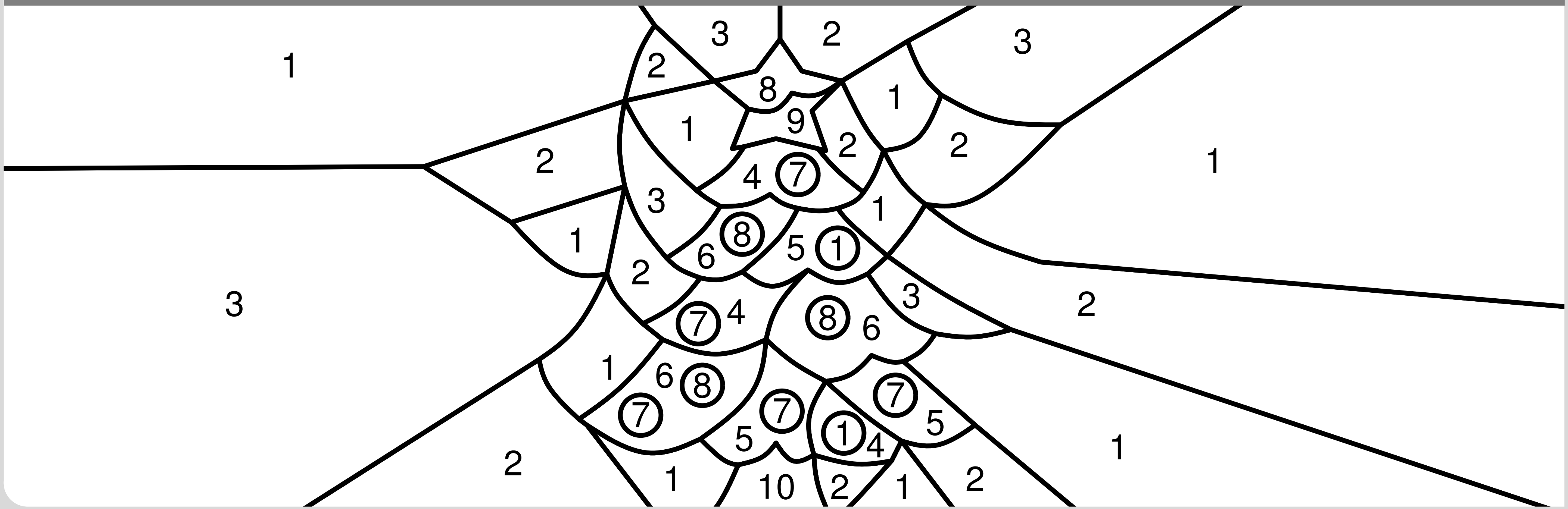
Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen II
Gastvorlesung am 18.12.2012

Färbung planare Graphen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

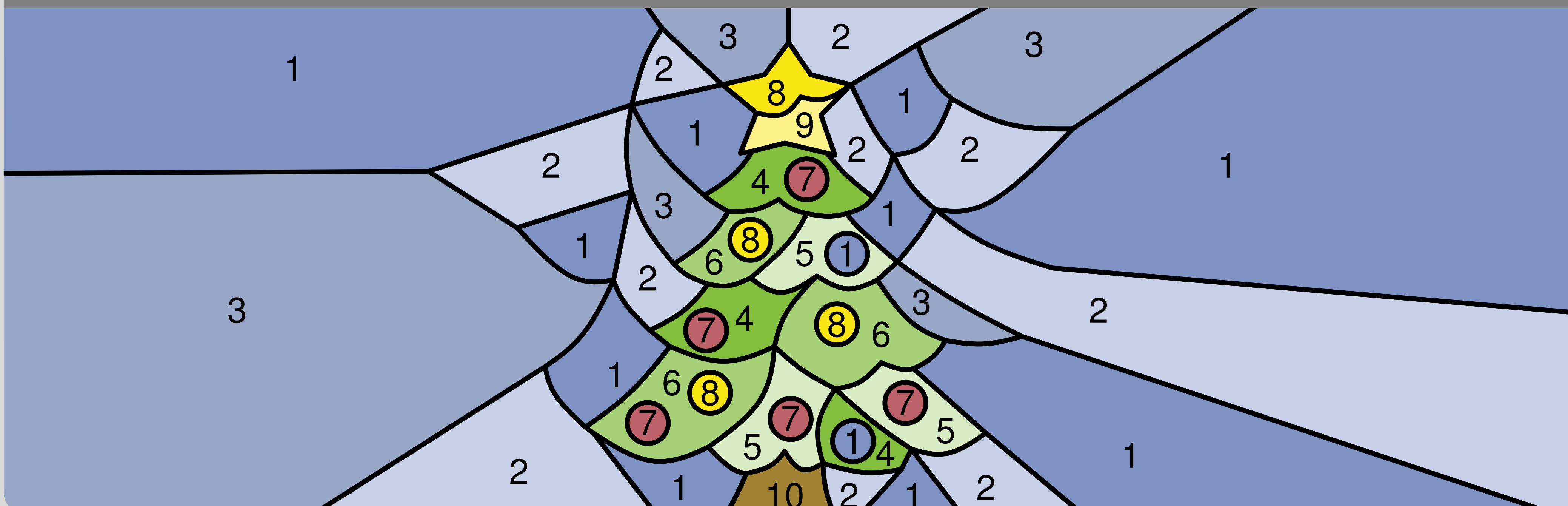


Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen II
Gastvorlesung am 18.12.2012

Färbung planare Graphen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

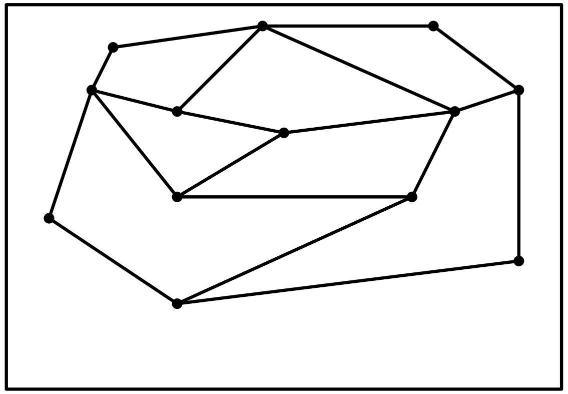


Färbungsproblem

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Karten Färben

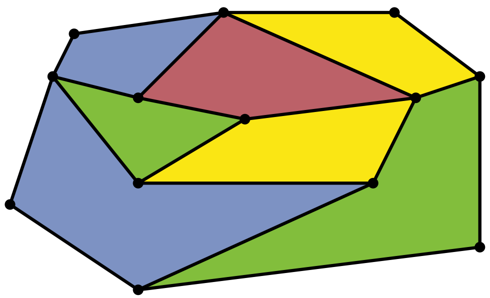
Problem: MAP COLORING
Gegeben ist eine Unterteilung der Ebene. Finde eine Färbung der Regionen, sodass benachbarte Regionen unterschiedlich gefärbt sind.



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Karten Färben

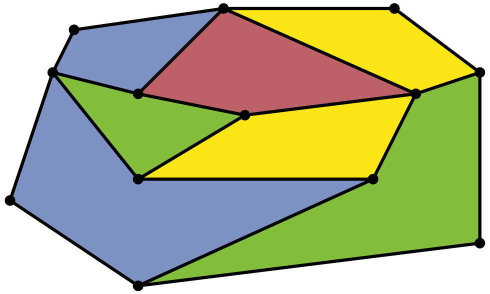
Problem: MAP COLORING
Gegeben ist eine Unterteilung der Ebene. Finde eine Färbung der Regionen, sodass benachbarte Regionen unterschiedlich gefärbt sind.



