Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 20. Dezember 2011

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Definition

Zu einem polynomialen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ sei

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

Approximierbarkeit von COLOR

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

Problem COLOR (Optimalwertfassung)

Gegeben: Graph $G = (V, E)$

Frage: Wieviele Farben benötigt man um V zu färben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

Satz:
Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein relativer Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.

Approximierbarkeit von COLOR

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

Satz:
Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein relativer Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.

Beweis:

- Angenommen es gibt einen relativen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.
- Wir benutzen $\mathcal{A}$ um 3COLOR zu lösen.
- Dies ist ein Widerspruch zu $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$

Approximierbarkeit von COLOR

Zu zwei Graphen

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ und } G_2 = (V_2, E_2)$$

sei

$$G := (V, E) := G_1[G_2]$$

definiert durch

$$V := V_1 \times V_2$$

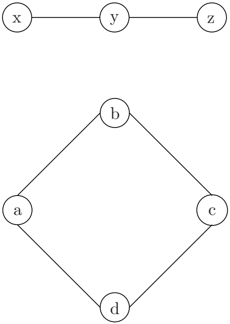
und

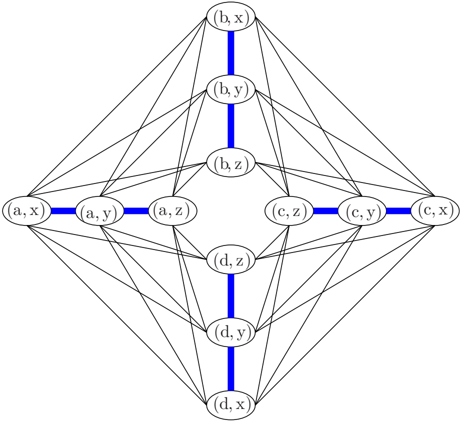
$$E := \left\{ \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{entweder } \{u_1, v_1\} \in E_1 \text{, oder} \\ u_1 = v_1 \text{ und } \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{array} \right\}$$

Anschaulich

- Jeder Knoten aus G_1 wird durch eine Kopie von G_2 ersetzt
- Jede Kante aus E_1 durch einen vollständig bipartiten Graphen zwischen den entsprechenden Kopien.

Approximierbarkeit von COLOR





Approximierbarkeit von COLOR

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0, \text{ so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

- Angenommen es gibt einen relativen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.
- Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathcal{A}(G) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G)$ für alle Graphen G mit $\mathrm{OPT}(G) \geq N$.

Approximierbarkeit von COLOR

- Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathcal{A}(G) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G)$ für alle Graphen G mit $\mathrm{OPT}(G) \geq N$.
- Sei also $G = (V, E)$ ein beliebiges Beispiel für 3COLOR.
- Dann definiere $G^* := K_N[G]$, wobei K_N der vollständige Graph über N Knoten ist.
- Dann gilt: $\mathrm{OPT}(G^*) = N \cdot \mathrm{OPT}(G) \geq N$.

Fallunterscheidung:

- Falls G dreifärbbar ist, gilt:

$$\mathcal{A}(G^*) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G^*) = \frac{4}{3} \cdot N \cdot \mathrm{OPT}(G) \leq \frac{4}{3} \cdot N \cdot 3 = 4N.$$

- Andererseits, falls G nicht dreifärbbar ist, gilt

$$\mathcal{A}(G^*) \geq \mathrm{OPT}(G^*) = N \cdot \mathrm{OPT}(G) \geq 4N.$$

Fazit: G ist dreifärbbar genau dann, wenn $\mathcal{A}(G^*) < 4N$.

Approximierbarkeit von COLOR

- Die Größe von G^* ist polynomial in der Größe von G.
- Also kann G^* in polynomialer Zeit konstruiert werden.
- Damit ist die Anwendung von $\mathcal{A}$ auf G^* polynomial in der Größe von G.
- Also haben wir einen polynomialen Algorithmus zur Lösung von 3COLOR konstruiert.
- Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Approximierbarkeit von TSP

TSP-Optimalwertproblem mit Dreiecksungleichung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ vollständig und gewichtet mit Gewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{Q}$.
Es gilt $c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$

Frage: Wie lange ist eine optimale Tour zu G bezüglich c?

Satz:
Für das TSP-Optimalwertproblem mit Dreiecksungleichung existiert ein Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \leq 2$ für alle Instanzen I.

Approximierbarkeit von TSP

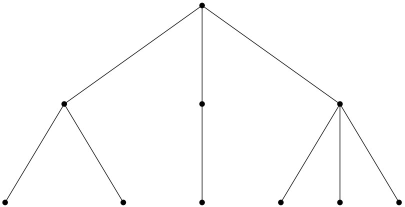
Beweis.

- Sei $(G = (V, E), c)$ eine Instanz des TSP-Optimalwertproblems mit Dreiecksungleichung.

