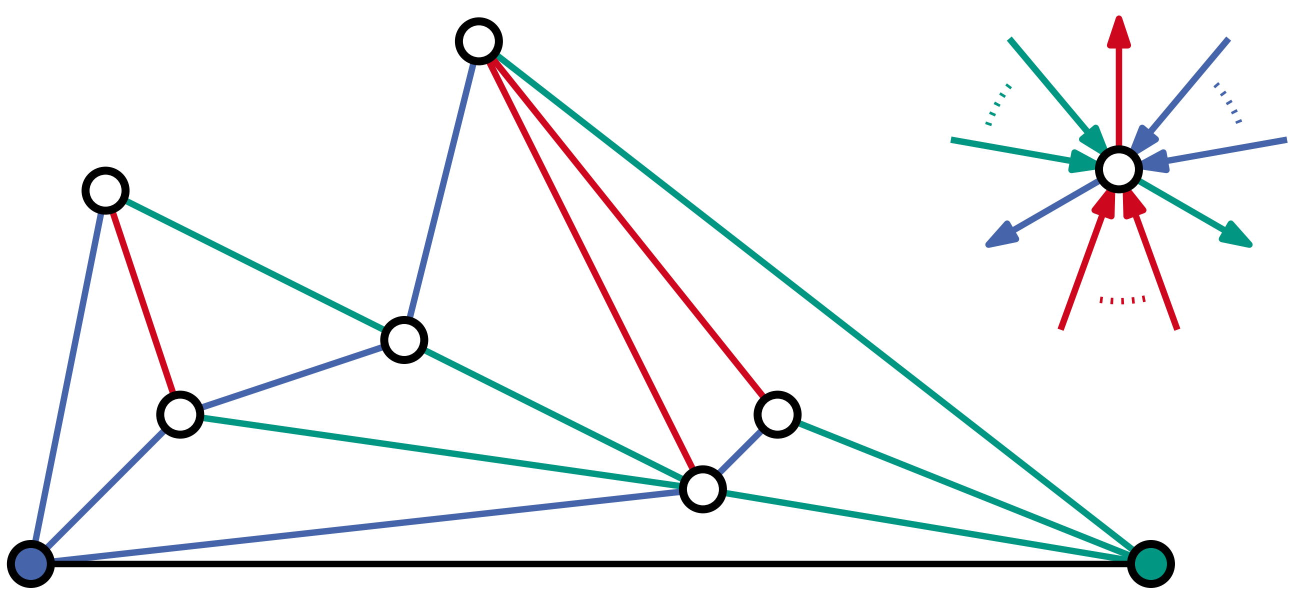
Sechste Übung

Algorithmen zu Visualisierung von Graphen
Inkrementelle Methoden

Thomas Bläsius

Institute of Theoretical Informatics
Karlsruhe Institute of Technology (KIT)





Aufgabe 1 – Baryzentrische Koordinaten

Sei $\Delta_{a,b,c}$ das Dreieck in der Ebene mit den Eckpunkten a, b und c. Für einen Punkt x sind (x_a, x_b, x_c) die baryzentrischen Koordinaten von x bezüglich $\Delta_{a,b,c}$ falls $x_a + x_b + x_c = 1$ und $x_a \cdot a + x_b \cdot b + x_c \cdot c = x$. Zeigen Sie:

(a) Für zwei Punkte x und y mit baryzentrischen Koordinaten (x_a, x_b, x_c) bzw. (y_a, y_b, y_c) gilt $x_a = y_a$ genau dann, wenn x und y auf einer Gerade liegen, die parallel zu der Dreiecksseite bc ist.

Aufgabe 1 – Baryzentrische Koordinaten

Sei $\Delta_{a,b,c}$ das Dreieck in der Ebene mit den Eckpunkten a, b und c. Für einen Punkt x sind (x_a, x_b, x_c) die baryzentrischen Koordinaten von x bezüglich $\Delta_{a,b,c}$ falls $x_a + x_b + x_c = 1$ und $x_a \cdot a + x_b \cdot b + x_c \cdot c = x$. Zeigen Sie:

(b) Ein Punkt x liegt innerhalb des Dreiecks $\Delta_{a,b,c}$ genau dann wenn jede baryzentrische Koordinate positiv ist.

Aufgabe 1 – Baryzentrische Koordinaten

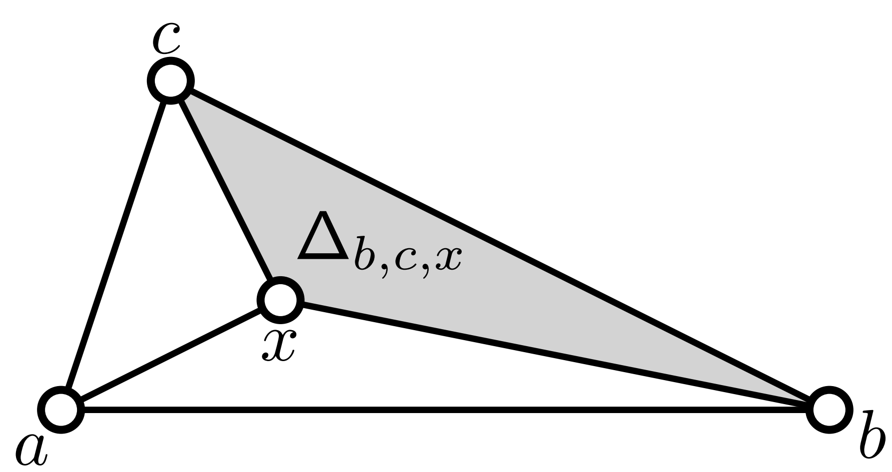
Sei $\Delta_{a,b,c}$ das Dreieck in der Ebene mit den Eckpunkten a, b und c. Für einen Punkt x sind (x_a, x_b, x_c) die baryzentrischen Koordinaten von x bezüglich $\Delta_{a,b,c}$ falls $x_a + x_b + x_c = 1$ und $x_a \cdot a + x_b \cdot b + x_c \cdot c = x$. Zeigen Sie:

(c) Sei x ein Punkt im Inneren von $\Delta_{a,b,c}$ mit baryzentrischen Koordinaten (x_a, x_b, x_c). Dann gelten die folgenden Gleichungen, wobei $A(\Delta)$ die Fläche eines Dreiecks Δ bezeichnet.

$$x_a = \frac{A(\Delta_{b,c,x})}{A(\Delta_{a,b,c})}$$

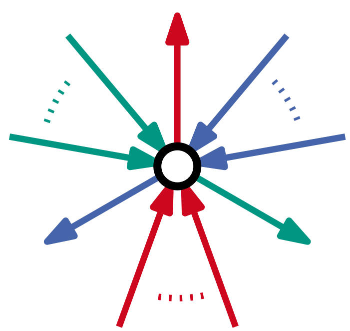
$$x_b = \frac{A(\Delta_{a,c,x})}{A(\Delta_{a,b,c})}$$

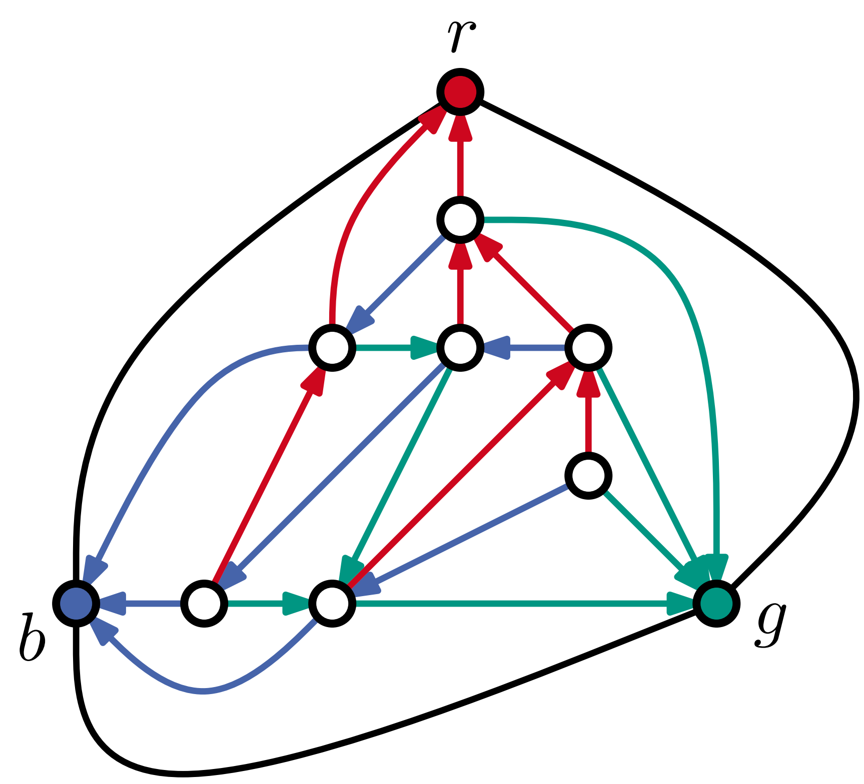
$$x_c = \frac{A(\Delta_{a,b,x})}{A(\Delta_{a,b,c})}$$



Aufgabe 2 – Facetten Zählen

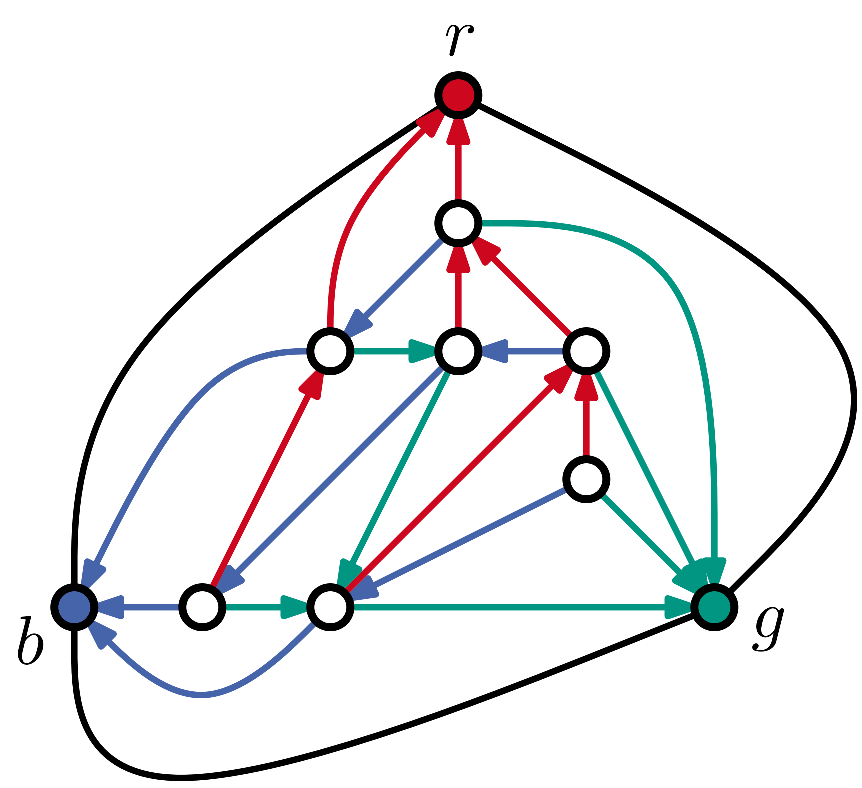
Führen Sie den „Facetten-Zähl-Algorithmus“ von Schnyder an unten stehendem Beispiel aus.





Facetten-Zähl-Algorithmus (Wiederholung)

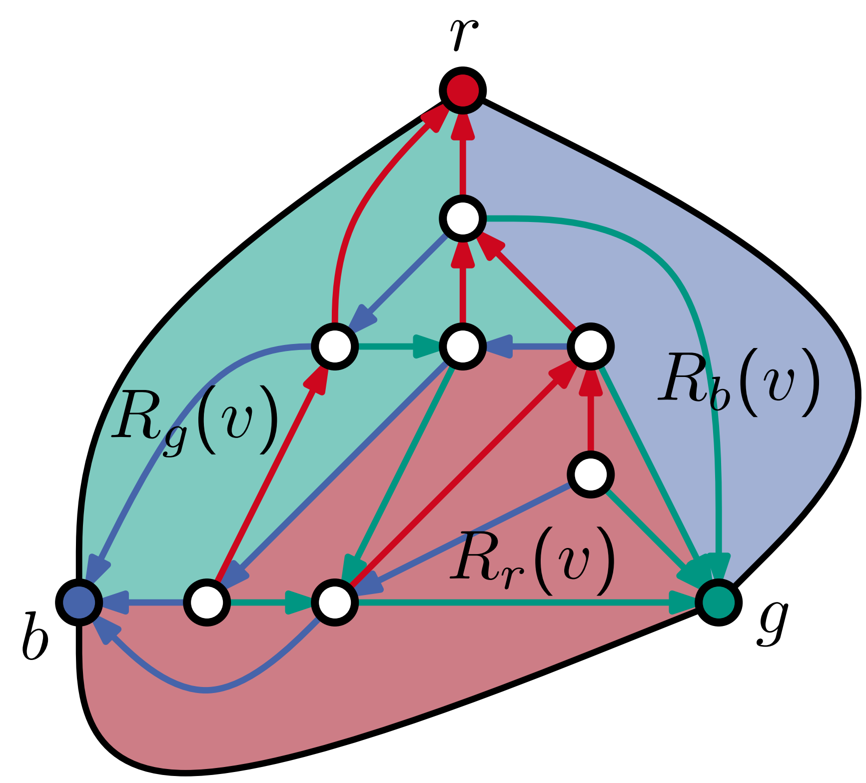
Der Algorithmus:



Facetten-Zähl-Algorithmus (Wiederholung)

Der Algorithmus:

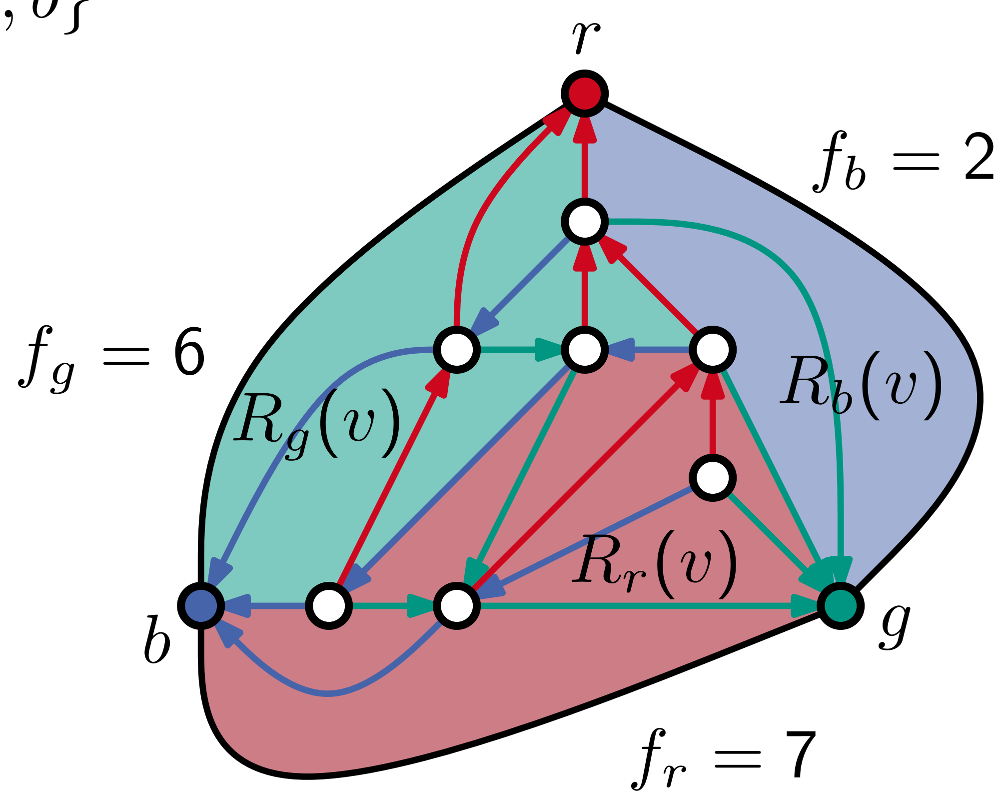
- Für jeden Knoten v zerlegen die eindeutigen Pfade zu r, g bzw. b den Graph in drei Regionen $R_r(v)$, $R_g(v)$ bzw. $R_b(v)$



Facetten-Zähl-Algorithmus (Wiederholung)

Der Algorithmus:

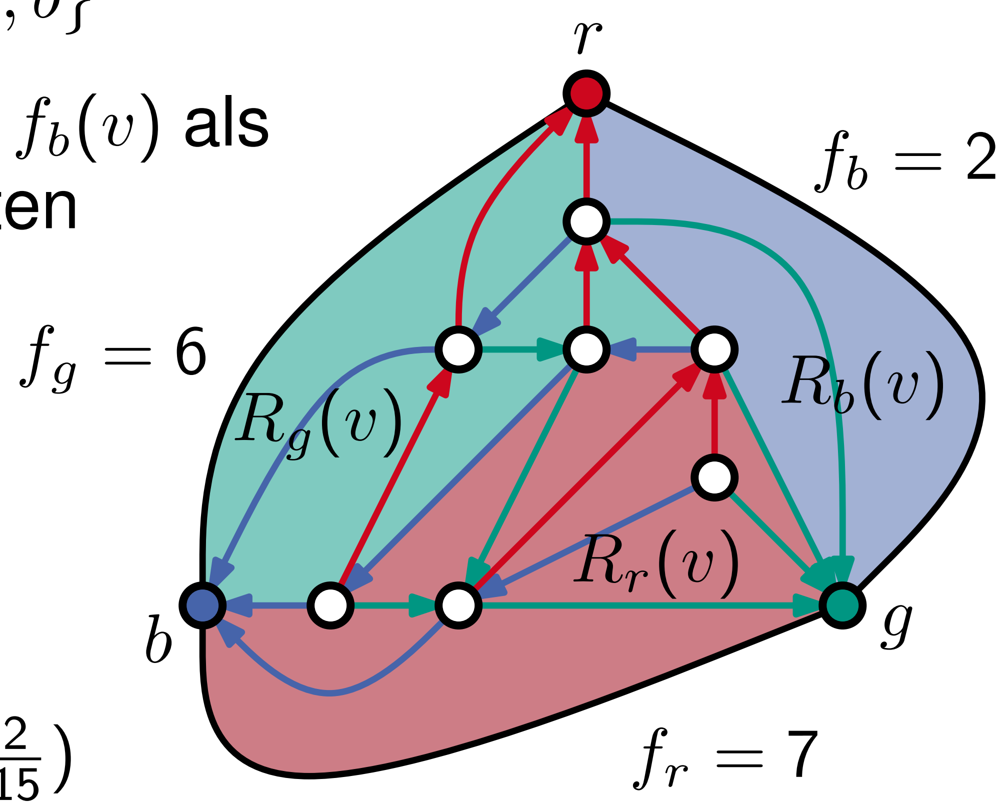
- Für jeden Knoten v zerlegen die eindeutigen Pfade zu r, g bzw. b den Graph in drei Regionen $R_r(v)$, $R_g(v)$ bzw. $R_b(v)$
- $f_i(v) = R_i(v)$ für $i \in \{r, g, b\}$



Facetten-Zähl-Algorithmus (Wiederholung)