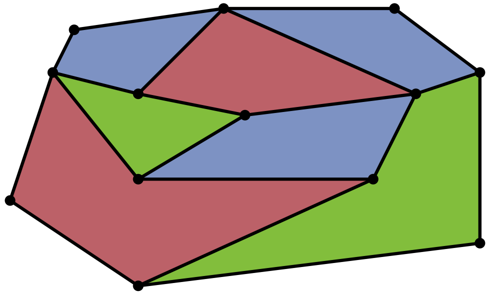
4-Färbung

Karten Färben

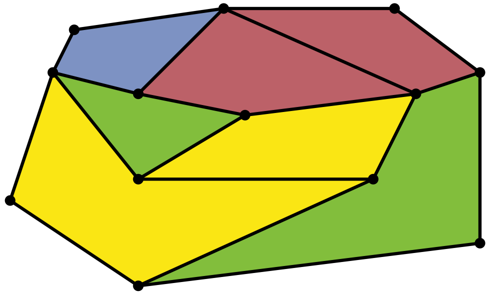
Problem: MAP COLORING
Gegeben ist eine Unterteilung der Ebene. Finde eine Färbung der Regionen, sodass benachbarte Regionen unterschiedlich gefärbt sind.



4-Färbung



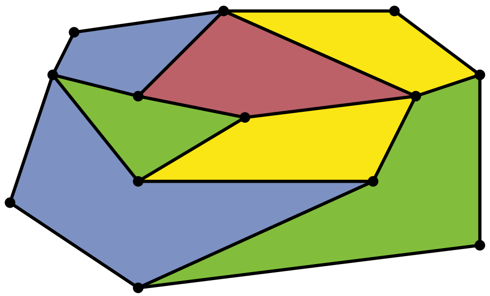
3-Färbung

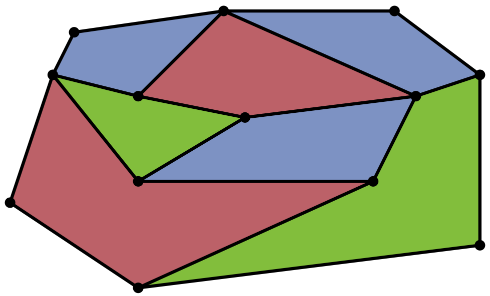


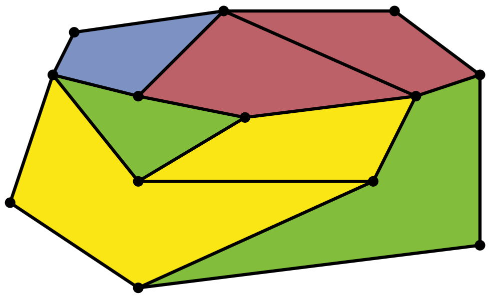
ungültige Färbung

Karten Färben

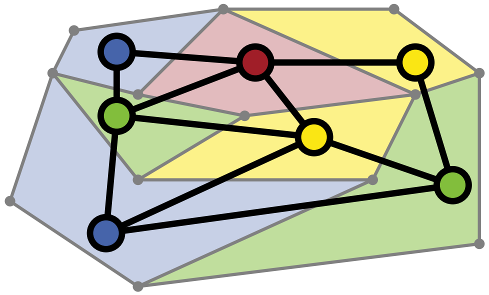
Problem: MAP COLORING
Gegeben ist eine Unterteilung der Ebene. Finde eine Färbung der Regionen, sodass benachbarte Regionen unterschiedlich gefärbt sind.

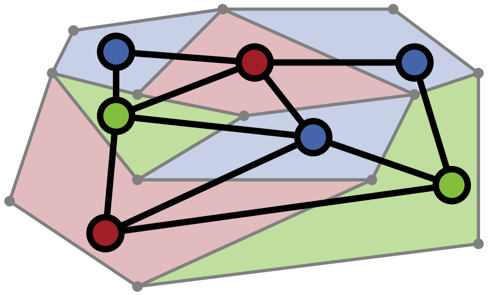

4-Färbung

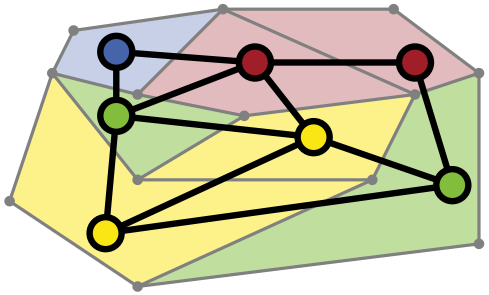

3-Färbung


ungültige Färbung

Repräsentation als Graph


4-Färbung

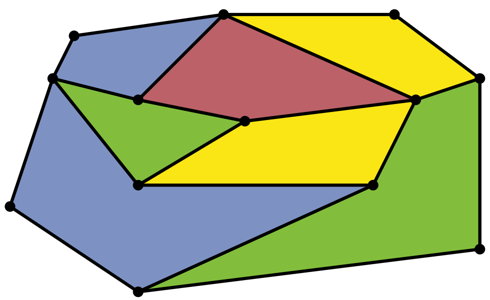

3-Färbung

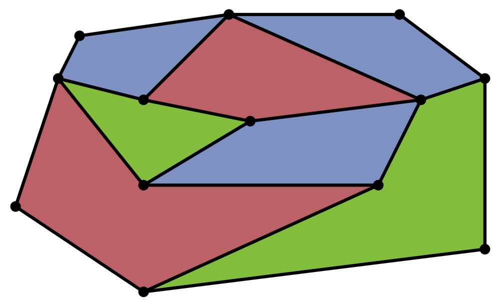

ungültige Färbung

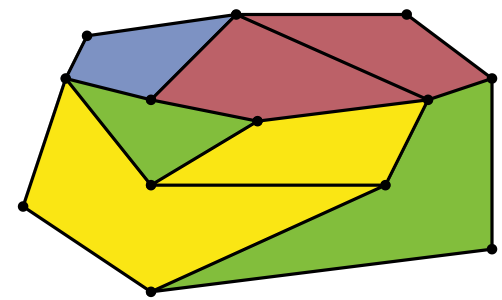
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Karten Färben

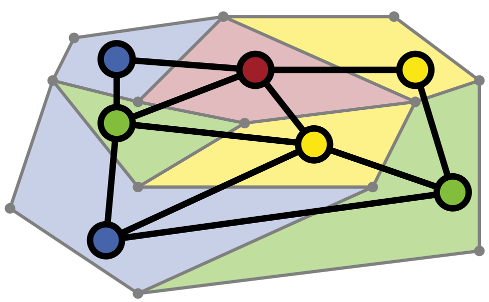
Problem: MAP COLORING
Gegeben ist eine Unterteilung der Ebene. Finde eine Färbung der Regionen, sodass benachbarte Regionen unterschiedlich gefärbt sind.