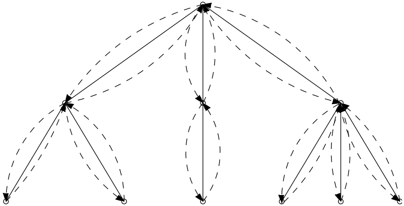
Betrachte folgenden Algorithmus:

- Berechne einen MST (Minimum Spanning Tree) von G.
- Wähle einen beliebigen Knoten w als Wurzel.
- Durchlaufe den MST in einer Tiefensuche mit Startpunkt w
- **Ergebnis:** Tour T mit Start- und Endpunkt w, die jede Kante zweimal durchläuft.
- Konstruiere aus T eine Tour T', indem bereits besuchte Knoten übersprungen werden und die Tour beim nächsten unbesuchten Knoten fortgesetzt wird.

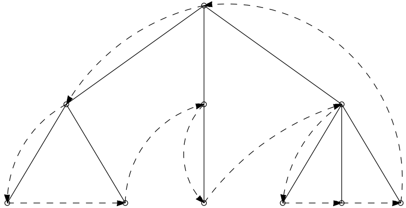
Approximierbarkeit von TSP



(a) MST eines Graphen



(b) Tiefensuch-Tour durch den MST



(c) TSP-Tour als abgekürzte Tiefensuch-Tour

Approximierbarkeit von TSP

- Bezeichne $c(G')$ die Summe der Kantengewichte in Subgraph G'

Es gilt

$$c(T') \leq c(T) = 2 \cdot c(MST) \; .$$

Eine TSP-Tour kann als ein aufspannender Baum plus eine zusätzliche Kante betrachtet werden. Also gilt

$$c(MST) \leq c(\mathrm{OPT}).$$

Insgesamt erhält man

$$c(T') \leq c(T) = 2 \cdot c(MST) \leq 2 \cdot c(\mathrm{OPT}),$$

also

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \frac{c(T')}{c(\mathrm{OPT})} \leq 2 \; .$$

Approximationsschemata

Ein (polynomiales) **Approximationsschema** (**PAS**) für ein Optimierungsproblem Π ist eine Familie von Algorithmen $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, so dass für alle $\varepsilon > 0$

- $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon$ ist (d.h. $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist ein ε–approximierender Algorithmus).
- $\mathcal{A}_\varepsilon$ polynomial in der Größe des Inputs ist.

Ein Approximationsschema $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ heißt **vollpolynomial** (**FPAS**) falls seine Laufzeit zudem polynomial in $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Approximationsschemata

Bezeichne $\langle I \rangle$ die Kodierungslänge der Eingabe-Instanz I.

Satz:
Sei Π ein $\mathcal{NP}$–schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom q mit $\mathrm{OPT}(I) < q(\langle I \rangle)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für Π.

Approximationsschemata

Karlsruher Institut für Technologie

Satz:
Sei Π ein $\mathcal{NP}$–schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom q mit $\mathrm{OPT}(I) < q(\langle I \rangle)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für Π.

Beweis:

- O.B.d.A. sei Π ein Maximierungsproblem.
- Sei $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ein FPAS für Π
- Zu $I \in D_\Pi$ sei $\varepsilon_0 := \frac{1}{q(\langle I \rangle)}$
- Dann ist $\mathcal{A}_{\varepsilon_0}$ polynomial in $\langle I \rangle$ und in $\frac{1}{\varepsilon_0} = q(\langle I \rangle)$

Approximationsschemata

Satz:
Sei Π ein $\mathcal{NP}$–schweres Optimierungsproblem mit

- $\text{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom q mit $\text{OPT}(I) < q(\langle I \rangle)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für Π.

Es gilt:

$$\begin{aligned} OPT(I) &\leq (1+\varepsilon_0)\mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \text{ und} \\ OPT(I) &< q(\langle I \rangle) = \frac{1}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Also auch

$$\text{OPT}(I) - \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \leq \varepsilon_0 \cdot \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \leq \varepsilon_0 \cdot \text{OPT}(I) < 1$$

- Da $\text{OPT}(I) \in \mathbb{N}$, ist $\text{OPT}(I) = \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I)$
- Widerspruch zur Annahme, dass $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Ein FPAS für KNAPSACK

Problem KNAPSACK

Gegeben: Eine endliche Menge M,
eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$,
eine Kostenfunktion $c : M \to \mathbb{N}_0$, $W \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: Gib eine Teilmenge M' von M an, so dass
$\sum_{i \in M'} w_i \leq W$ und $\sum_{i \in M'} c_i$ maximal ist.