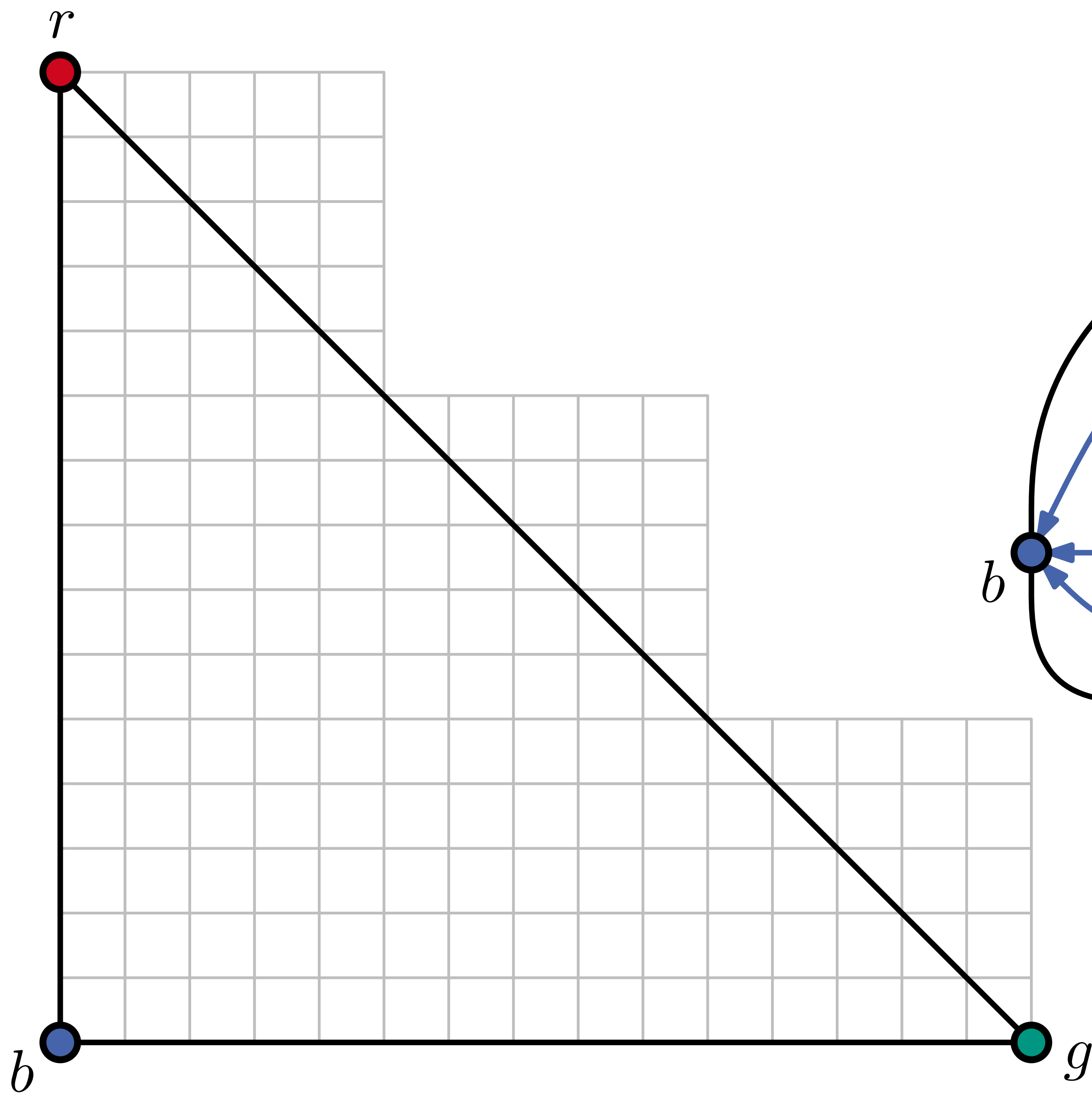
Der Algorithmus:

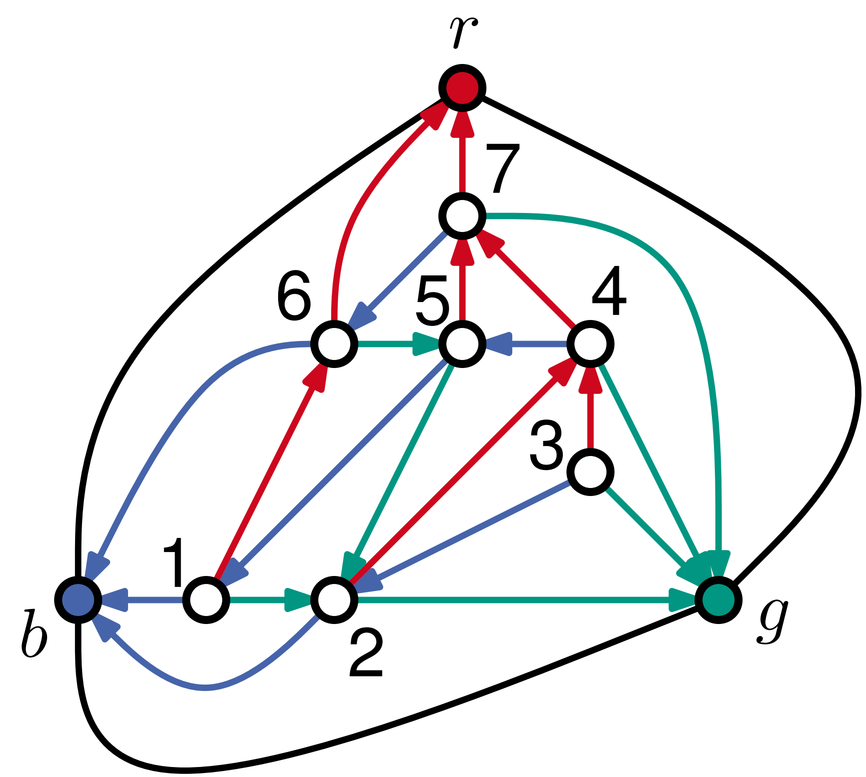
- Für jeden Knoten v zerlegen die eindeutigen Pfade zu r, g bzw. b den Graph in drei Regionen $R_r(v)$, $R_g(v)$ bzw. $R_b(v)$
- $f_i(v) = R_i(v)$ für $i \in \{r, g, b\}$
- Benutze $f_r(v)$, $f_g(v)$ und $f_b(v)$ als baryzentrische Koordinaten



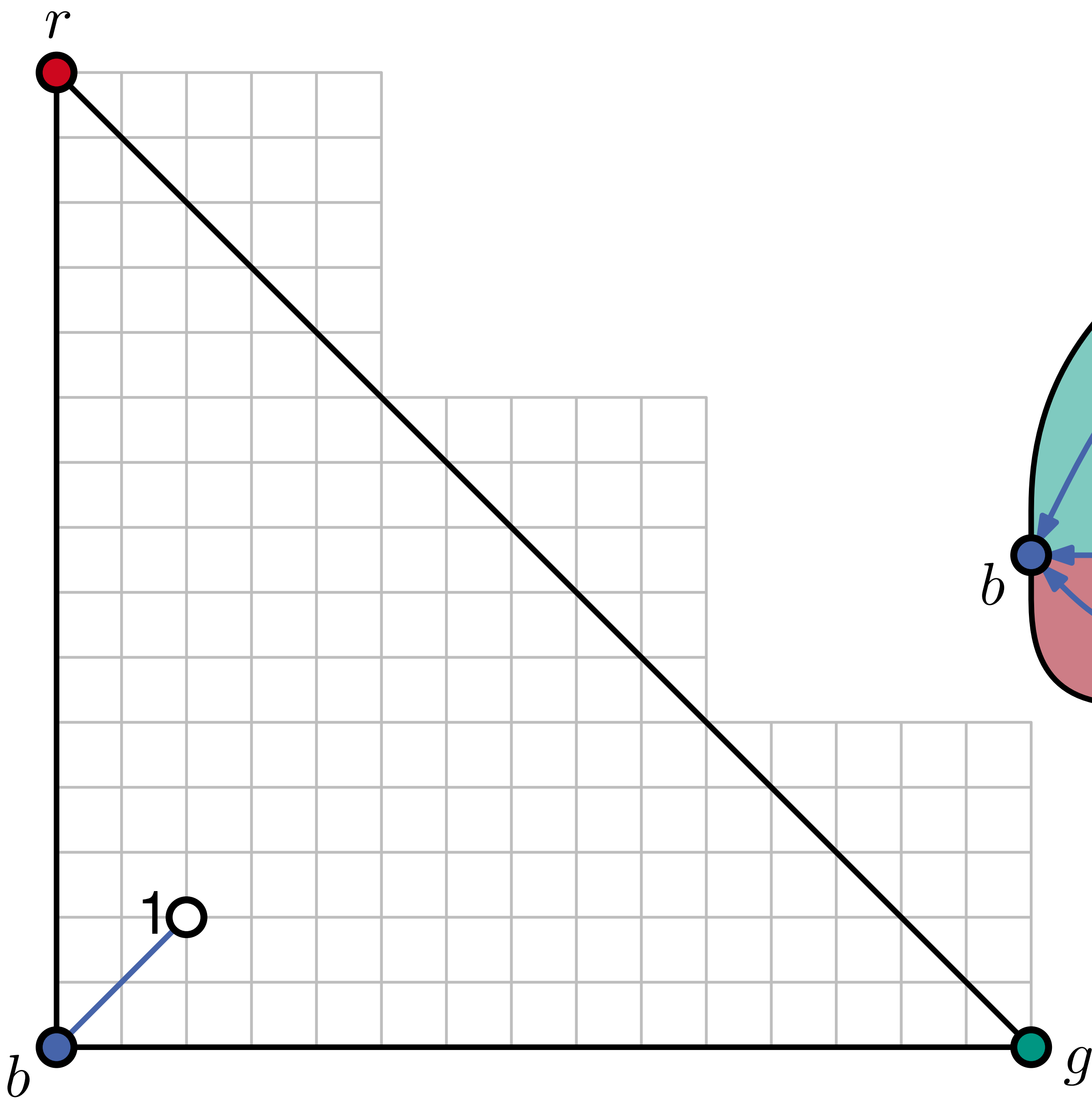
Koordinaten: $(\frac{7}{15}, \frac{6}{15}, \frac{2}{15})$