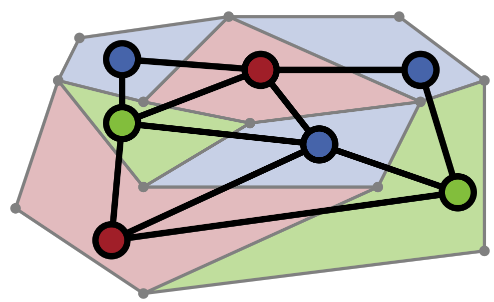

4-Färbung

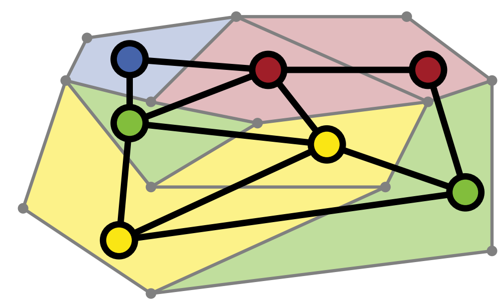

3-Färbung


ungültige Färbung

Repräsentation als Graph


4-Färbung


3-Färbung


ungültige Färbung

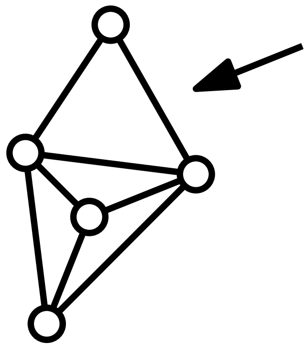
Es ist $\mathcal{NP}$-schwer zu testen, ob ein Graph k-färbbar ist (für $k \geq 3$).

Planare Graphen

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Planare Graphen

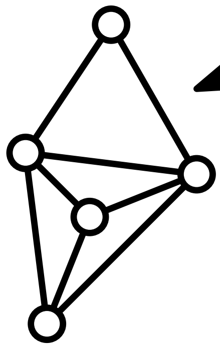
Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

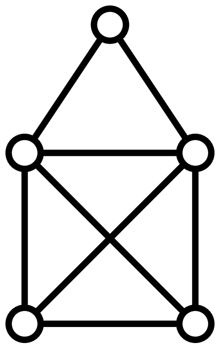
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



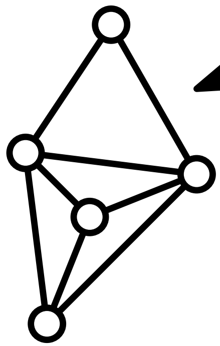
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar



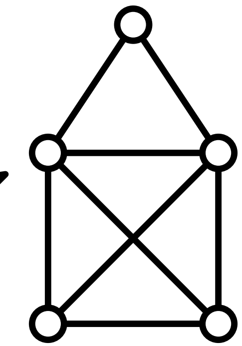
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

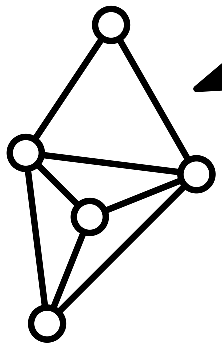
nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar



Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

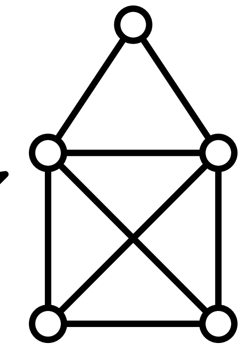
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



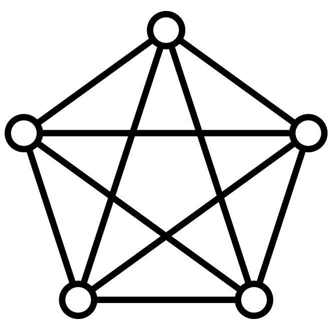
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar



Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

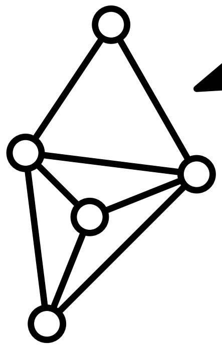
Der K_5 (vollständiger Graph mit 5 Knoten) ist nicht planar.



Beweis:

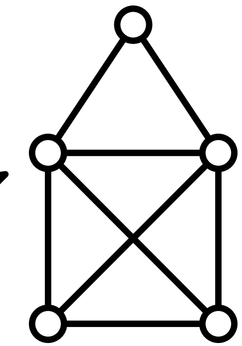
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



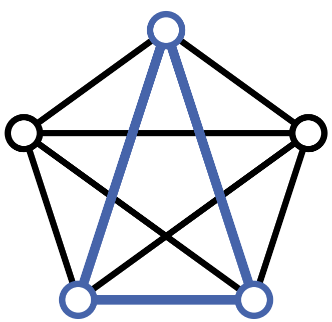
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar

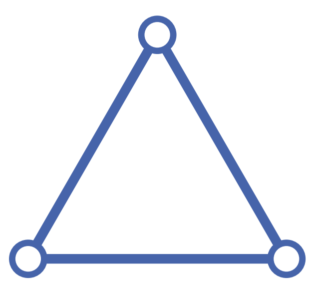


Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

Der K_5 (vollständiger Graph mit 5 Knoten) ist nicht planar.



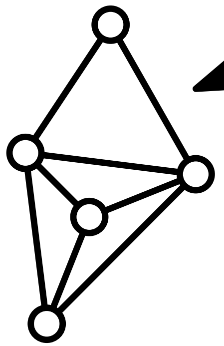
Beweis:



zeichne erstes Dreieck

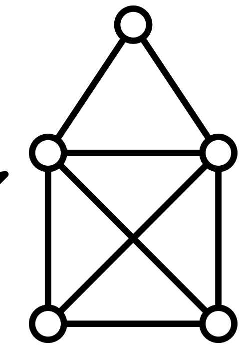
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



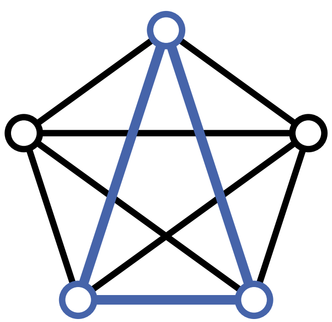
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar

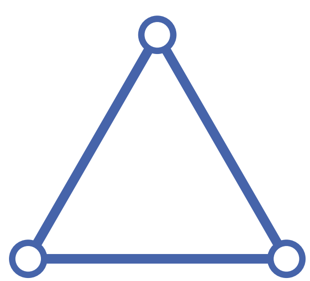


Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

Der K_5 (vollständiger Graph mit 5 Knoten) ist nicht planar.



Beweis:



zeichne erstes Dreieck

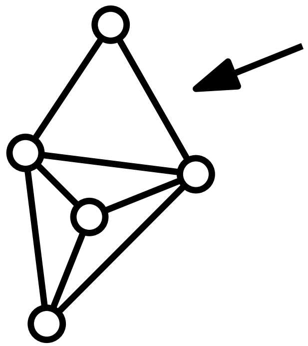
beide anderen Knoten im Dreieck

kein Knoten im Dreieck

einer Innen, einer Außen

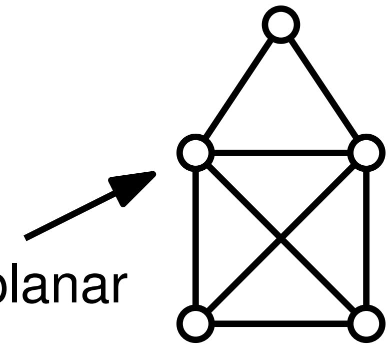
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



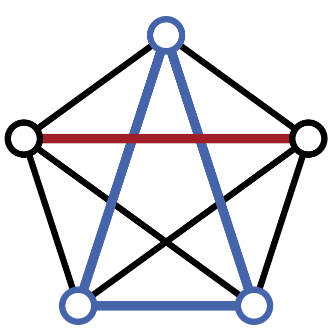
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar

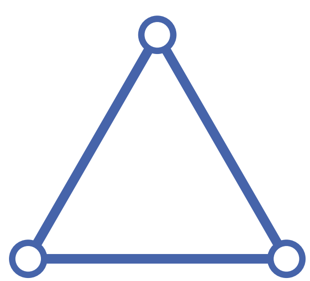


Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

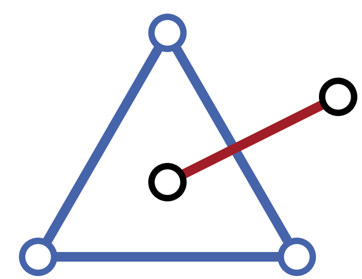
Der K_5 (vollständiger Graph mit 5 Knoten) ist nicht planar.