Ein pseudopolynomialer, optimaler Algorithmus für KNAPSACK

Bezeichne, für $r \in \mathbb{N}_0$ $\quad w_r^j := \min_{M' \subseteq \{1,\dots,j\}} \left\{ \sum_{i \in M'} w_i \;\middle|\; \sum_{i \in M'} c_i = r \right\}$

- **Initialisierung**
  Für $1 \leq j \leq n$ setze $w_0^j := 0$ ansonsten setze $c := \sum_{i=1}^n c_i$
- **Berechung**
  Solange $w_r^j \leq W$ berechne für $2 \leq j \leq n$ und $1 \leq r \leq c$ den Wert

$$w_r^j = \min \left\{ w_{r-c_j}^{j-1} + w^j, w_r^{j-1} \right. .$$

- **Ausgabe**

$$c^* := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ r \mid w_r^j \leq W \right\}$$

und die entsprechende Menge $M' \subseteq M$ mit $c^* = \sum_{i \in M'} c_i$.

Ein pseudopolynomialer, optimaler Algorithmus für KNAPSACK

Bezeichne, für $r \in \mathbb{N}_0$ $\quad w_r^j := \min_{M' \subseteq \{1,\dots,j\}} \left\{ \sum_{i \in M'} w_i \;\middle|\; \sum_{i \in M'} c_i = r \right\}$

- **Initialisierung**

  Für $1 \leq j \leq n$ setze $w_0^j := 0$ ansonsten setze $c := \sum_{i=1}^n c_i$
- **Berechung**

  Solange $w_r^j \leq W$ berechne für $2 \leq j \leq n$ und $1 \leq r \leq c$ den Wert

$$w_r^j = \min \left\{ w_{r-c_j}^{j-1} + w^j, w_r^{j-1} \right. .$$

- **Ausgabe**

$$c^* := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ r \mid w_r^j \leq W \right\}$$

  und die entsprechende Menge $M' \subseteq M$ mit $c^* = \sum_{i \in M'} c_i$.

Laufzeit: in $\mathcal{O}(n \cdot c)$. **Lösung:** optimal.
$\Rightarrow$Optimaler pseudopolynomialer Algorithmus.

Ein FPAS für KNAPSACK

- Bezeichne $\mathcal{A}$ obigen pseudopolynomialen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n \cdot c)$ für KNAPSACK.
- Sei k beliebig aber fest.
- **Betrachte das skalierte Problem Π_k zu mit $c_i' := \left\lfloor \frac{c_i}{k} \right\rfloor$ für alle $i \in M$.**

- Dann liefert $\mathcal{A}$ für jedes $I_k \in \Pi_k$ eine Menge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{i \in M'} c_i' = \mathrm{OPT}(I_k)$.
- Setze nun $c_{\max} := \max_{i \in M} c_i$.
- **Zu $\varepsilon > 0$ sei $\mathcal{A}_\varepsilon$ Algorithmus $\mathcal{A}$ angewendet auf I_k, wobei**

$$k := \frac{c_{\max}}{\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \cdot n}$$

Ein FPAS für KNAPSACK

Satz:
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPAS für KNAPSACK.

Ein FPAS für KNAPSACK

Satz:
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPAS für KNAPSACK.

Beweis:

Die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(n \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i')$ und

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' < \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{k} \leq n \cdot \frac{c_{\max}}{k} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) n^2.$$

Also ist die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ in $\mathcal{O}(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$.

Ein FPAS für KNAPSACK

Für die Abschätzung von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}$ betrachte M' mit $\mathrm{OPT}(I) = \sum_{i \in M'} c_i$. Es gilt

$$\mathrm{OPT}(I_k) \geq \sum_{i \in M'} \left\lfloor \frac{c_i}{k} \right\rfloor \geq \sum_{i \in M'} \left(\frac{c_i}{k} - 1 \right) .$$

Also ist

$$\mathrm{OPT}(I) - k \cdot \mathrm{OPT}(I_k) \leq k \cdot n.$$

Da $\frac{1}{k}\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq \mathrm{OPT}(I_k)$ ist, folgt

$$\mathrm{OPT}(I) - \mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq k \cdot n$$

und wegen $\mathrm{OPT}(I) \geq c_{\max}$ (wir setzen wieder o.B.d.A. $W \geq w_i$ für alle $i \in M$ voraus) folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) &= \frac{\mathrm{OPT}(I)}{\mathcal{A}_\varepsilon(I)} \leq \frac{\mathcal{A}_\varepsilon(I) + kn}{\mathcal{A}_\varepsilon(I)} &= 1 + \frac{kn}{\mathcal{A}_\varepsilon(I)} \leq 1 + \frac{kn}{\mathrm{OPT}(I) - kn} \\ &\leq 1 + \frac{kn}{c_{\max} - kn} &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1 - 1} = 1 + \varepsilon . \end{aligned}$$

Ein allgemeineres Resultat

Mit einem ähnlichen Beweis kann man zeigen:

Satz:
Sei Π ein Optimierungsproblem für das gilt:

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$
- es existiert ein Polynom q mit $\mathrm{OPT}(I) \leq q(\langle I \rangle + \max \#(I))$
  ($\max \#(I)$ ist die größte in I vorkommende Zahl)

Falls Π ein FPAS hat, so hat es einen pseudopolynomialen optimalen Algorithmus.