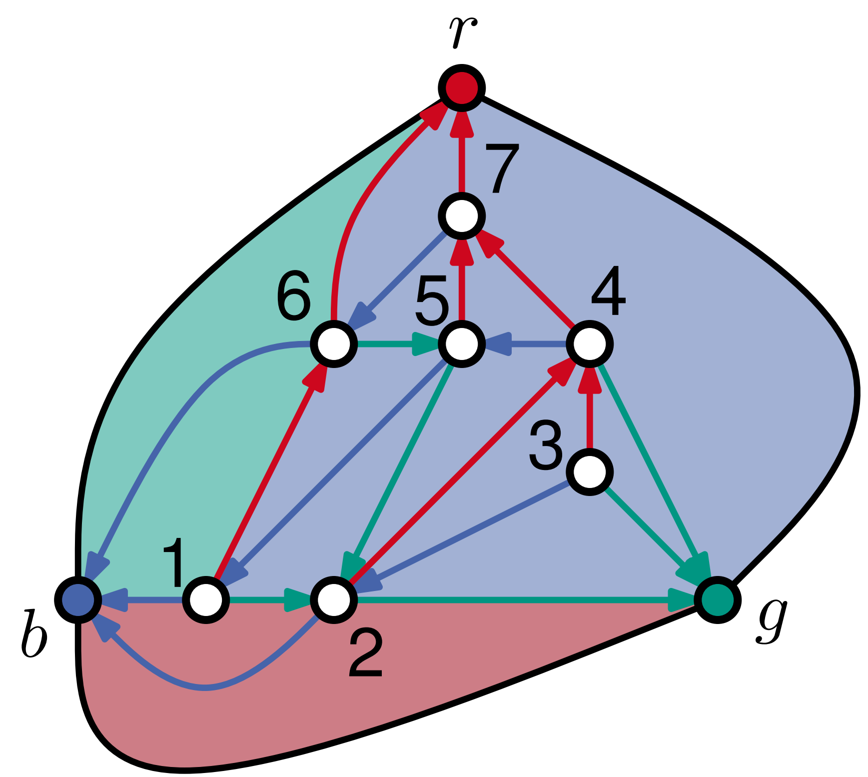
Facetten Zählen



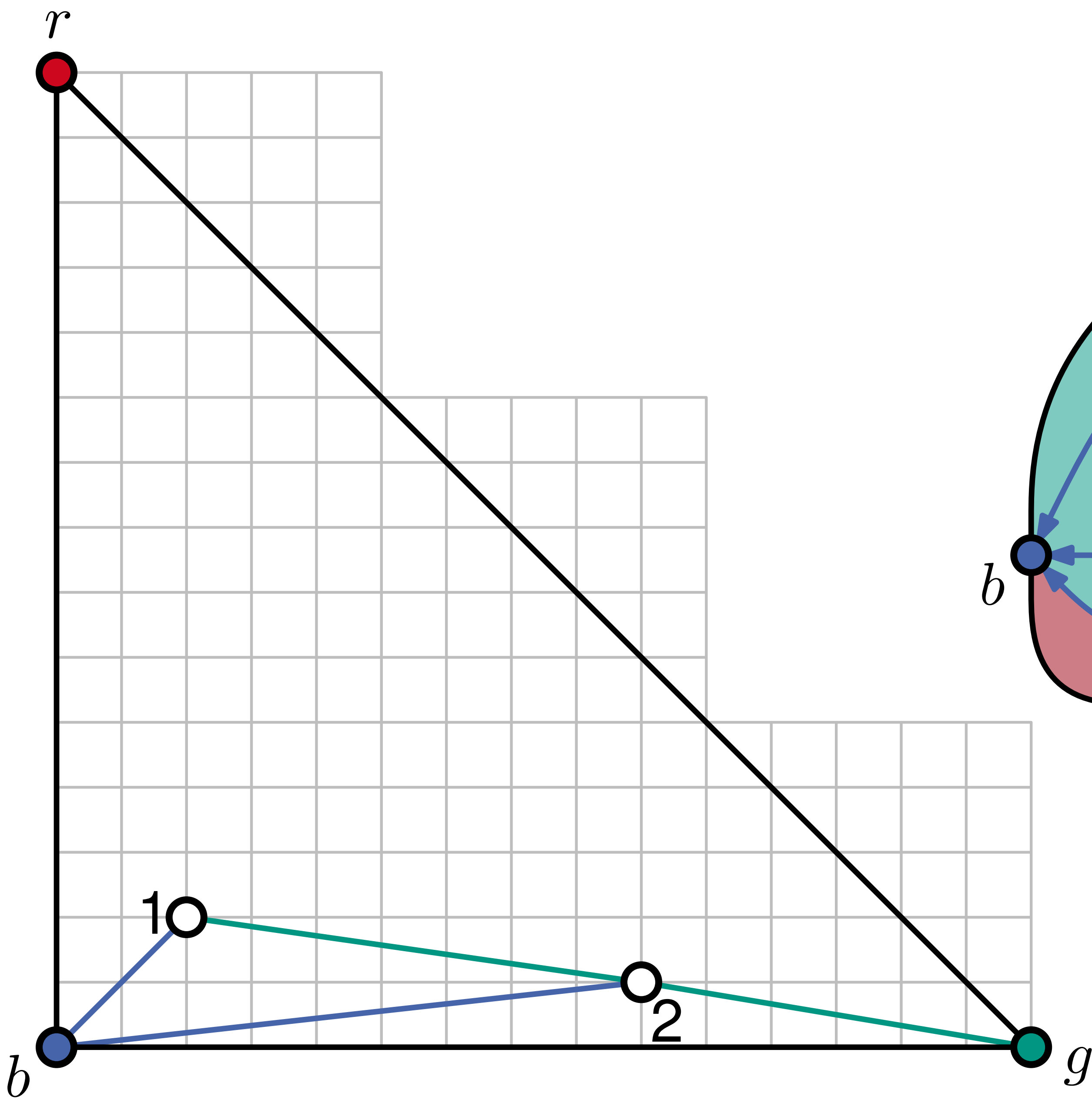


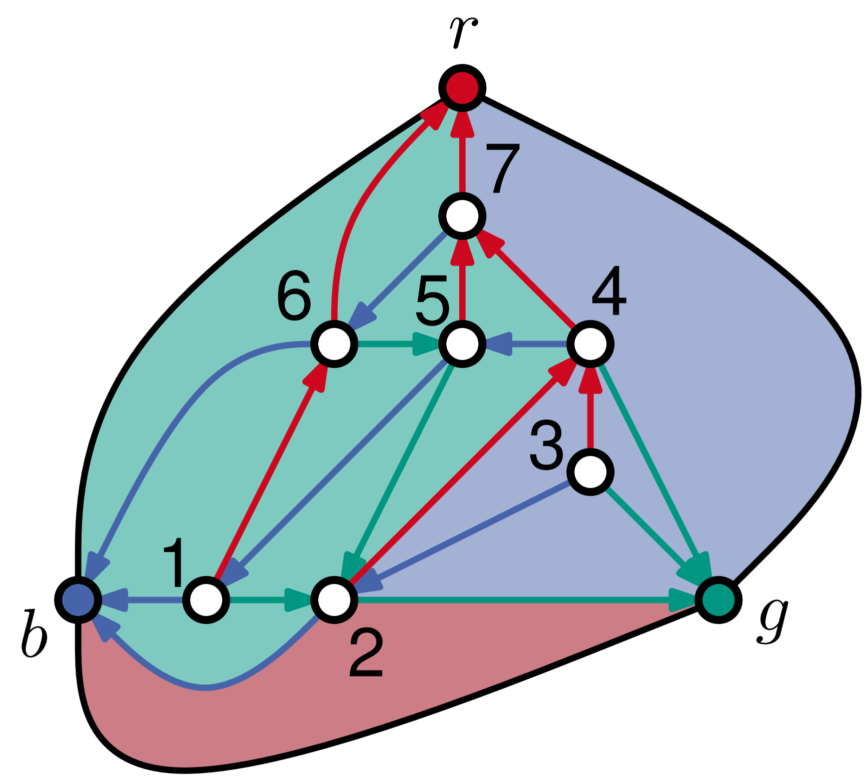
Facetten Zählen





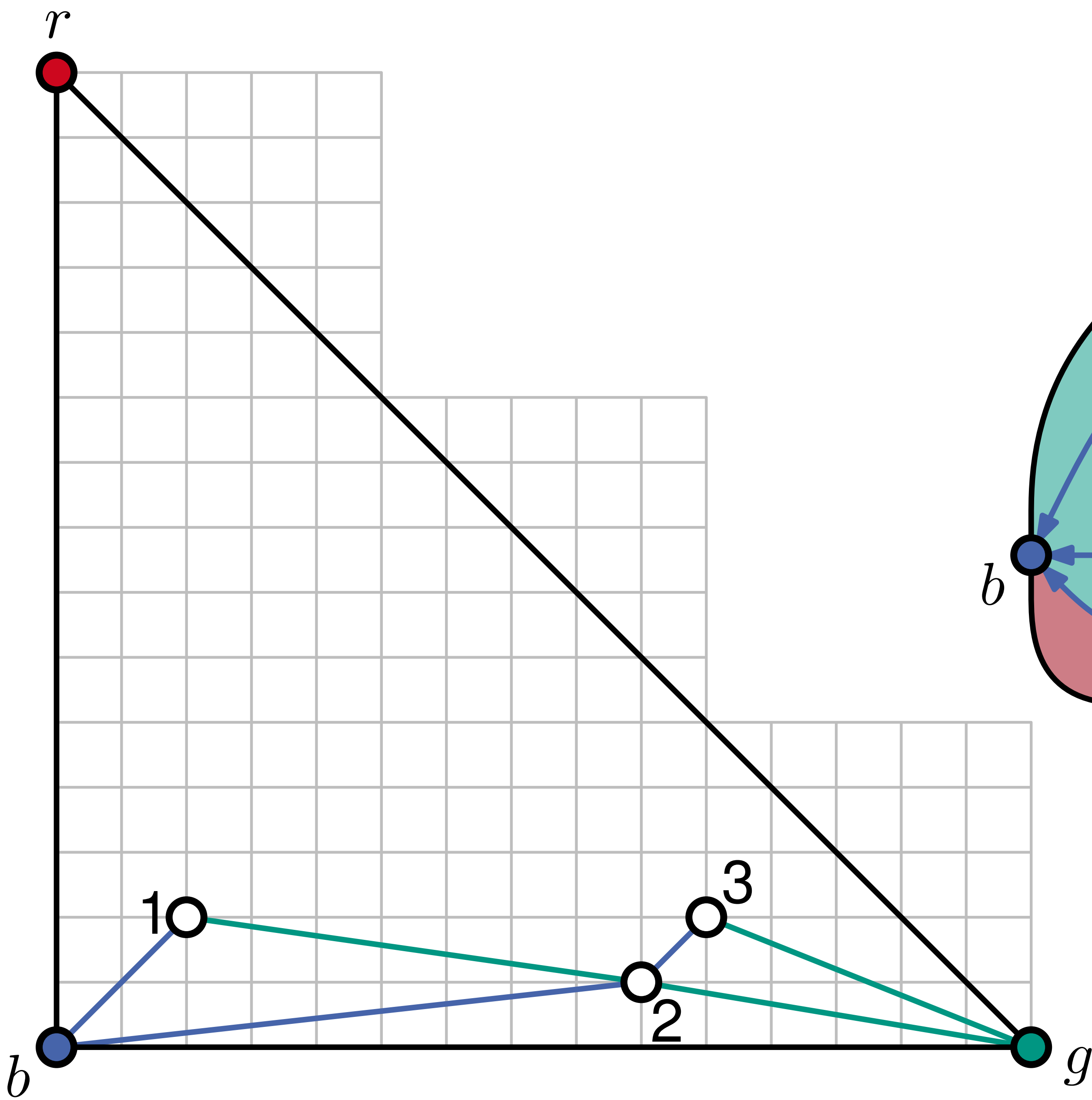
Facetten Zählen

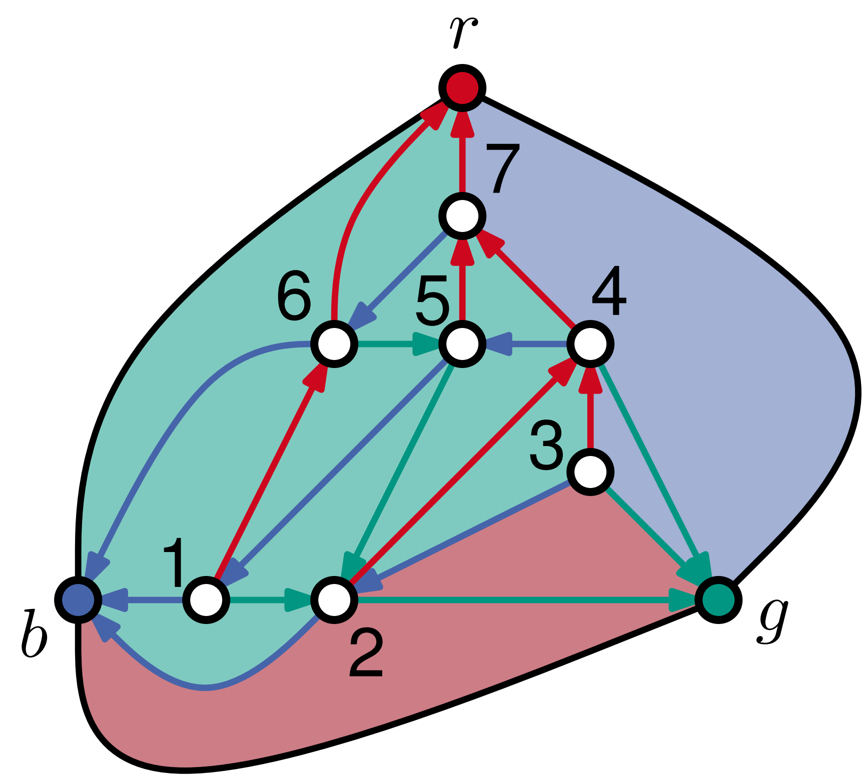




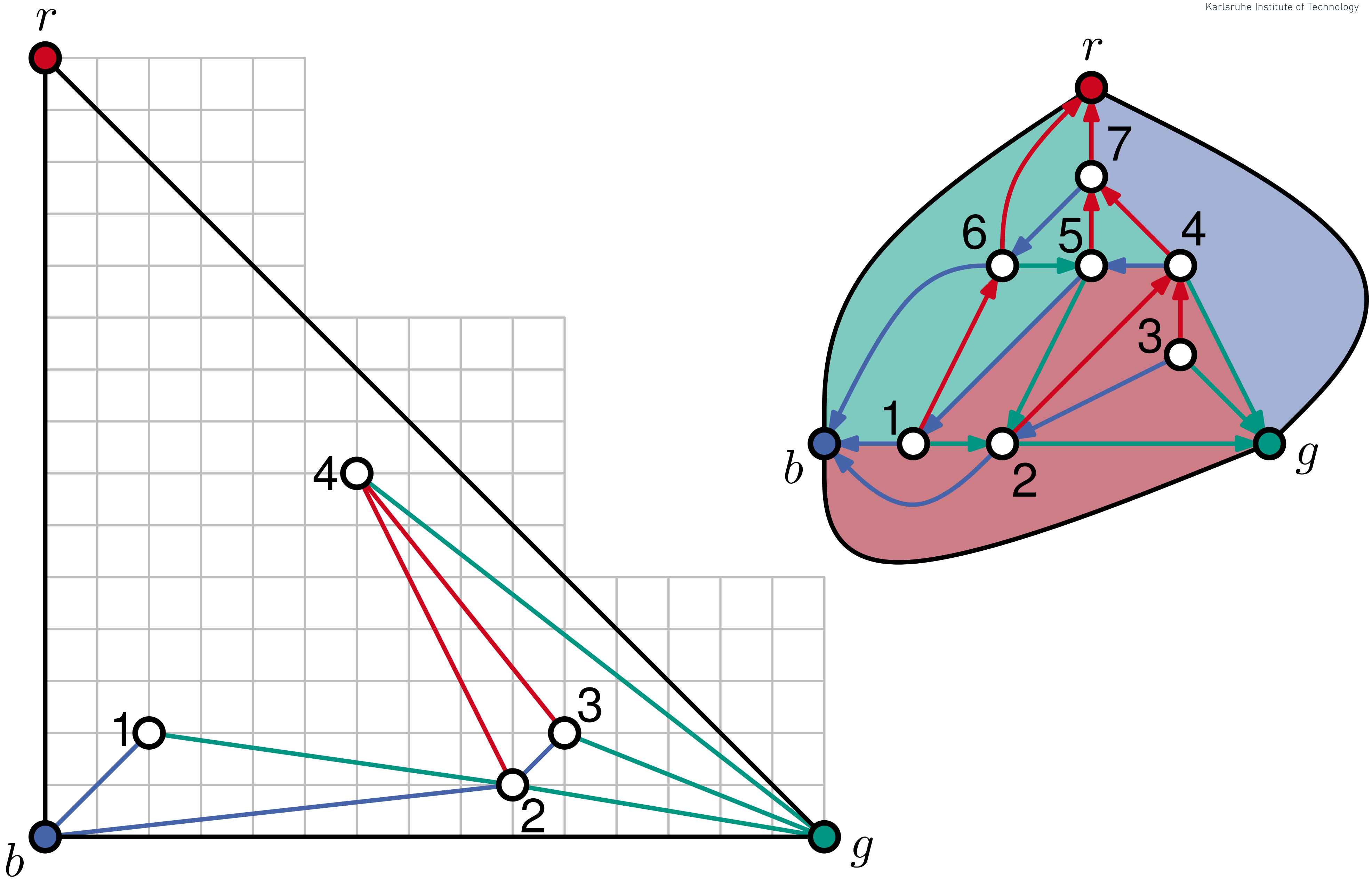
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Facetten Zählen