Beweis:



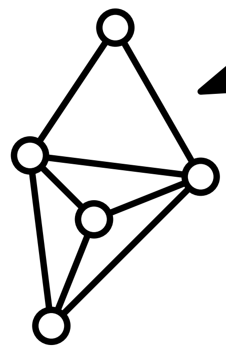
zeichne erstes Dreieck



einer Innen, einer Außen

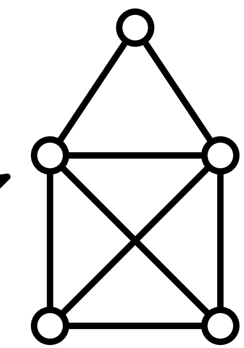
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



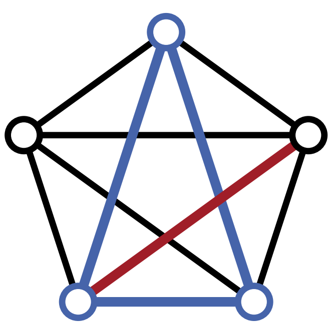
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar

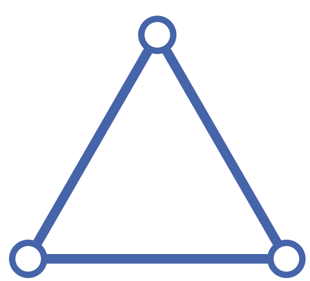


Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

Der K_5 (vollständiger Graph mit 5 Knoten) ist nicht planar.

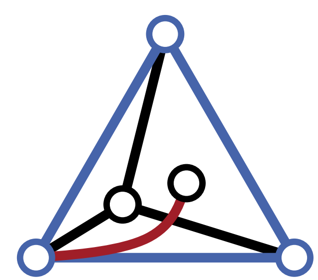


Beweis:



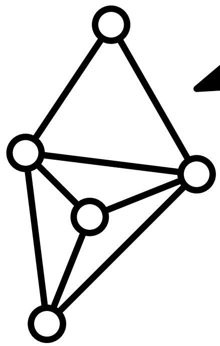
zeichne erstes Dreieck

beide anderen Knoten im Dreieck



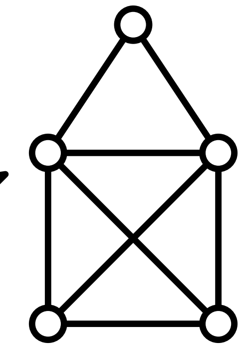
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



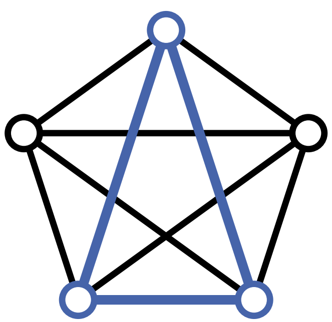
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar

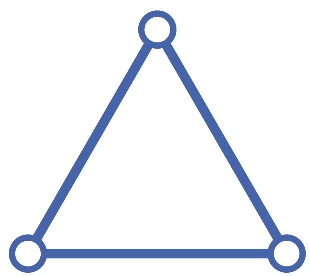


Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

Der K_5 (vollständiger Graph mit 5 Knoten) ist nicht planar.



Beweis:



zeichne erstes Dreieck

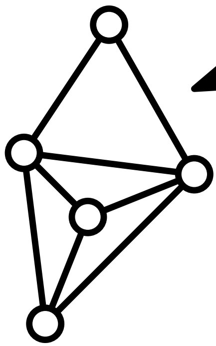
kein Knoten im Dreieck

$\rightarrow$ genauso, wie beide Innen

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

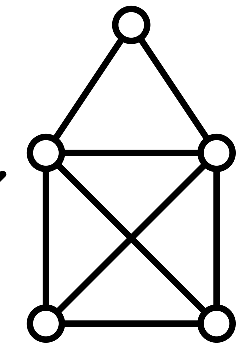
Planare Graphen

Definition: Planare Graphen
Ein Graph ist planar, wenn er kreuzungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.



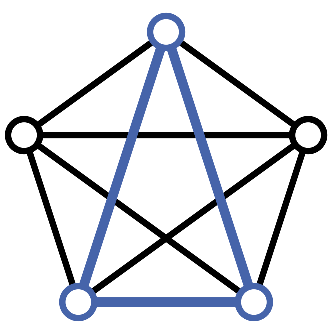
planare Zeichnung $\Rightarrow$ Graph ist planar

nicht-planare Zeichnung, Graph ist trotzdem planar

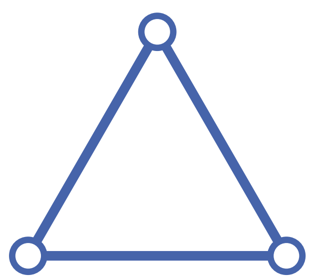


Gibt es überhaupt Graphen, die nicht planar sind?

Der K_5 (vollständiger Graph mit 5 Knoten) ist nicht planar.



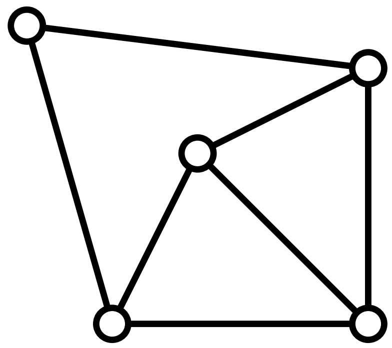
Beweis:



zeichne erstes Dreieck

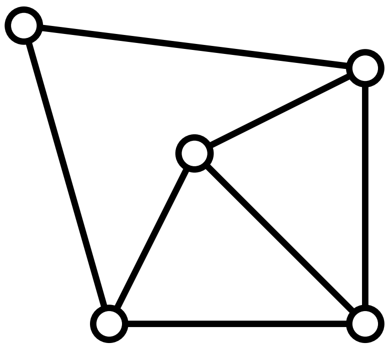
- beide anderen Knoten im Dreieck ✗
- kein Knoten im Dreieck ✗
- einer Innen, einer Außen ✗

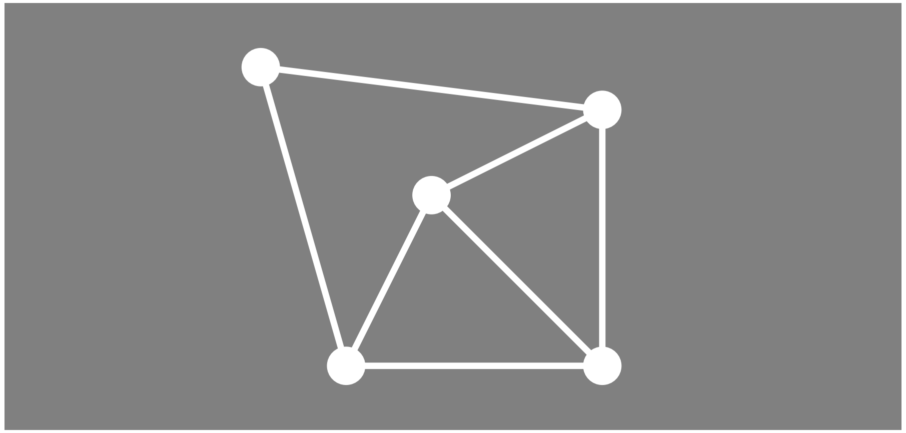
Facetten



Eine planare Zeichnung eines Graphen

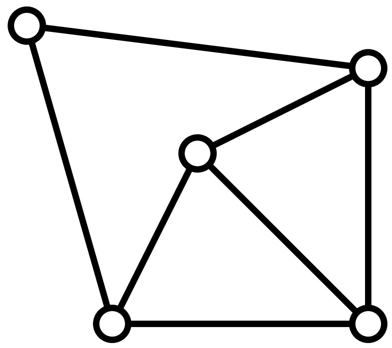
Facetten

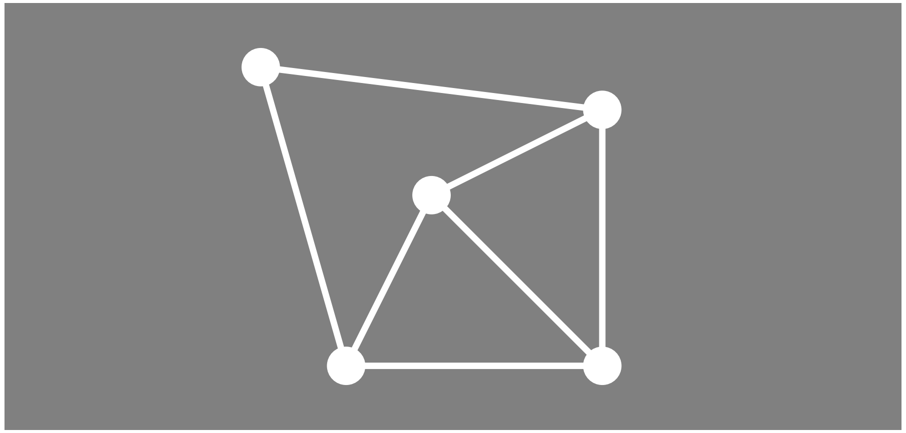




Eine planare Zeichnung eines Graphen ... zerlegt die Ebene in mehrere Regionen.

Facetten

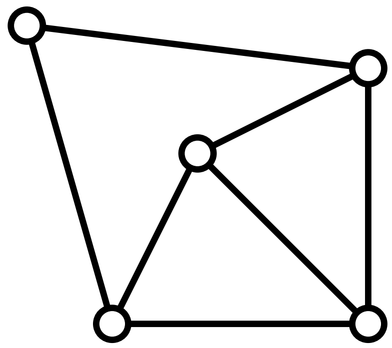


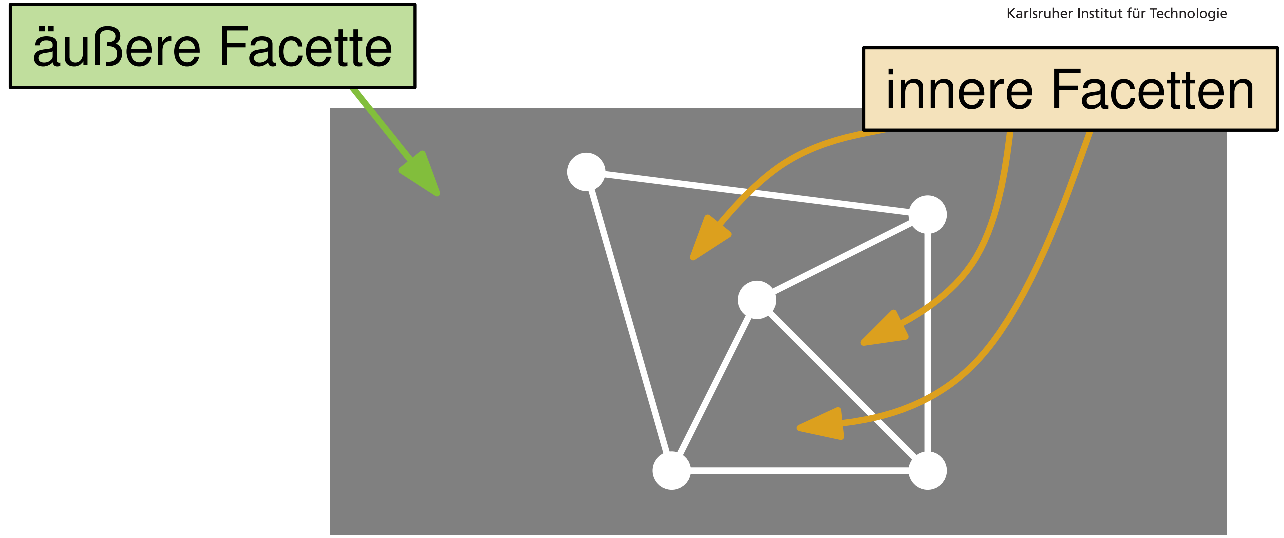


Eine planare Zeichnung eines Graphen ... zerlegt die Ebene in mehrere Regionen.

Definition: Facetten
Wir nennen diese Regionen *Facetten*. Sei f die Anzahl der Facetten.

Facetten



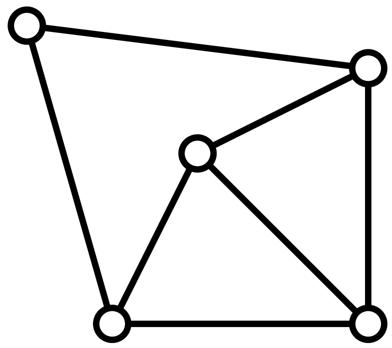


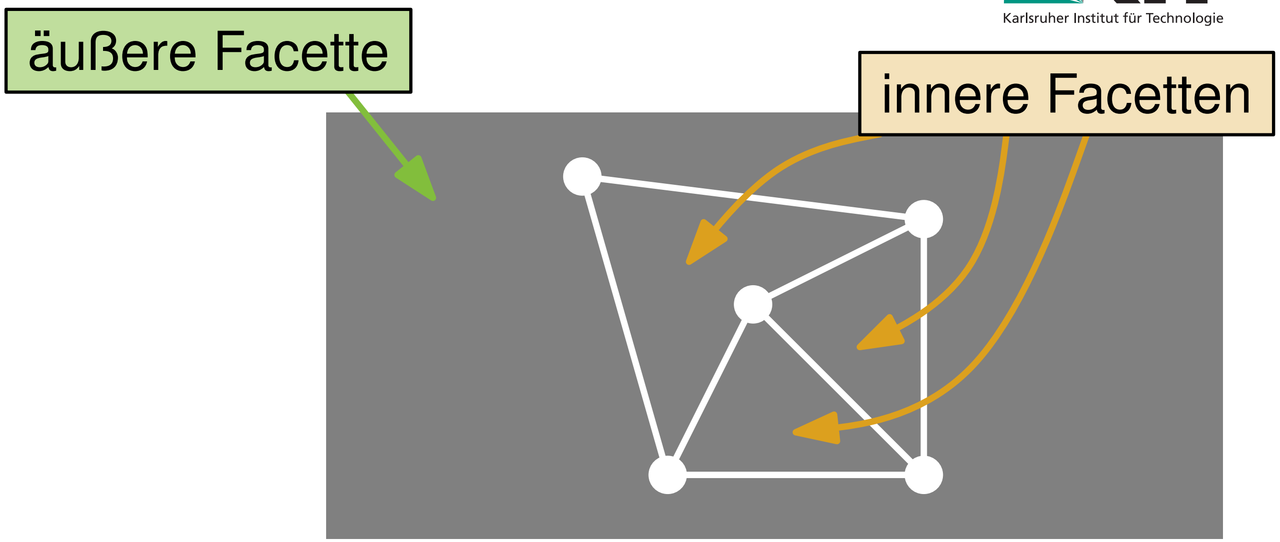
Eine planare Zeichnung eines Graphen ... zerlegt die Ebene in mehrere Regionen.