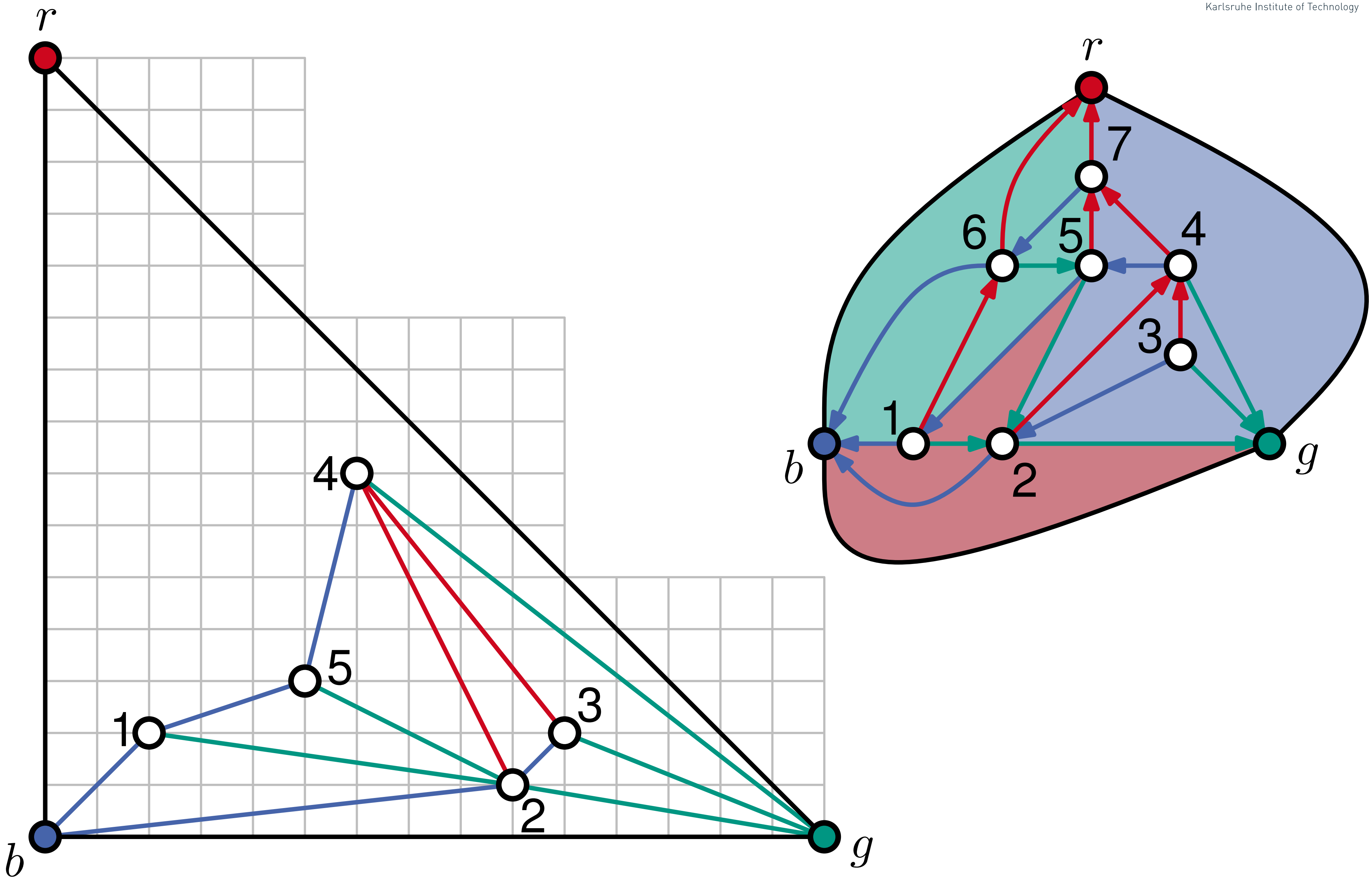




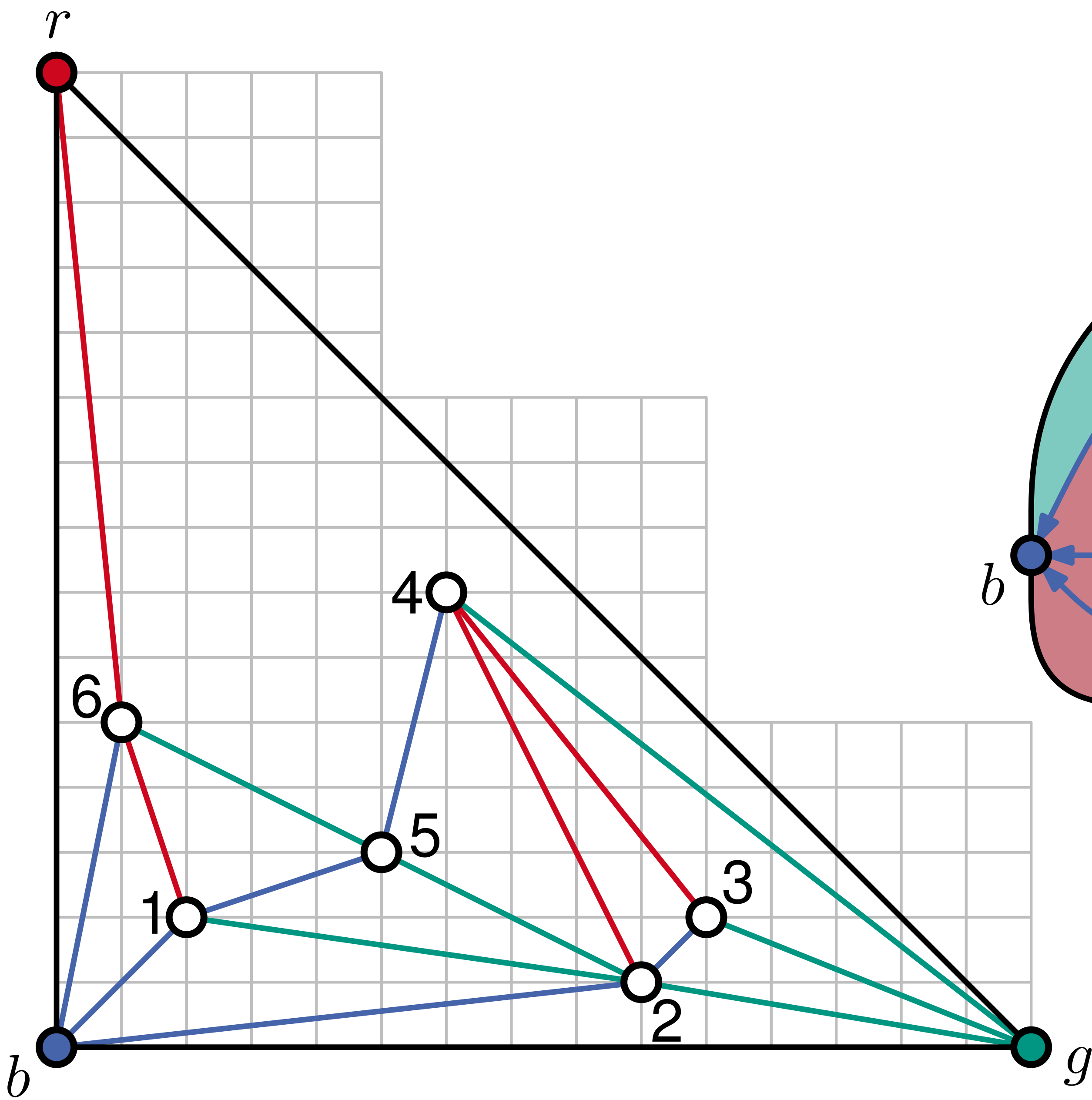
Facetten Zählen

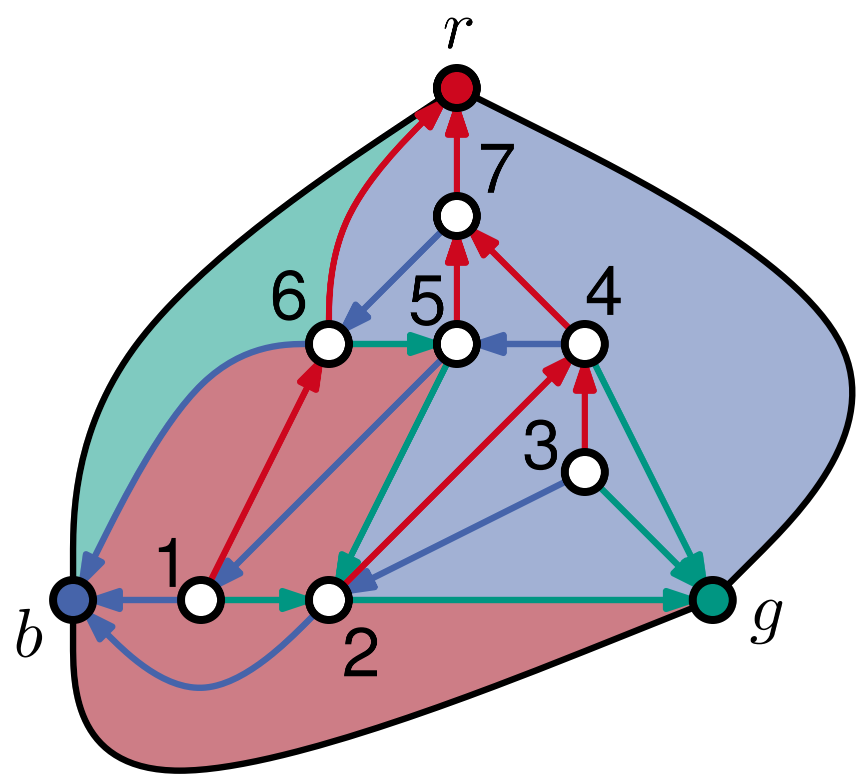


Facetten Zählen



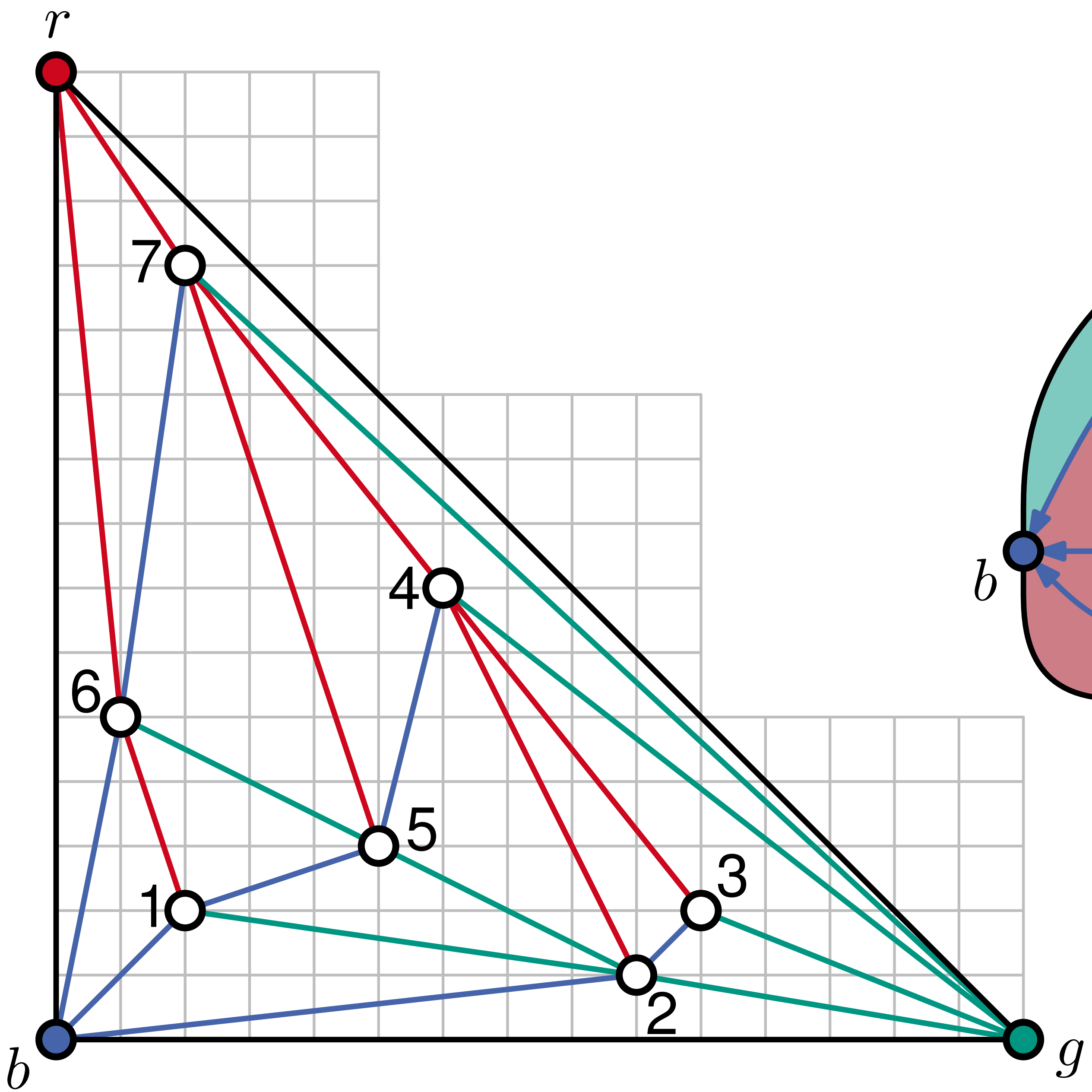
Facetten Zählen

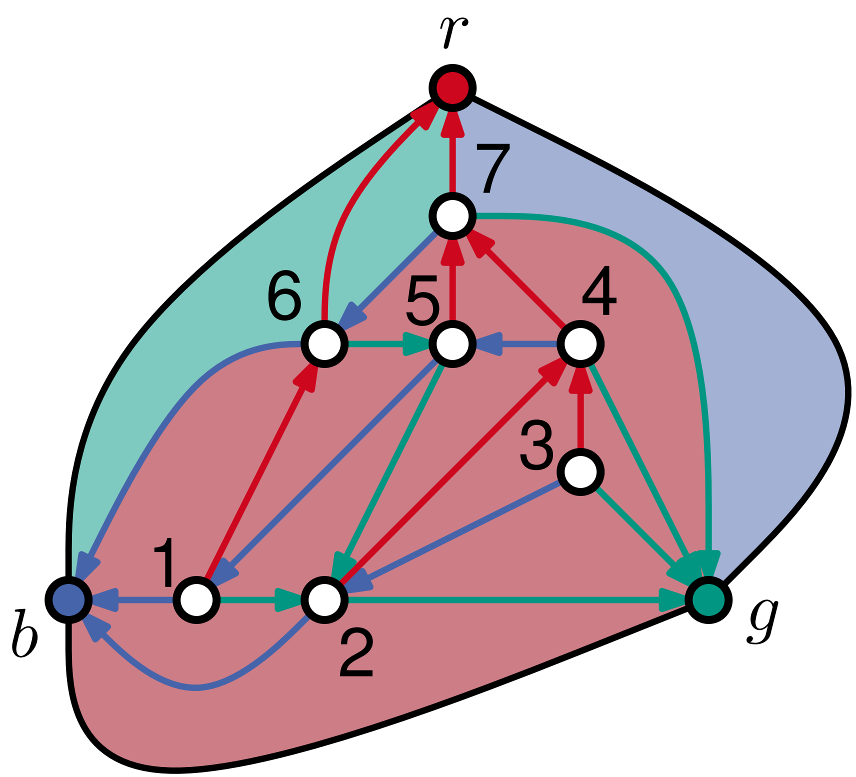




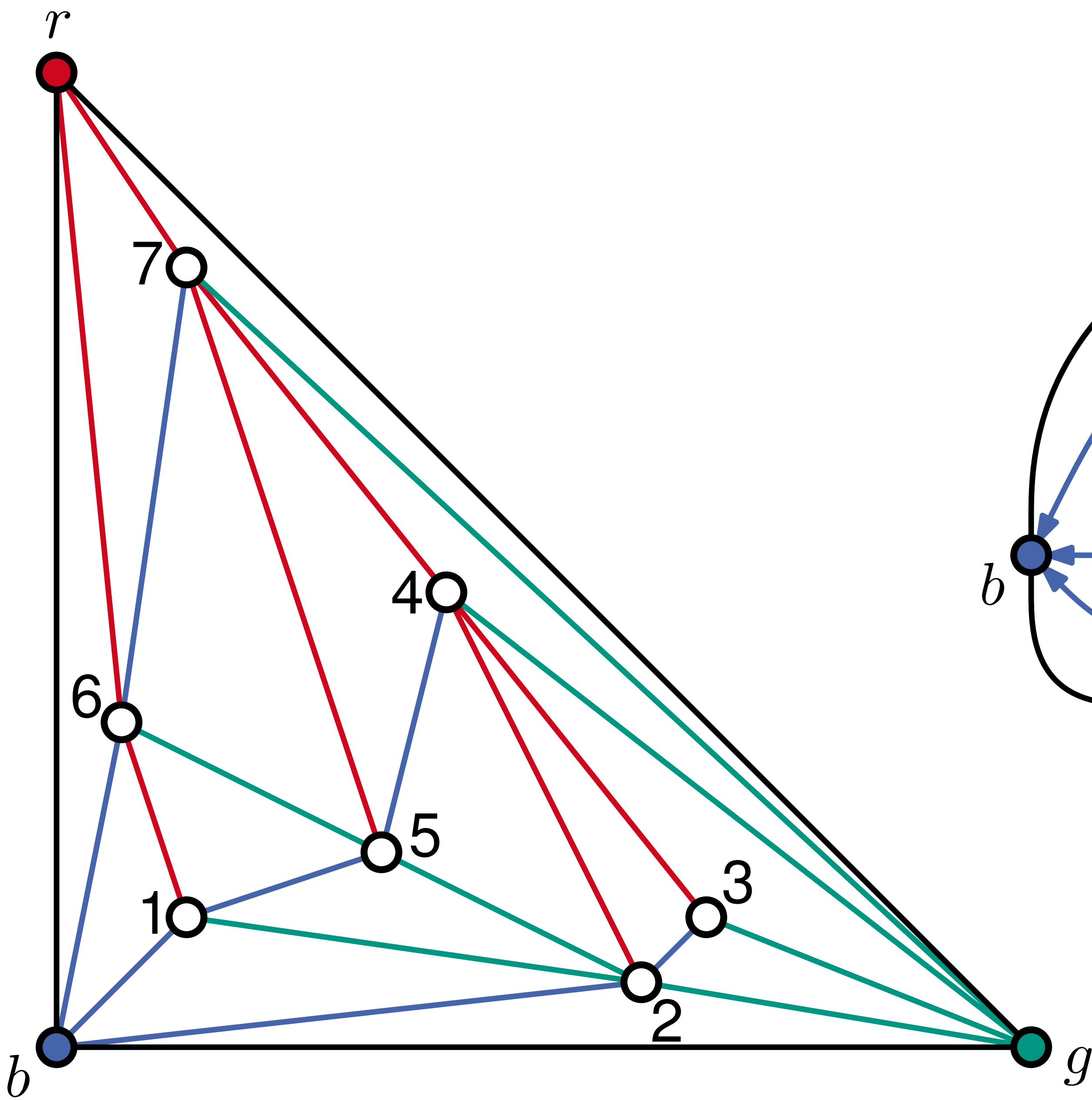
Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

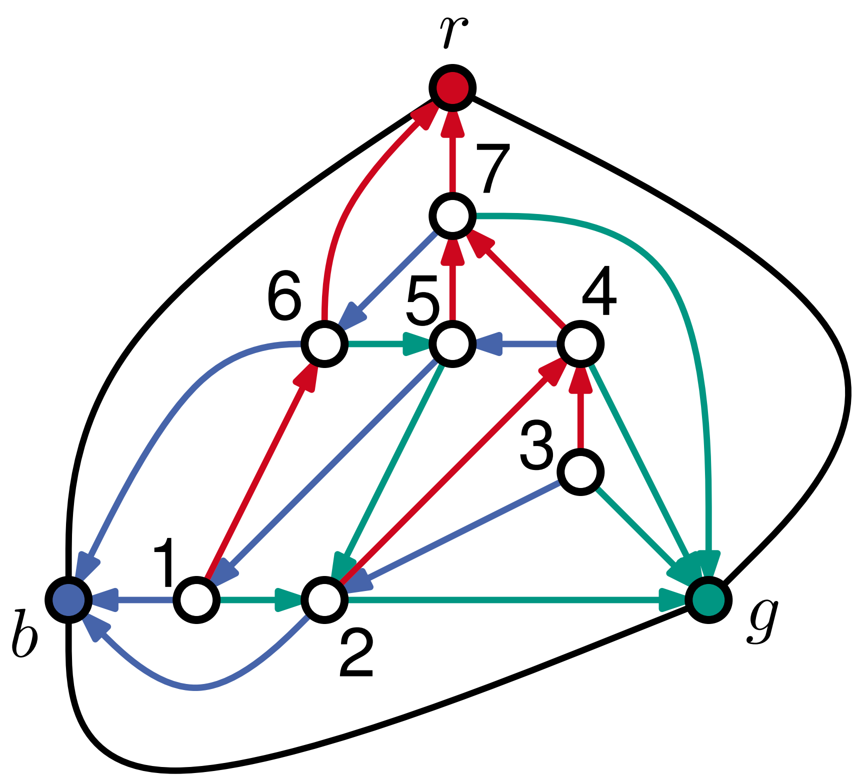
Facetten Zählen





Facetten Zählen





Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

Geben Sie einen Algorithmus für die Bestimmung der baryzentrischen Koordinaten aller Knoten an, der insgesamt $\mathcal{O}(n)$ Zeit benötigt.

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

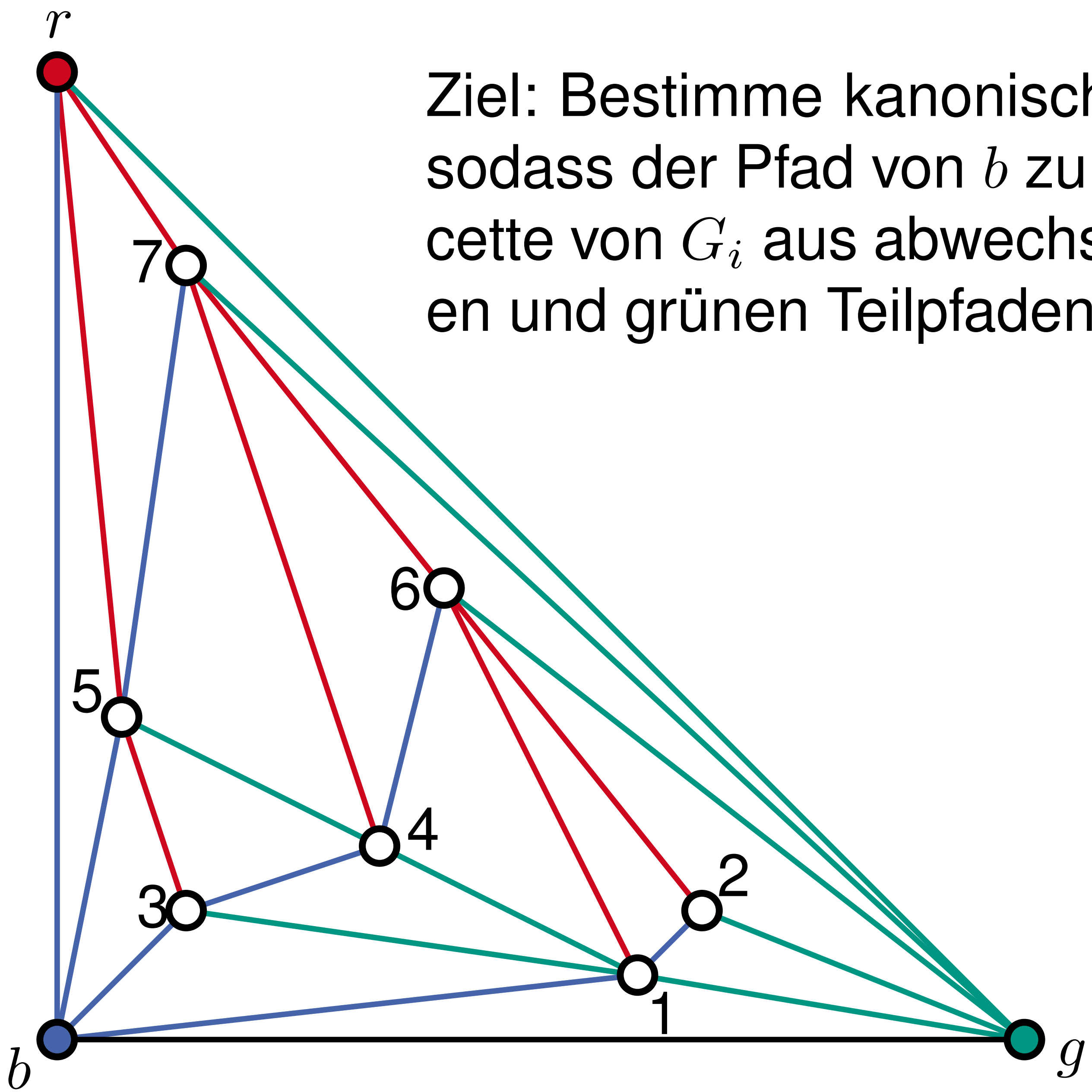
Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

Geben Sie einen Algorithmus für die Bestimmung der baryzentrischen Koordinaten aller Knoten an, der insgesamt $\mathcal{O}(n)$ Zeit benötigt.

Idee: mal wieder Dynamisches Programm

Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

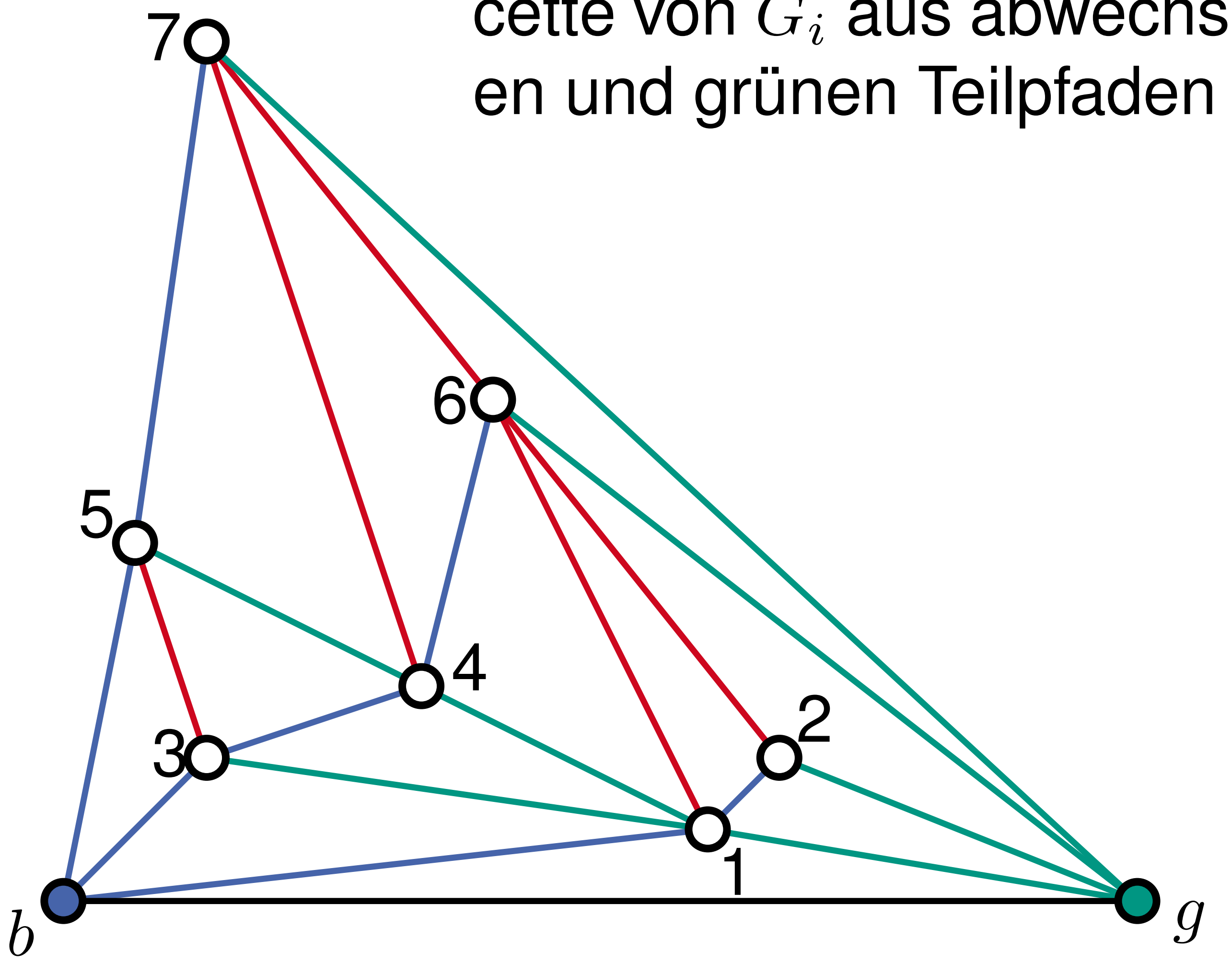
Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen



Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.

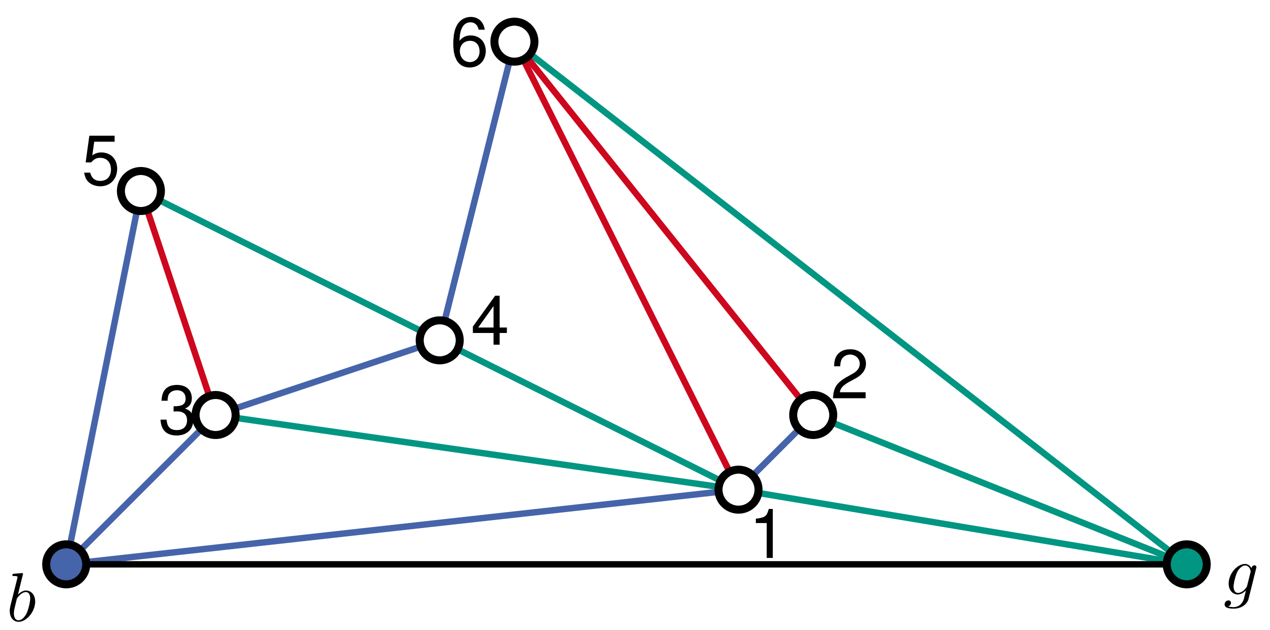
Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.