Definition: Facetten
Wir nennen diese Regionen *Facetten*. Sei f die Anzahl der Facetten.

Beachte: Es gibt mehrere innere und eine äußere Facette.

Facetten





Eine planare Zeichnung eines Graphen ...zerlegt die Ebene in mehrere Regionen.

Definition: Facetten
Wir nennen diese Regionen *Facetten*. Sei f die Anzahl der Facetten.

Beachte: Es gibt mehrere innere und eine äußere Facette.

Satz: Satz von Euler
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2 \ .$$

Satz von Euler

Satz: Satz von Euler

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2 \ .$$

Beweis:

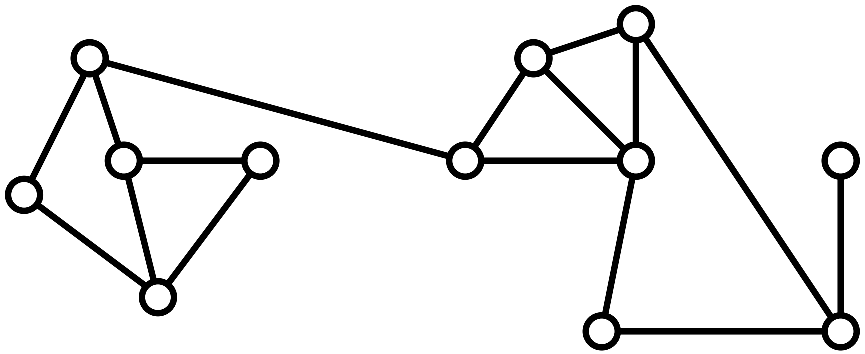
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Satz von Euler

Satz: Satz von Euler
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2 \ .$$

Beweis:
Betrachte beliebigen Graphen und lösche nach und nach Kanten



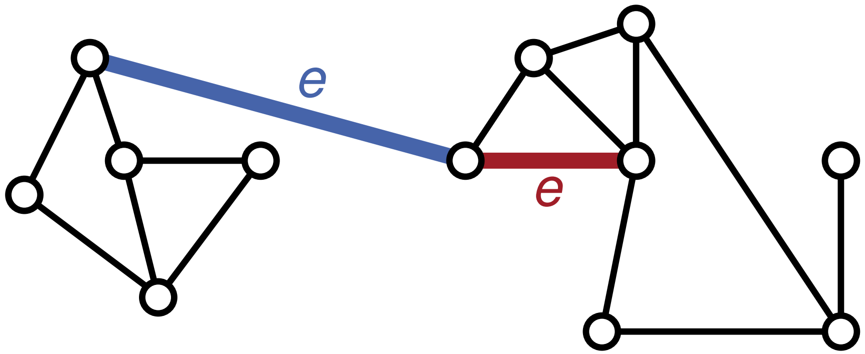
Satz von Euler

Satz: Satz von Euler
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt
$$n - m + f = 2 \ .$$

Beweis:
Betrachte beliebigen Graphen und lösche nach und nach Kanten

Löschen von e

a) erhöht Anzahl Zusammenhangskomponenten um 1
b) verringert Anzahl Facetten um 1



Satz von Euler

Satz: Satz von Euler
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

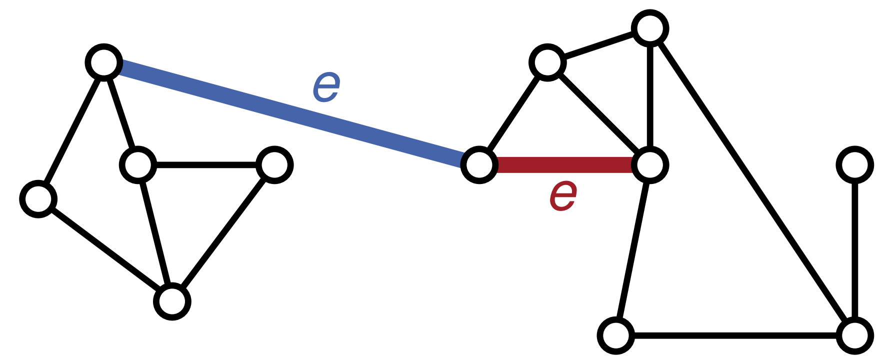
$$n - m + f = 2 \ .$$

Beweis:
Betrachte beliebigen Graphen und lösche nach und nach Kanten

Löschen von e

a) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1

b) verringert Anzahl Facetten um 1



	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen

Satz von Euler

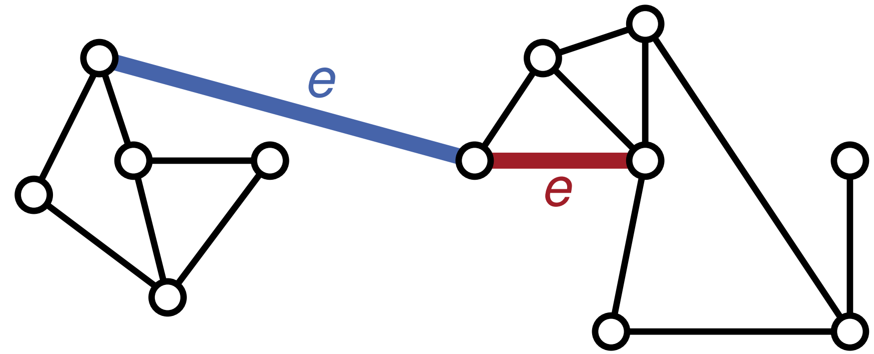
Satz: Satz von Euler
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt
$$n - m + f = 2 \ .$$

Beweis:
Betrachte beliebigen Graphen und lösche nach und nach Kanten

Löschen von e

a) erhöht Anzahl Zusammenhangskomponenten um 1

b) verringert Anzahl Facetten um 1



	Anfang	Ende	Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$ m Operationen
#Zusammenhangskomponenten	1	n	$\Rightarrow$ $(n-1)\times$ Typ a)

Satz von Euler

Satz: Satz von Euler
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

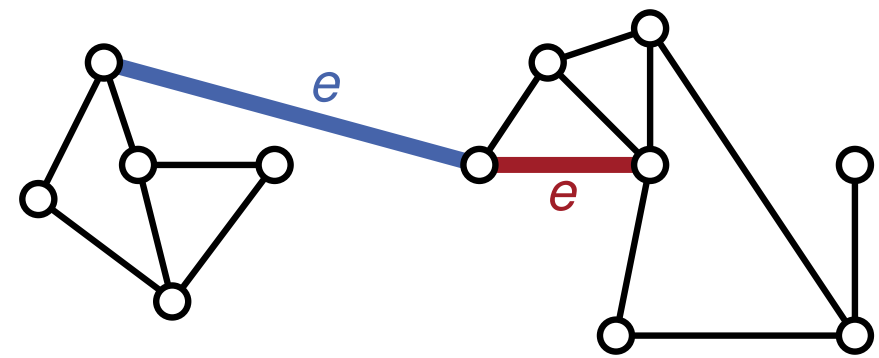
$$n - m + f = 2 \ .$$

Beweis:
Betrachte beliebigen Graphen und lösche nach und nach Kanten

Löschen von e

a) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1

b) verringert Anzahl Facetten um 1



	Anfang	Ende	Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$ m Operationen
#Zusammenhangskomponenten	1	n	$\Rightarrow (n-1)\times$ Typ a)
#Facetten	f	1	$\Rightarrow (f-1)\times$ Typ b)

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Satz von Euler

Satz: Satz von Euler
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

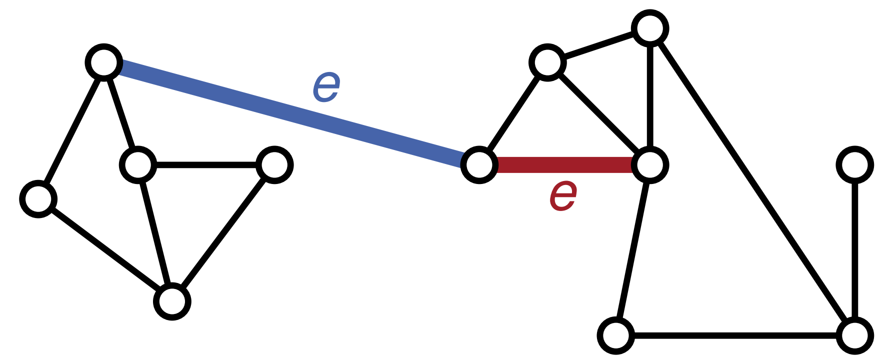
$$n - m + f = 2 \ .$$

Beweis:
Betrachte beliebigen Graphen und lösche nach und nach Kanten

Löschen von e

a) erhöht Anzahl Zusammenhangs-komponenten um 1

b) verringert Anzahl Facetten um 1



	Anfang	Ende		Operationen
#Kanten	m	0	$\Rightarrow$	m Operationen
#Zusammenhangskomponenten	1	n	$\Rightarrow$	$(n - 1) \times$ Typ a)
#Facetten	f	1	$\Rightarrow$	$(f - 1) \times$ Typ b)

$$m = n + f - 2$$

Beschränkung der Kantenzahl

Korollar: Planare Graphen sind dünn

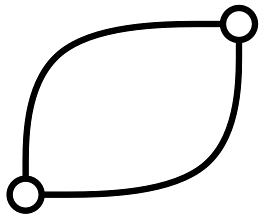
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.

Beschränkung der Kantenzahl

Korollar: Planare Graphen sind dünn
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.

- Jede Facette grenzt an mindestens drei Kanten

  $\Rightarrow$ mindestens $3f$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette

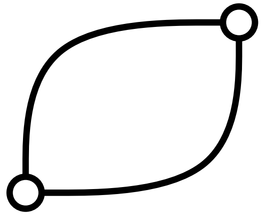


nicht einfach!

Beschränkung der Kantenzahl

Korollar: Planare Graphen sind dünn
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.

- Jede Facette grenzt an mindestens drei Kanten
  $\Rightarrow$ mindestens $3f$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette



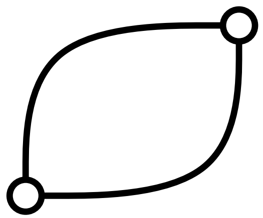
- Jede Kante grenzt an höchstens zwei Facetten
  $\Rightarrow$ höchstens $2m$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette

Beschränkung der Kantenzahl

Korollar: Planare Graphen sind dünn
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.

- Jede Facette grenzt an mindestens drei Kanten

  $\Rightarrow$ mindestens $3f$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette



nicht einfach!

- Jede Kante grenzt an höchstens zwei Facetten

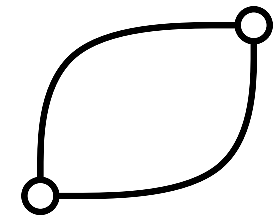
  $\Rightarrow$ höchstens $2m$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette

$$3f \leq 2m$$

$$n - m + f = 2$$

Beschränkung der Kantenzahl

Korollar: Planare Graphen sind dünn
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.



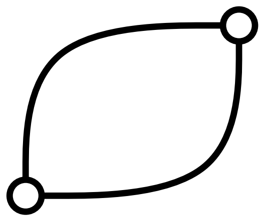
nicht einfach!

- Jede Facette grenzt an mindestens drei Kanten
  $\Rightarrow$ mindestens $3f$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette
- Jede Kante grenzt an höchstens zwei Facetten
  $\Rightarrow$ höchstens $2m$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette

$$\left.\begin{array}{c} 3f \leq 2m \\[2em] n - m + f = 2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{c} f \leq \frac{2}{3}m \\[2em] m = n + f - 2 \end{array}$$

Beschränkung der Kantenzahl

Korollar: Planare Graphen sind dünn
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.



nicht einfach!

- Jede Facette grenzt an mindestens drei Kanten
  $\Rightarrow$ mindestens $3f$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette
- Jede Kante grenzt an höchstens zwei Facetten
  $\Rightarrow$ höchstens $2m$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette

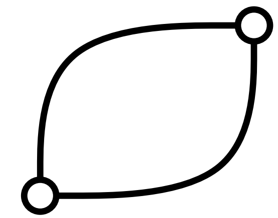
$$\left.\begin{array}{c} 3f \leq 2m \\ \\ n - m + f = 2 \end{array}\right\rangle \quad \left.\begin{array}{c} f \leq \frac{2}{3}m \\ \\ m = n + f - 2 \end{array}\right\rangle \quad m \leq n + \frac{2}{3}m - 2$$

Beschränkung der Kantenzahl

Karlsruher Institut für Technologie

Korollar: Planare Graphen sind dünn
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt $m \leq 3n - 6$.

- Jede Facette grenzt an mindestens drei Kanten
  $\Rightarrow$ mindestens $3f$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette



nicht einfach!

- Jede Kante grenzt an höchstens zwei Facetten
  $\Rightarrow$ höchstens $2m$ Nachbarschaften Kante $\leftrightarrow$ Facette

$$\left.\begin{array}{c} 3f \leq 2m \\[1em] n - m + f = 2 \end{array}\right\rangle \quad \left.\begin{array}{c} f \leq \frac{2}{3} m \\[1em] m = n + f - 2 \end{array}\right\rangle \quad m \leq n + \frac{2}{3} m - 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} m \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Existenz von Knoten mit kleinem Grad

Korollar: Knoten mit kleinem Grad
Jeder einfache planare Graph enthält einen Knoten mit Grad höchstens 5.

Existenz von Knoten mit kleinem Grad

Korollar: Knoten mit kleinem Grad
Jeder einfache planare Graph enthält einen Knoten mit Grad höchstens 5.

Graph enthält höchstens $3n - 6$ Kanten

$\Rightarrow$ Durchschnittlicher Knotengrad ist $(6n - 12)/n < 6$

$\Rightarrow$ Es muss einen Knoten mit Grad ≤ 5 geben.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

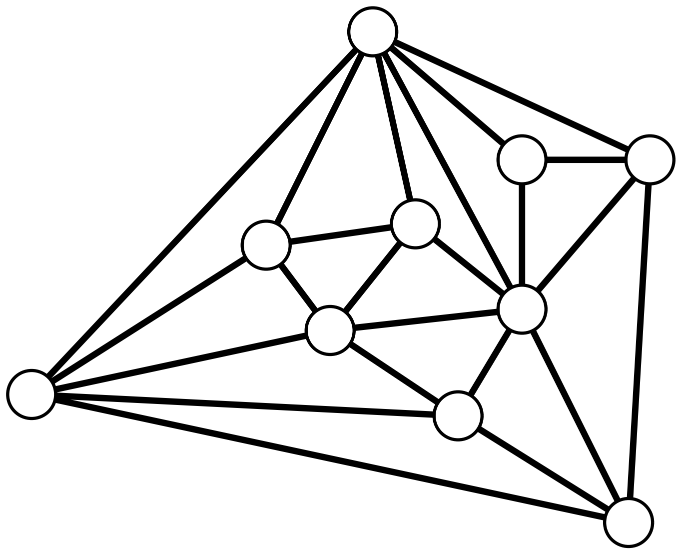
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