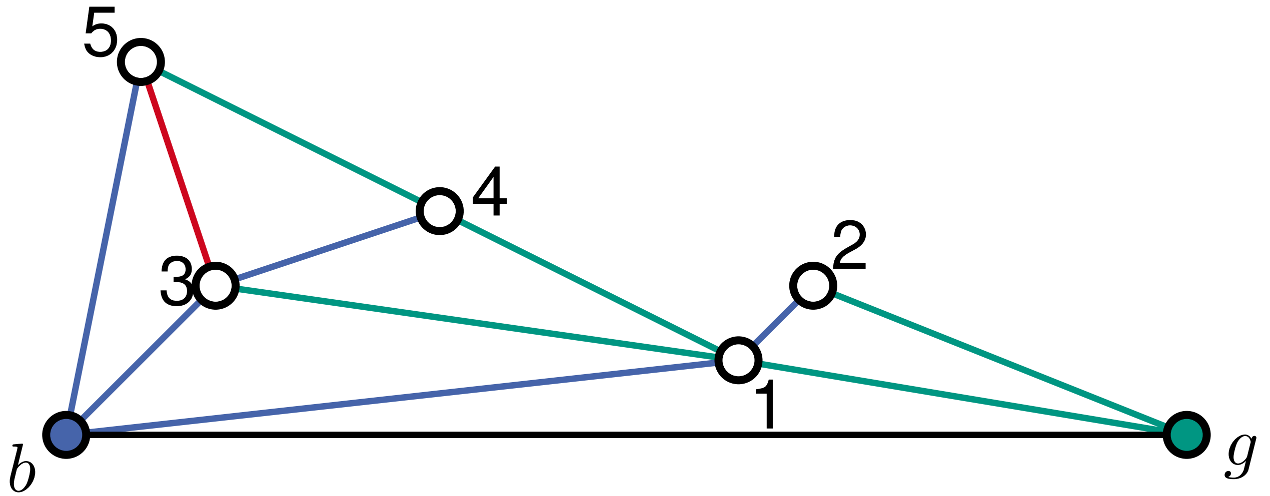
Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.



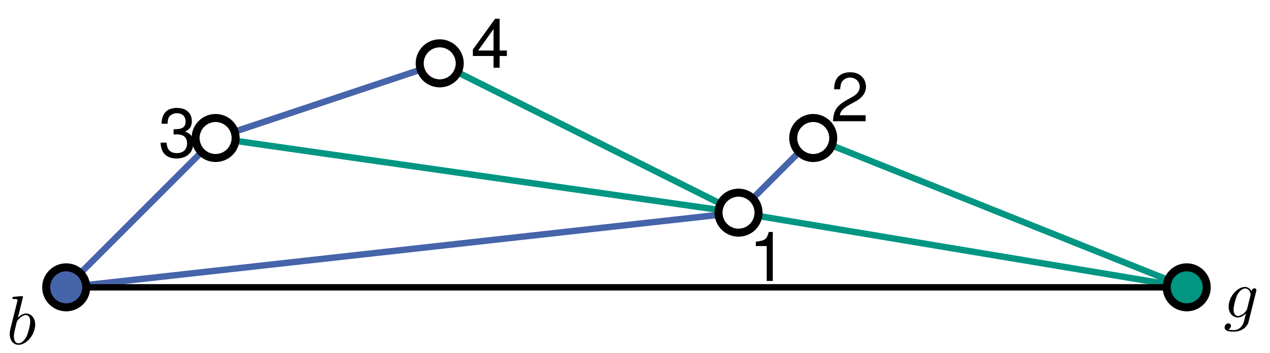
Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.



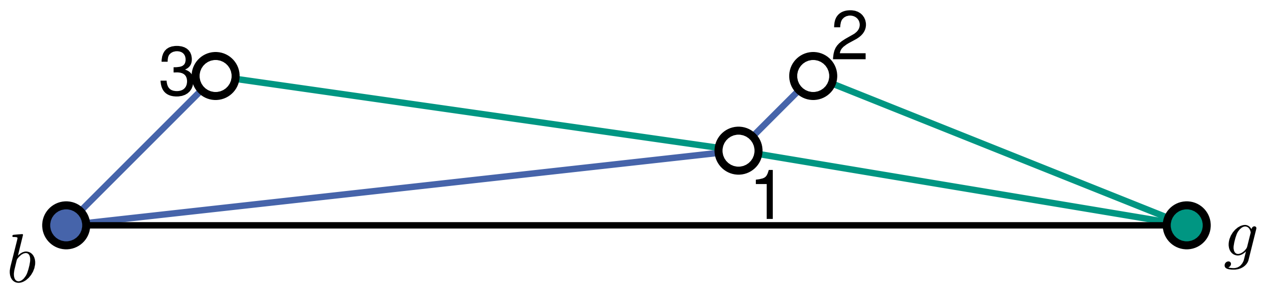
Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.



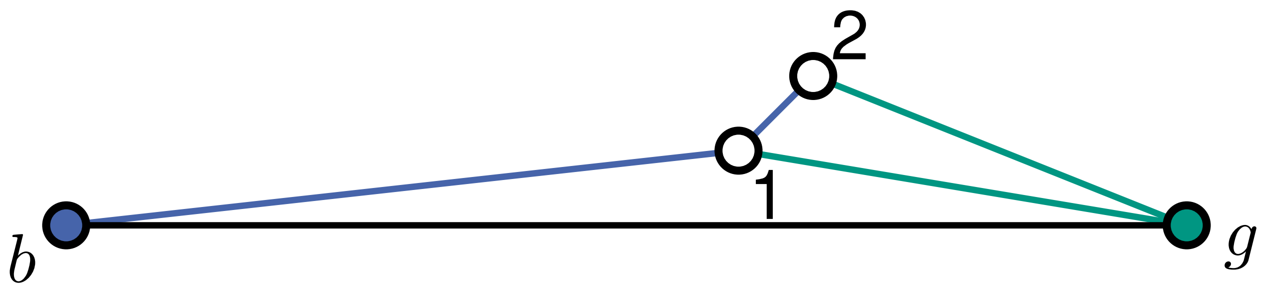
Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.



Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

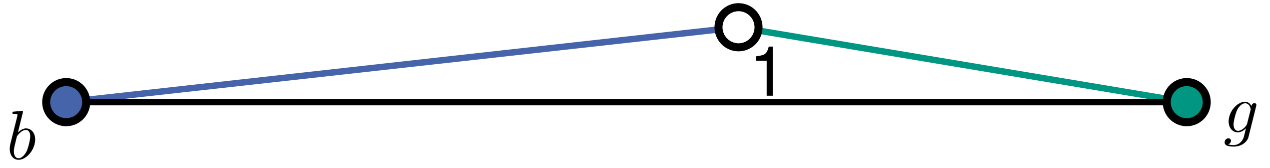
Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \dots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.



Aufgabe 3 – In Linearzeit Zählen

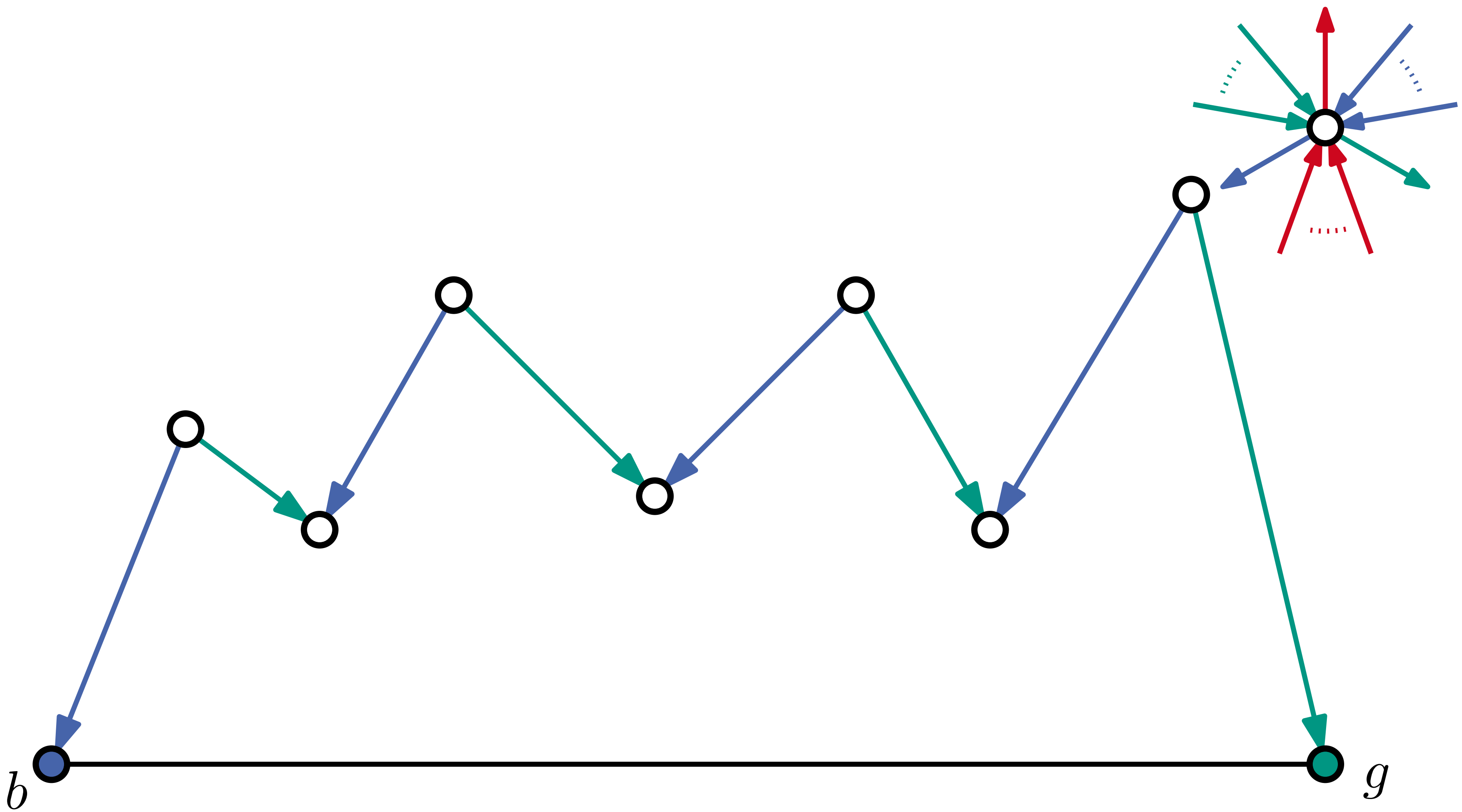
Ziel: Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \dots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.

Wir nehmen erstmal an, dass eine solche Ordnung immer existiert.



Gipfel und Täler

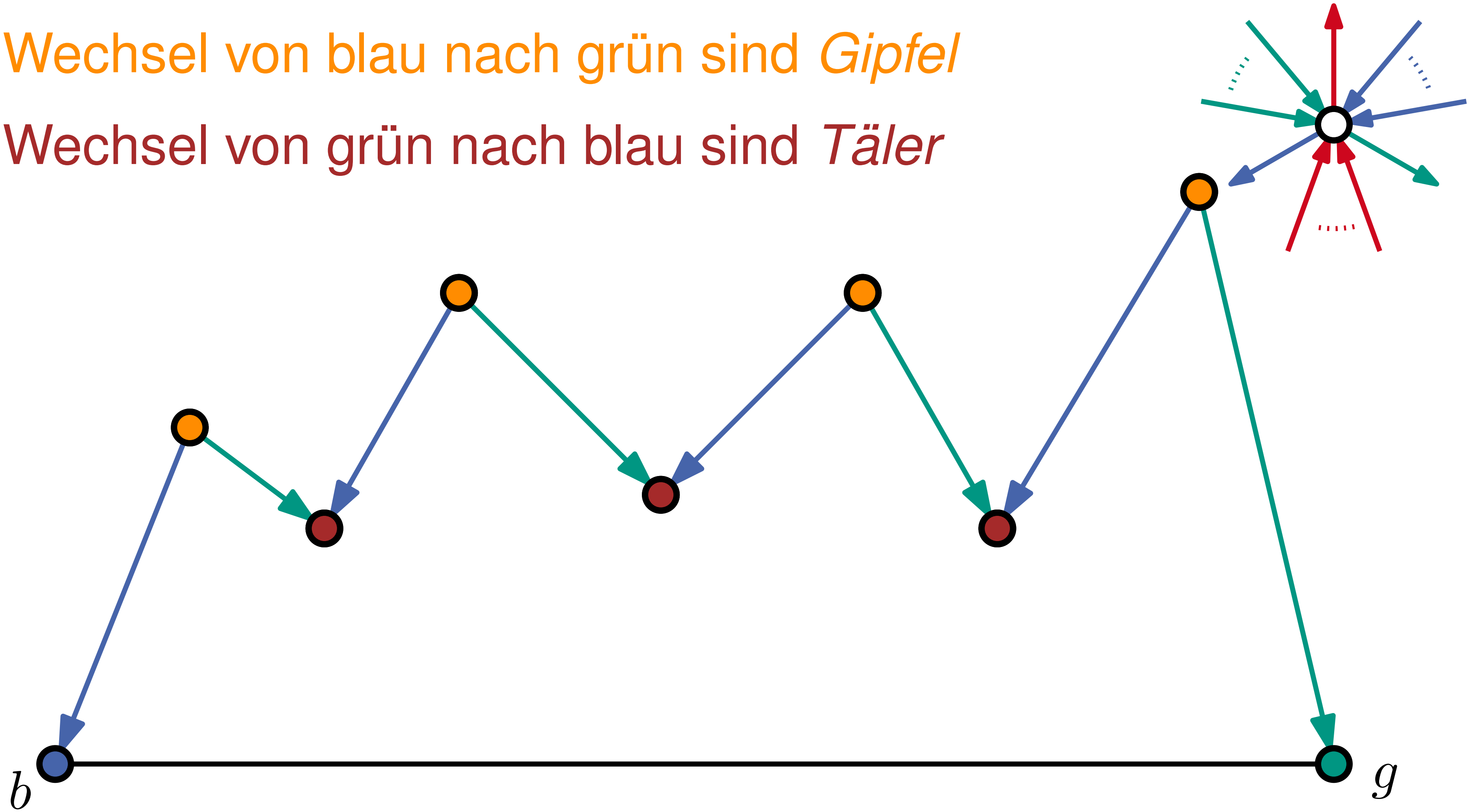
Der Pfad von b nach g auf der äußeren Facette von G_i besteht aus „aufsteigenden“ blauen und „abfallenden“ grünen Teilpfaden



Gipfel und Täler

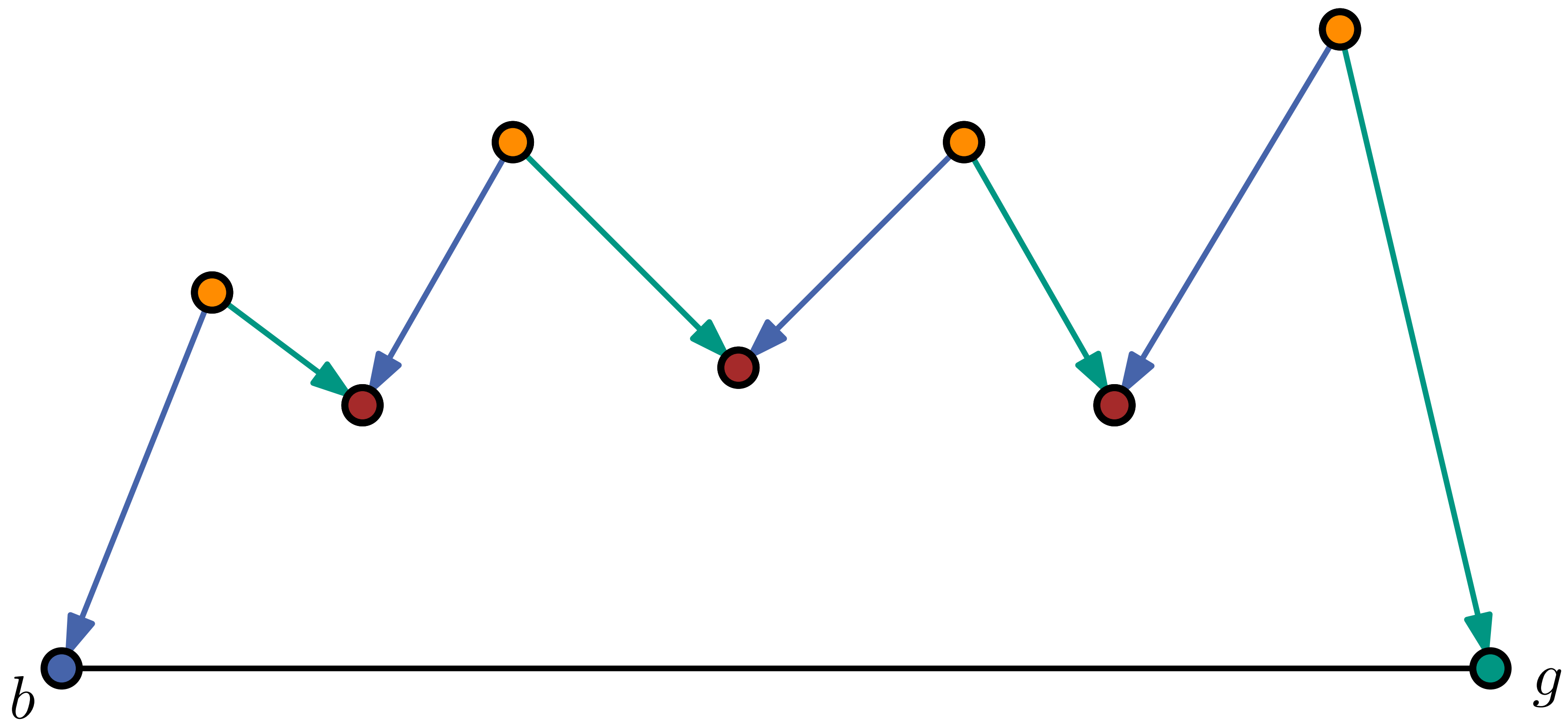
Der Pfad von b nach g auf der äußeren Facette von G_i besteht aus „aufsteigenden“ blauen und „abfallenden“ grünen Teilpfaden

- Wechsel von blau nach grün sind *Gipfel*
- Wechsel von grün nach blau sind *Täler*



Dynamisches Programm

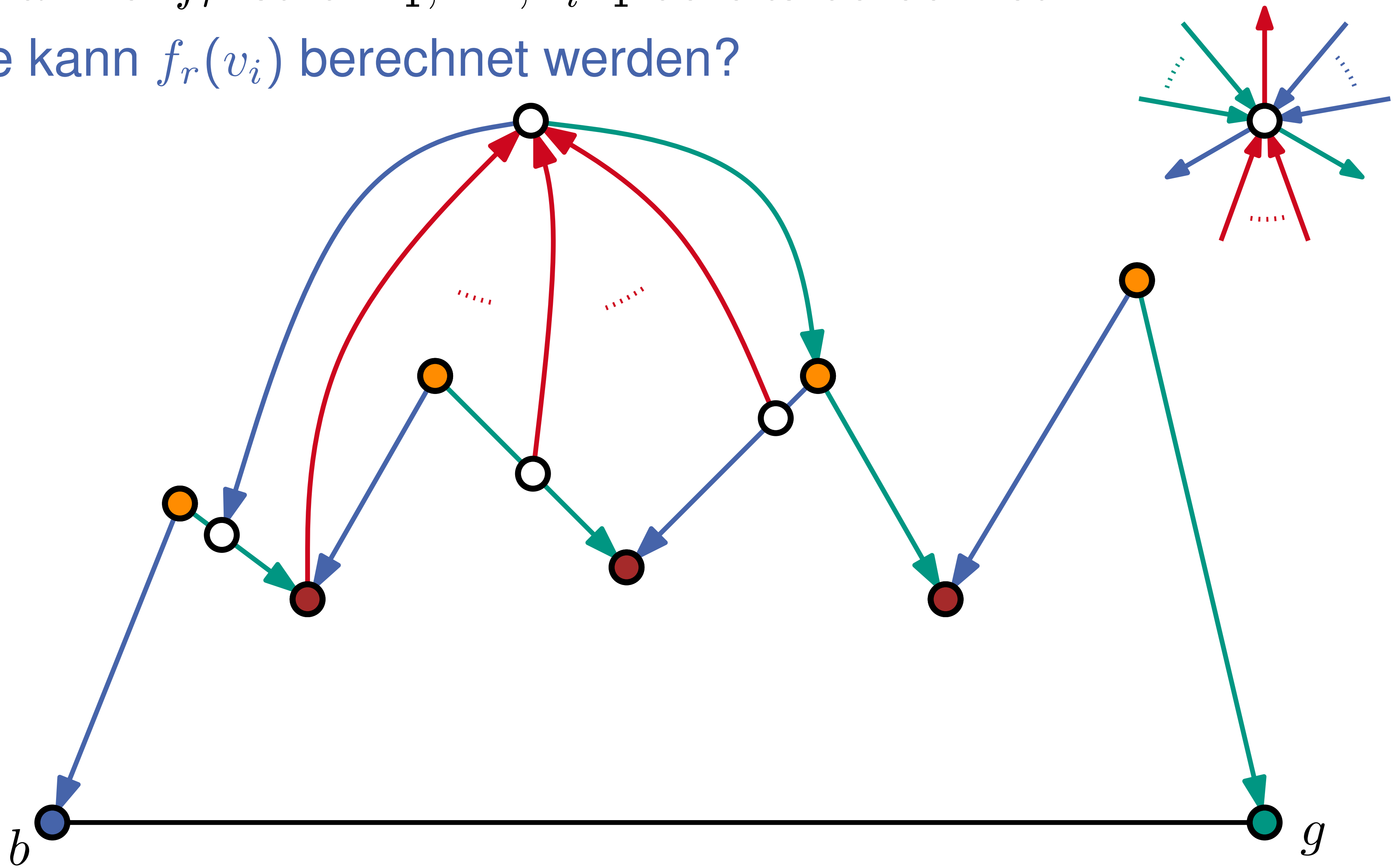
Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.



Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

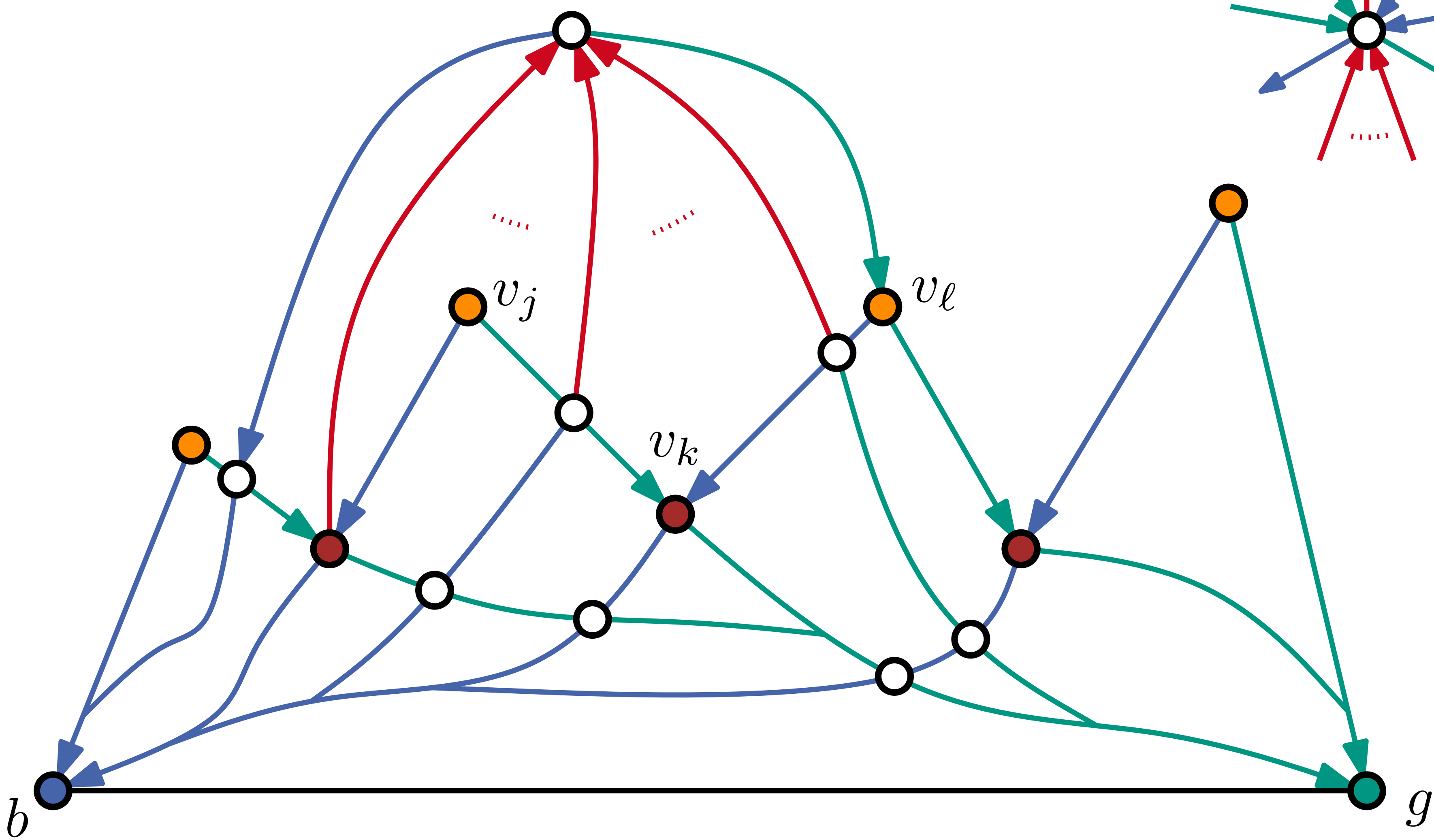
Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?

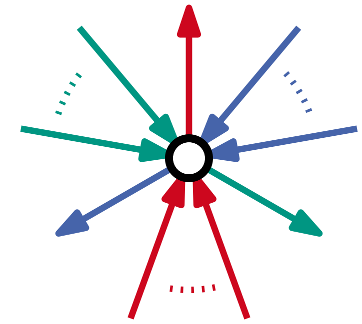


Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?

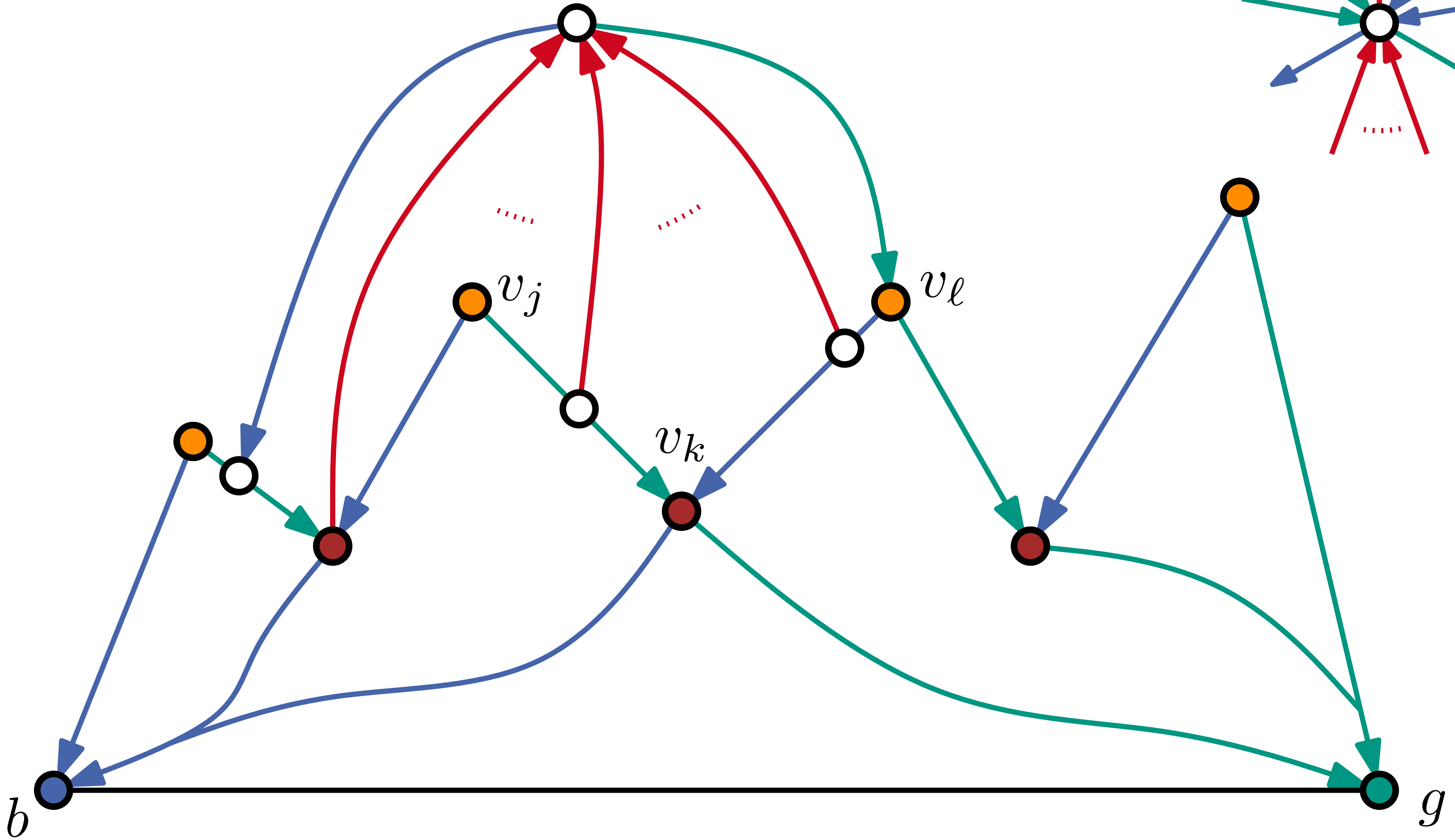


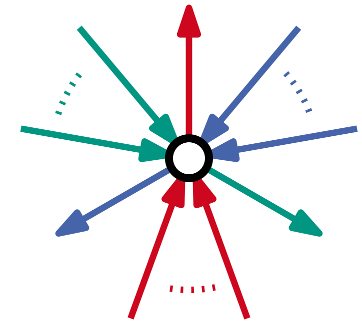


Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?

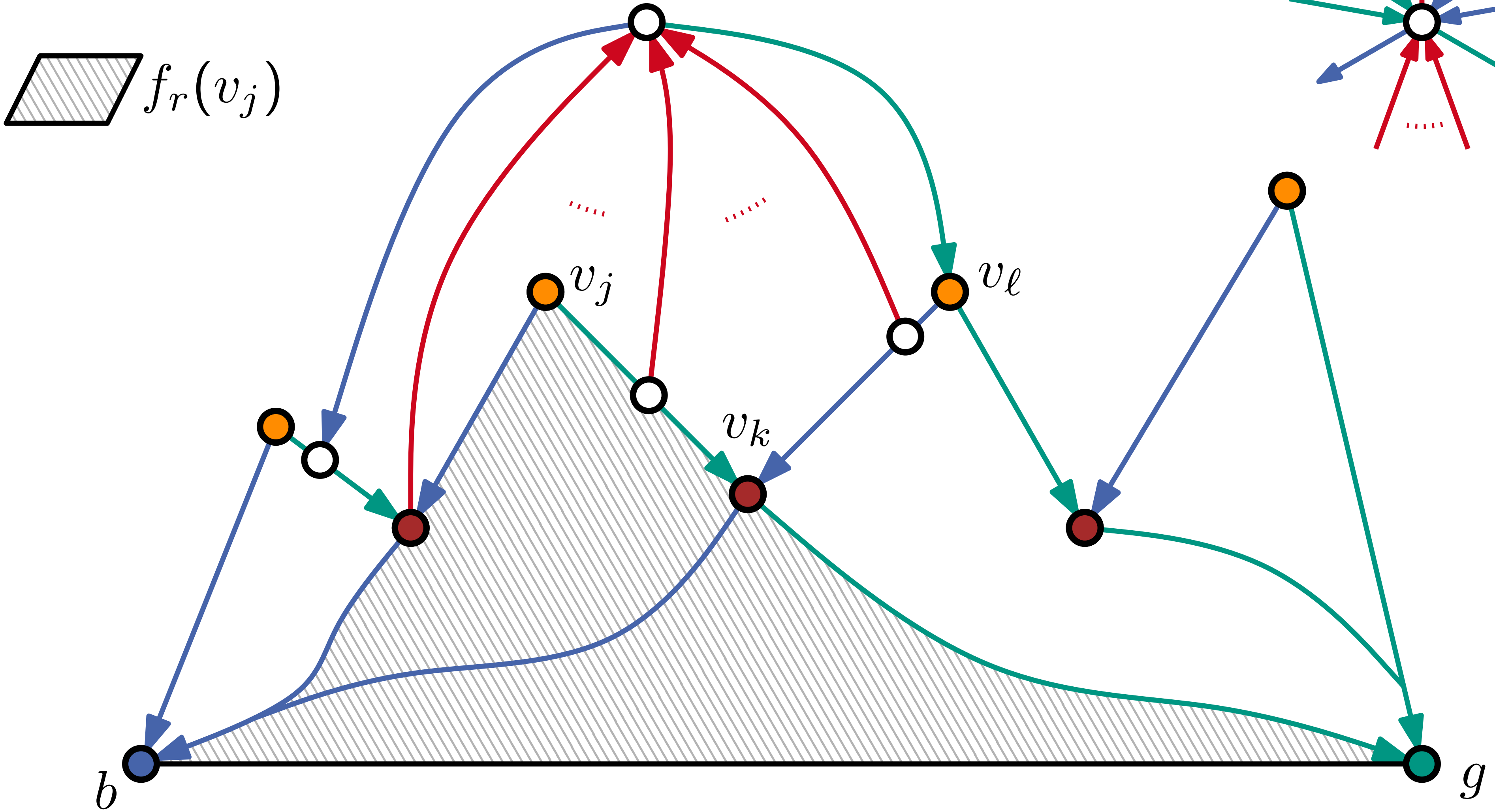


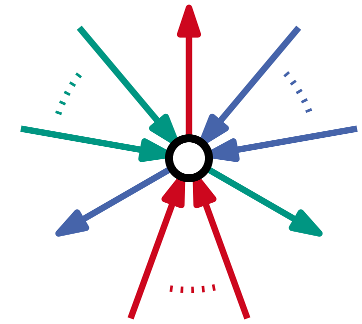


Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?

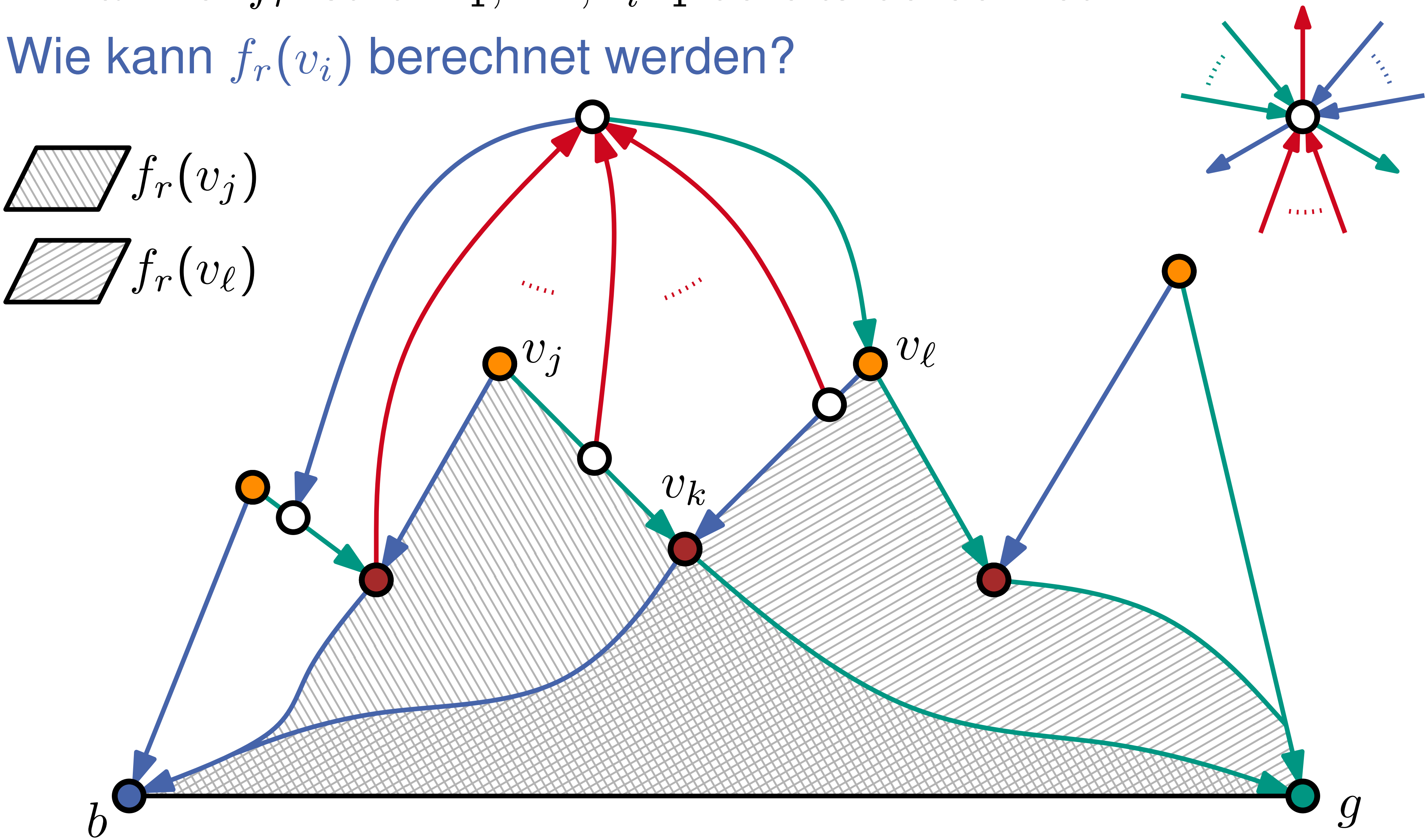




Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

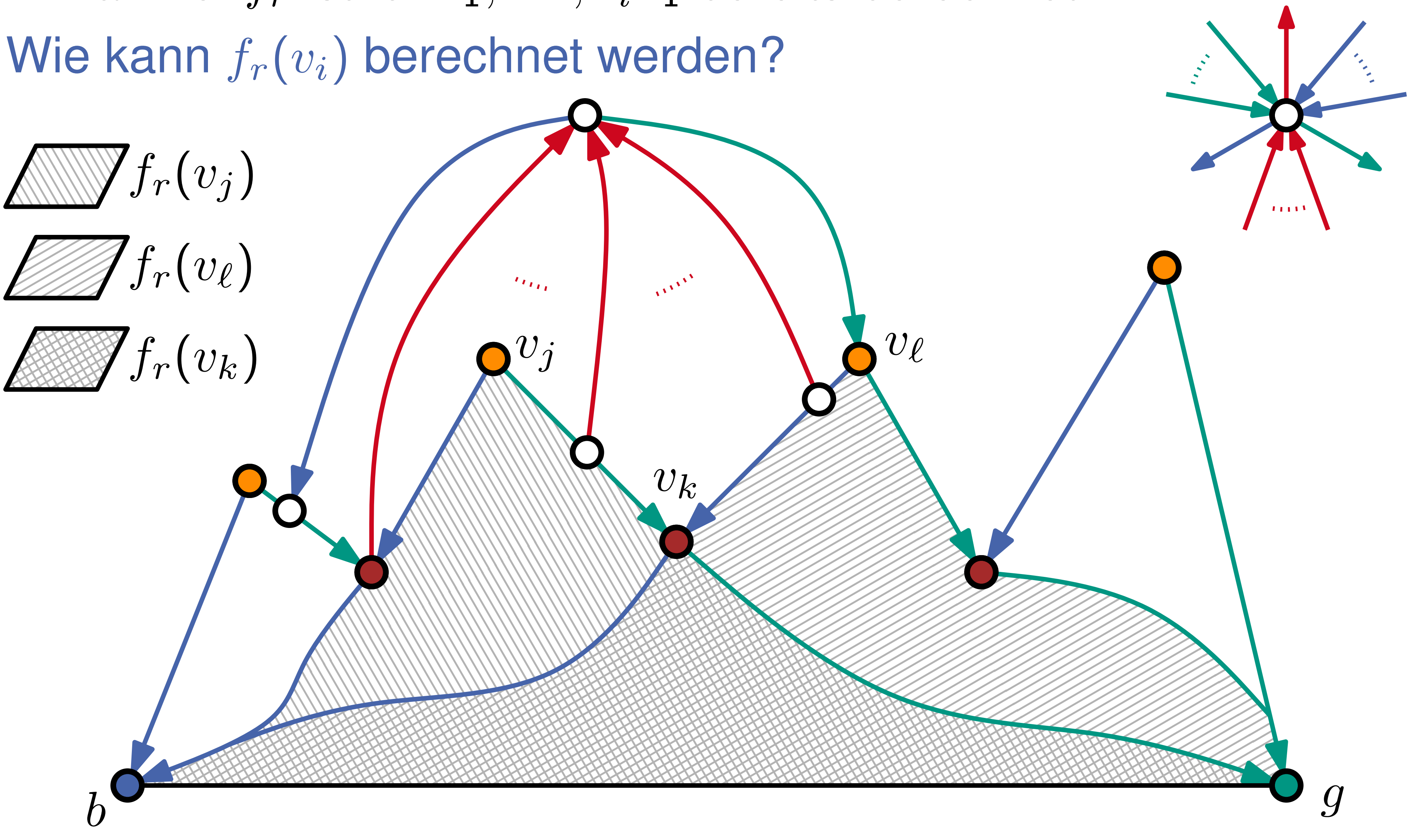
Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?



Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

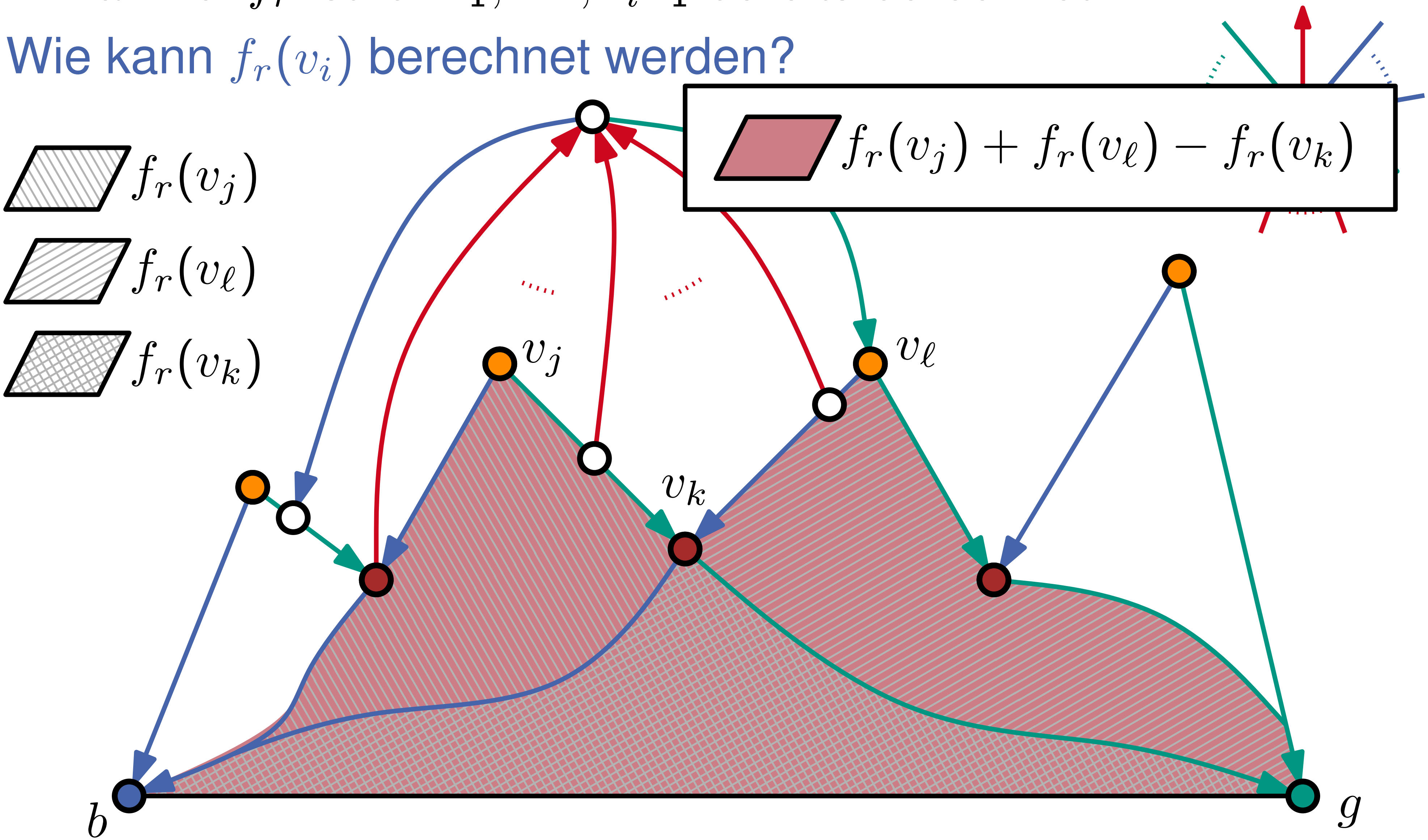
Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?



Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

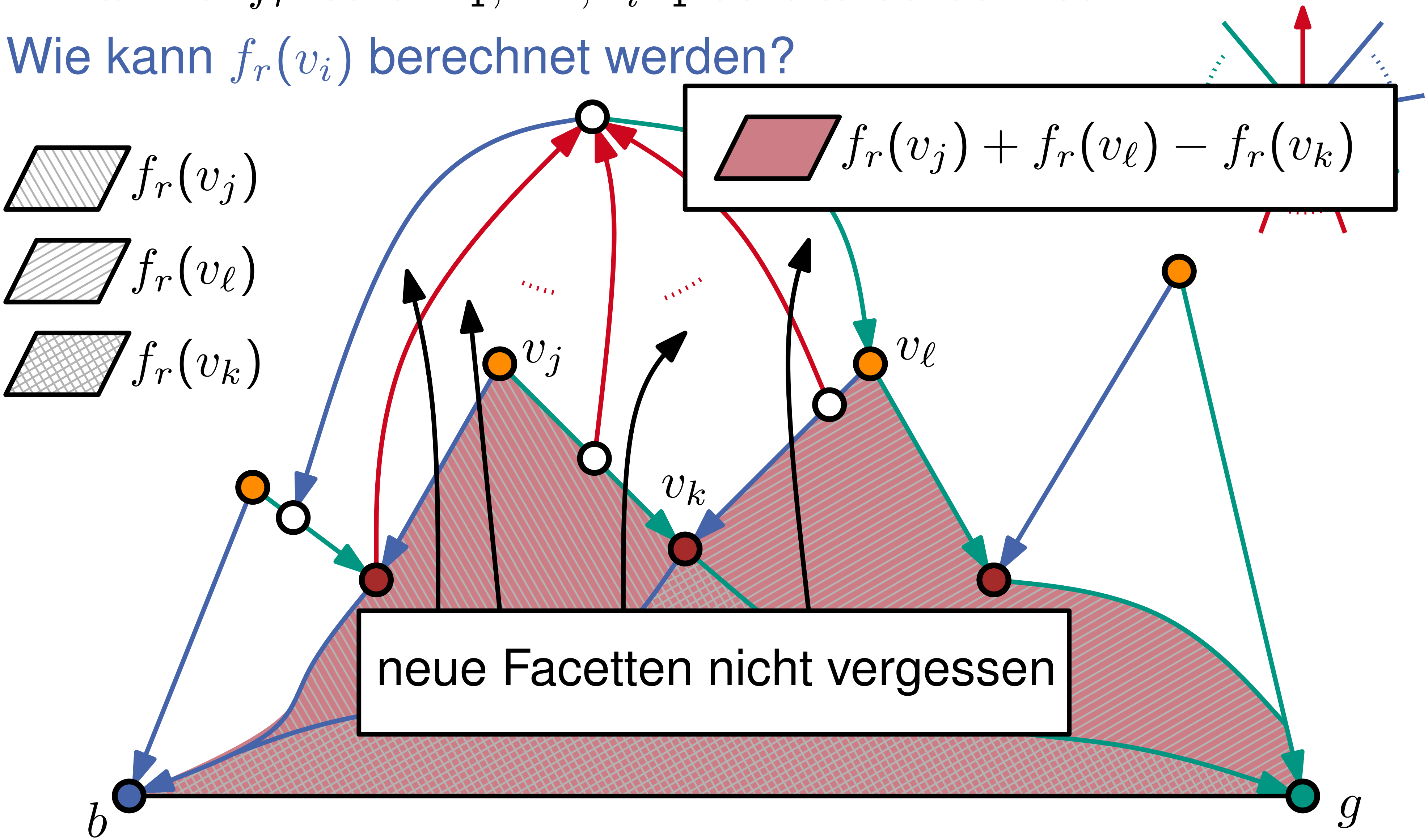
Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?



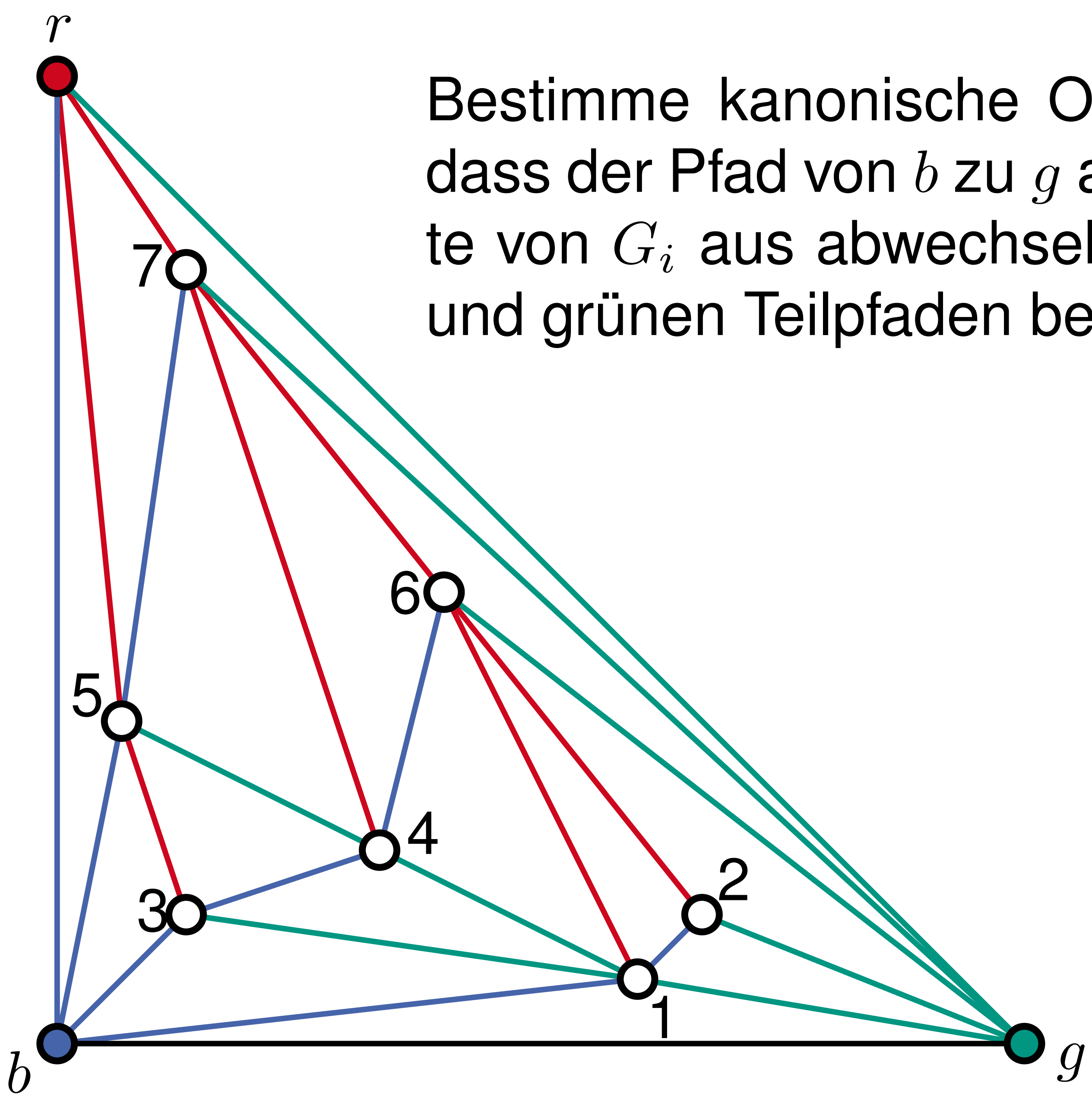
Dynamisches Programm

Annahme: f_r ist für $v_1, \ldots, v_{i-1}$ bereits berechnet.

Wie kann $f_r(v_i)$ berechnet werden?

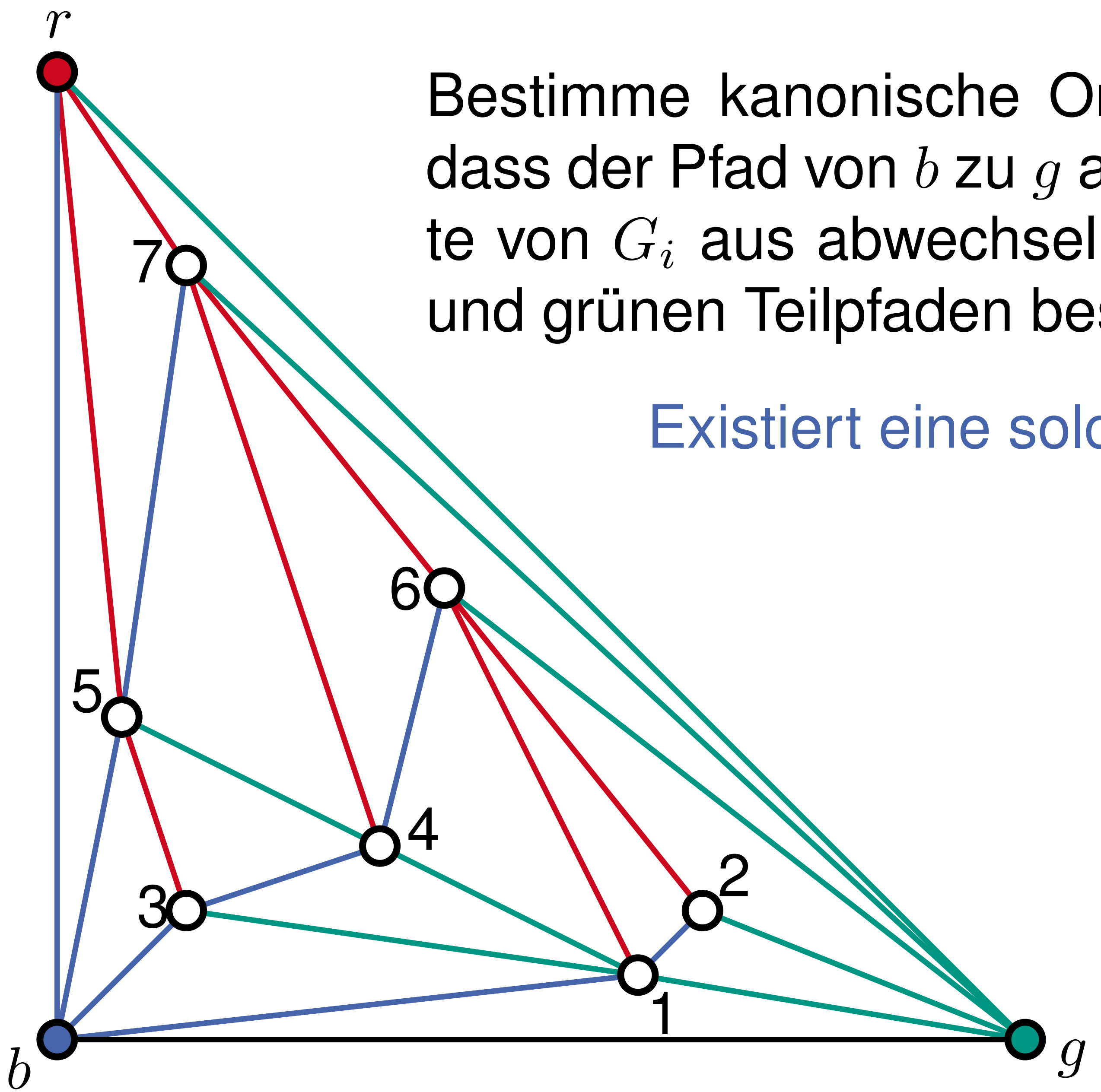


Existenz der Ordnung



Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.

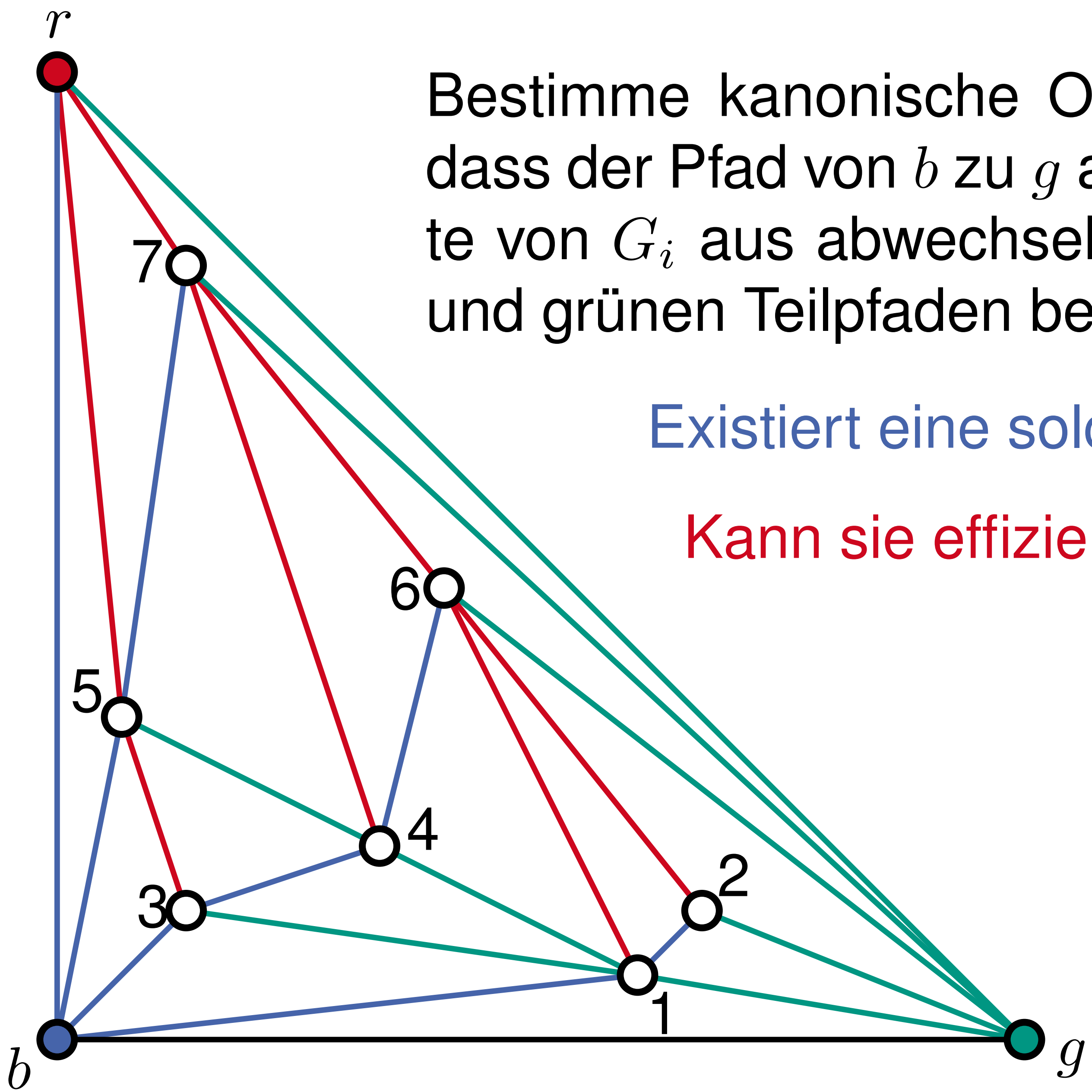
Existenz der Ordnung



Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.

Existiert eine solche Ordnugn immer?

Existenz der Ordnung

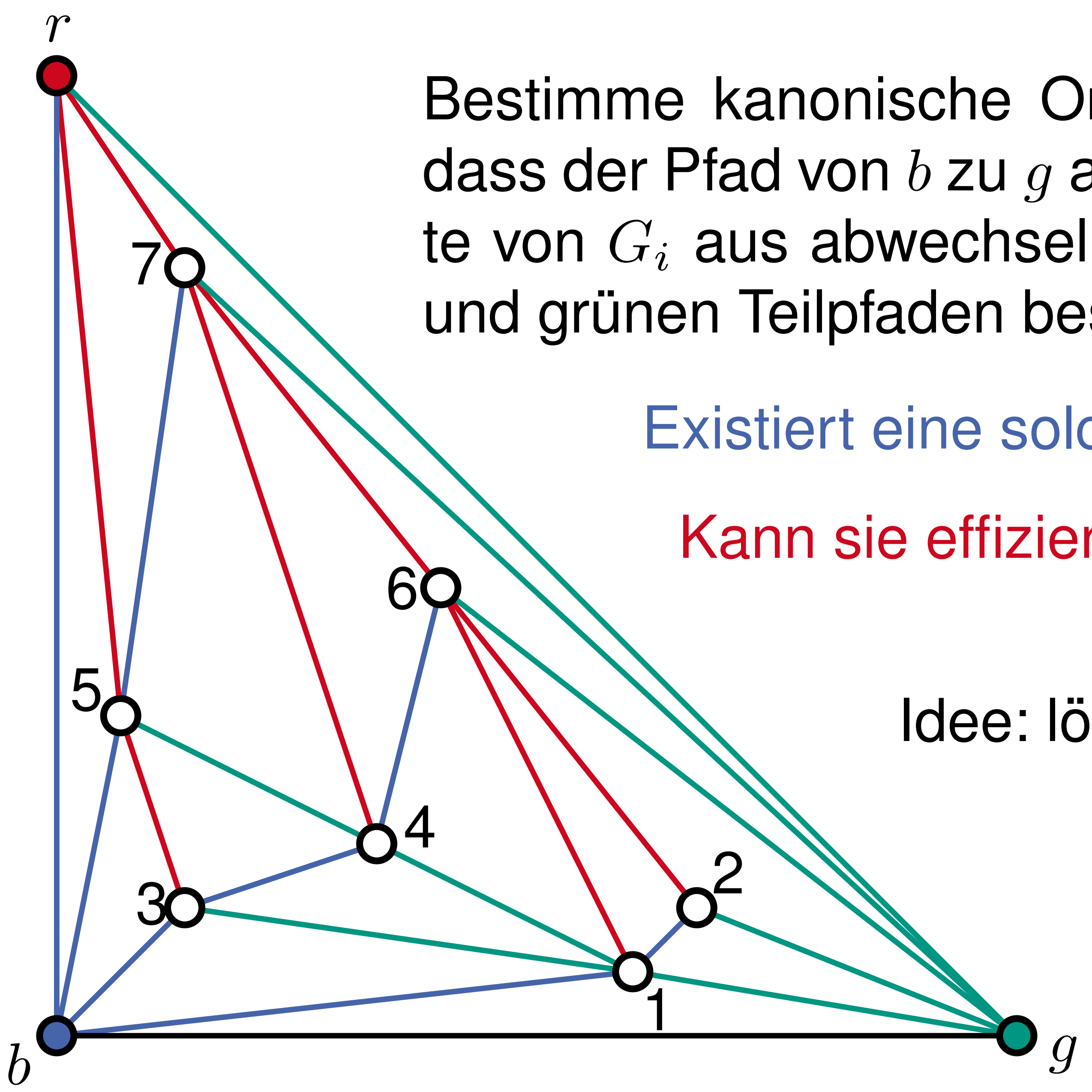


Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.

Existiert eine solche Ordnugn immer?

Kann sie effizient berechnet werden?

Existenz der Ordnung



Bestimme kanonische Ordnung $v_1, \ldots, v_k$, sodass der Pfad von b zu g auf der äußeren Facette von G_i aus abwechselnd gerichteten blauen und grünen Teilpfaden besteht.

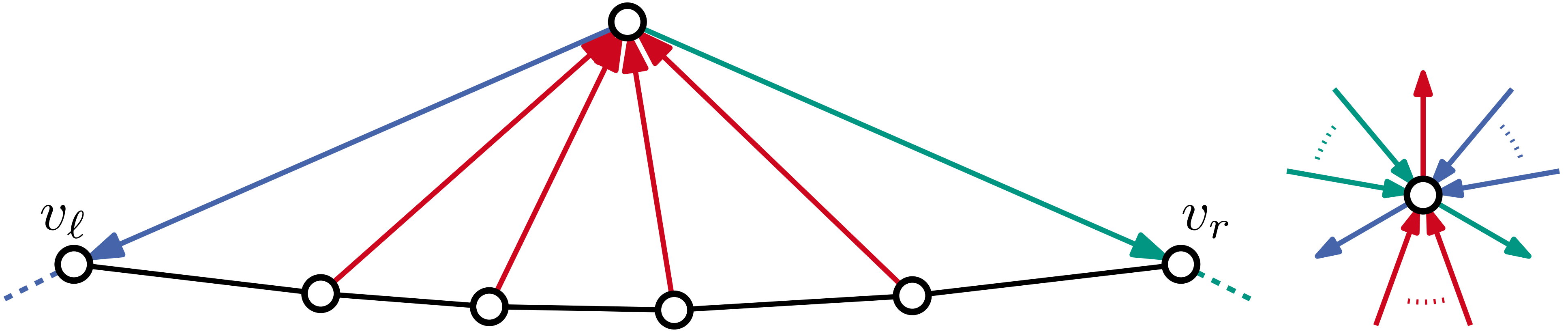
Existiert eine solche Ordnugn immer?

Kann sie effizient berechnet werden?

Idee: lösche iterativ Gipfel

Existenz der Ordnung

Idee: lösche iterativ Gipfel

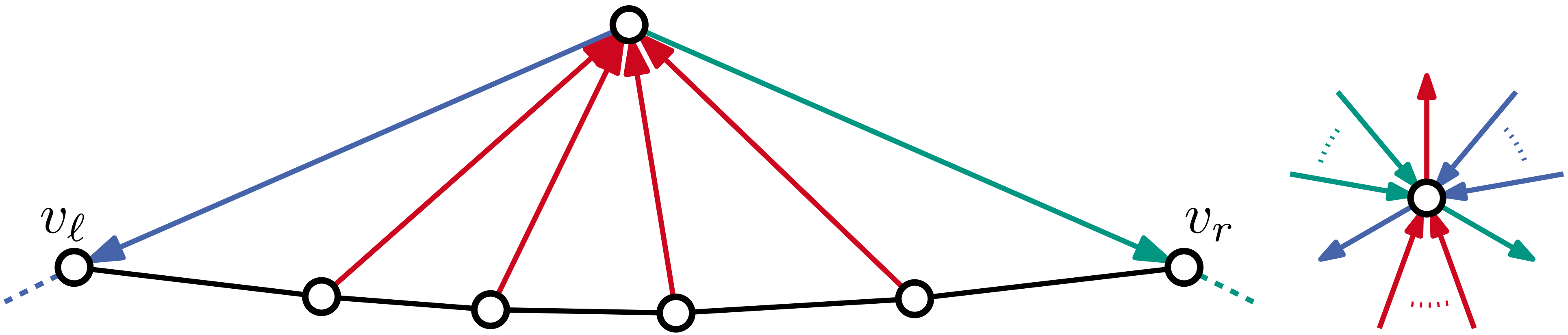


Institute for Theoretical Informatics
Algorithmics Group I

Existenz der Ordnung

Idee: lösche iterativ Gipfel

Annahme: der Pfad zwischen v_ℓ und v_r enthält eine rote Kante

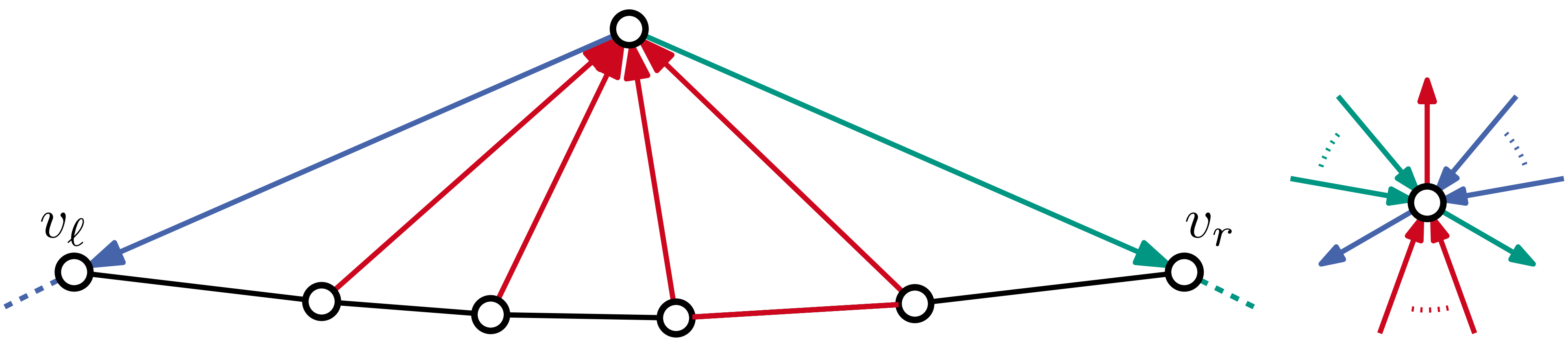


Existenz der Ordnung

Idee: lösche iterativ Gipfel

Annahme: der Pfad zwischen v_ℓ und v_r enthält eine rote Kante

Fall 1: mittlere Kante



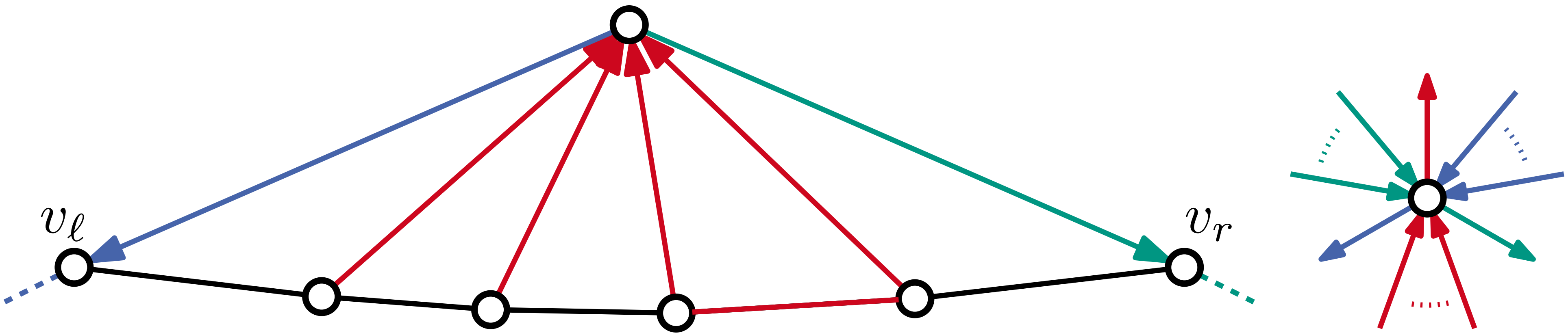
Existenz der Ordnung

Idee: lösche iterativ Gipfel

Annahme: der Pfad zwischen v_ℓ und v_r enthält eine rote Kante

Fall 1: mittlere Kante ↯

da G trianguliert



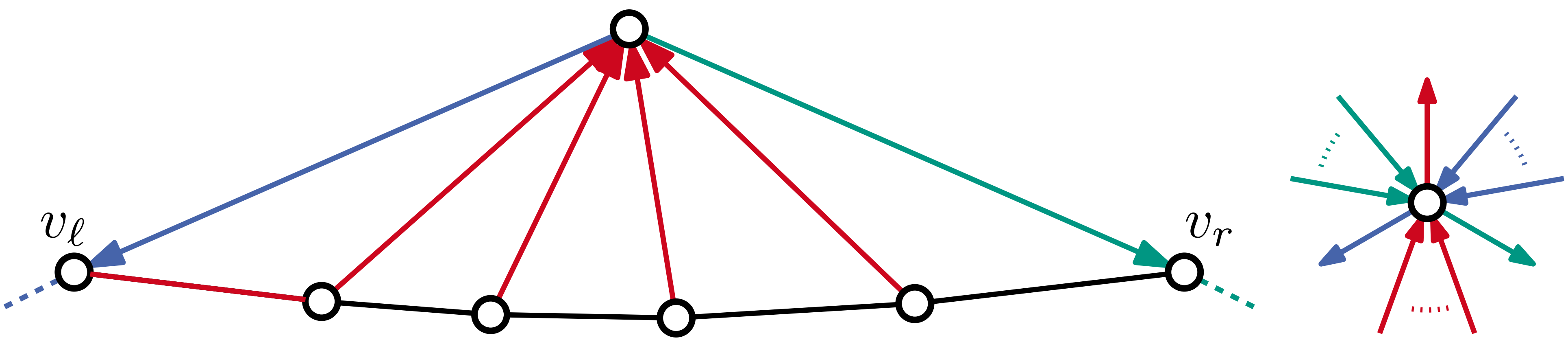
Existenz der Ordnung

Idee: lösche iterativ Gipfel

Annahme: der Pfad zwischen v_ℓ und v_r enthält eine rote Kante

Fall 1: mittlere Kante ↯

Fall 2: linke Kante da G trianguliert



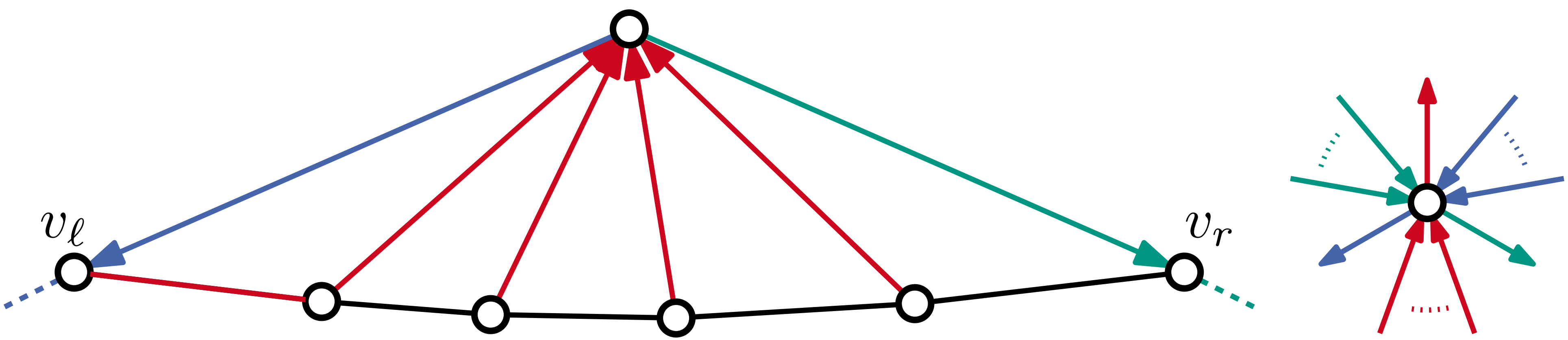
Existenz der Ordnung

Idee: lösche iterativ Gipfel

Annahme: der Pfad zwischen v_ℓ und v_r enthält eine rote Kante

Fall 1: mittlere Kante $\lightning$

Fall 2: linke Kante $\lightning$ da G trianguliert



Existenz der Ordnung

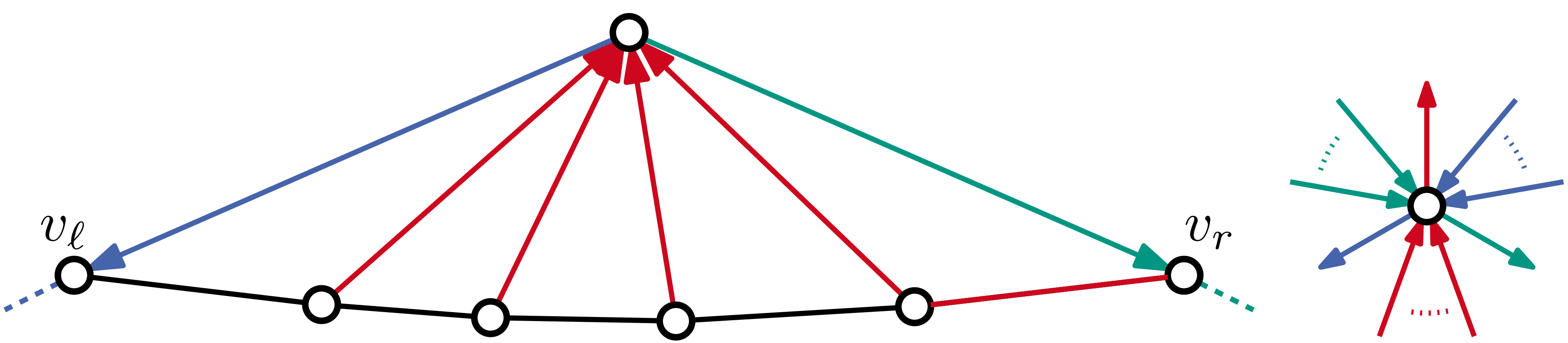
Idee: lösche iterativ Gipfel

Annahme: der Pfad zwischen v_ℓ und v_r enthält eine rote Kante

Fall 1: mittlere Kante ↯

Fall 2: linke Kante ↯ da G trianguliert

Fall 3: rechte Kante



Existenz der Ordnung

Idee: lösche iterativ Gipfel

Annahme: der Pfad zwischen v_ℓ und v_r enthält eine rote Kante

Fall 1: mittlere Kante ↯

Fall 2: linke Kante ↯ da G trianguliert

Fall 3: rechte Kante ↯