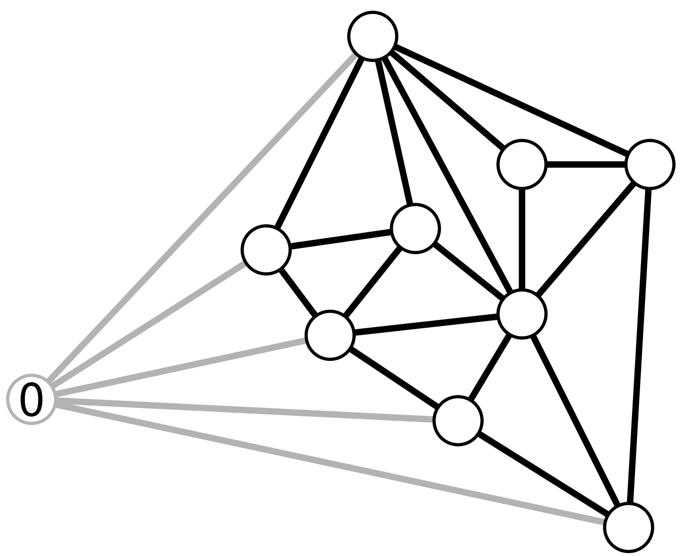
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

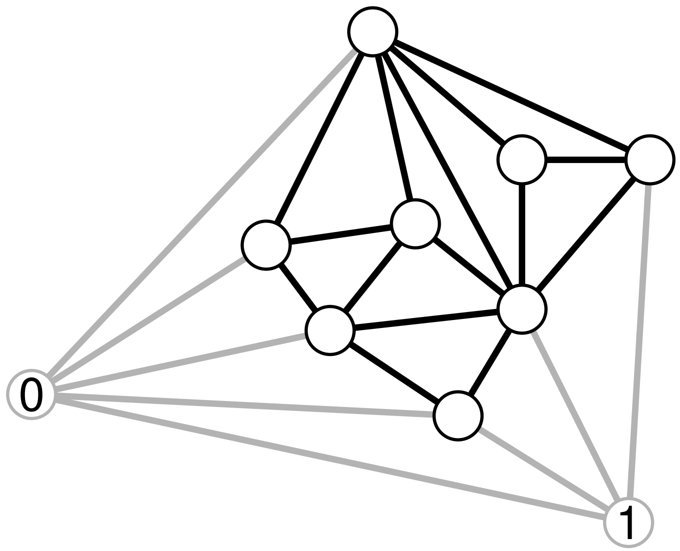
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

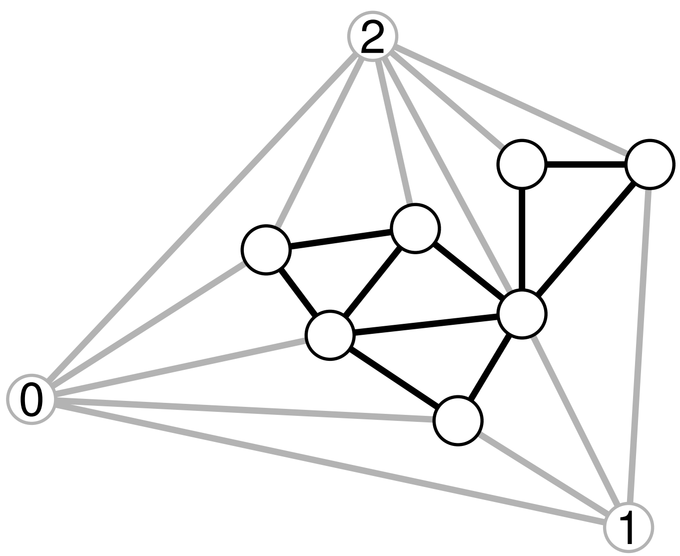
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

6-Färbung

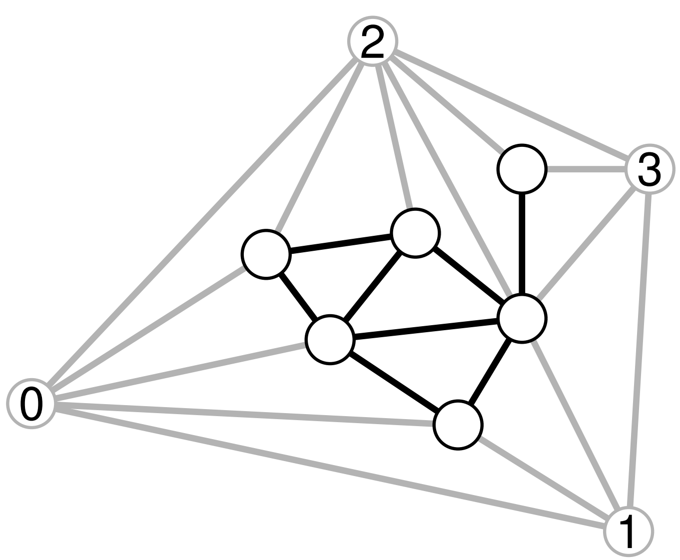
Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.

  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

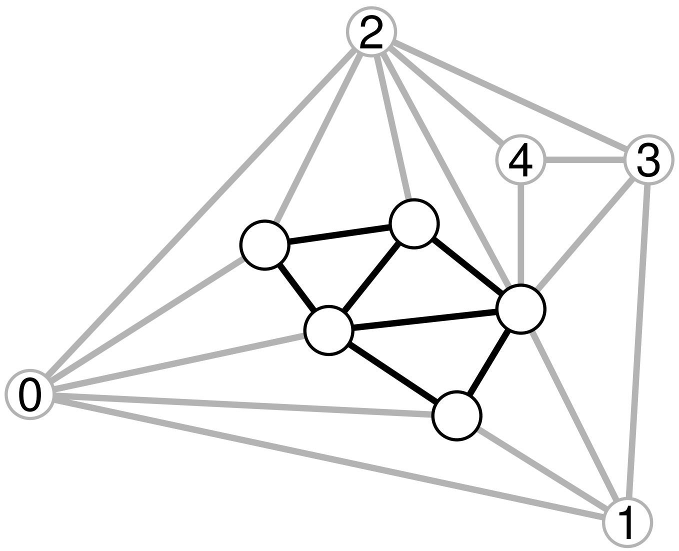
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

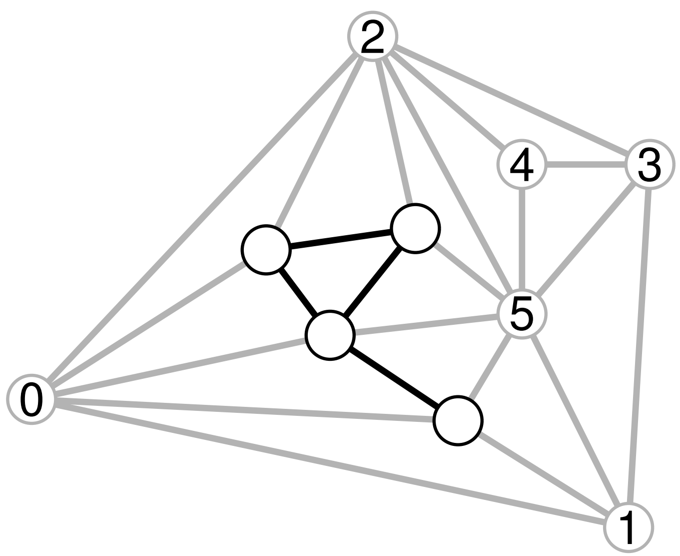
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

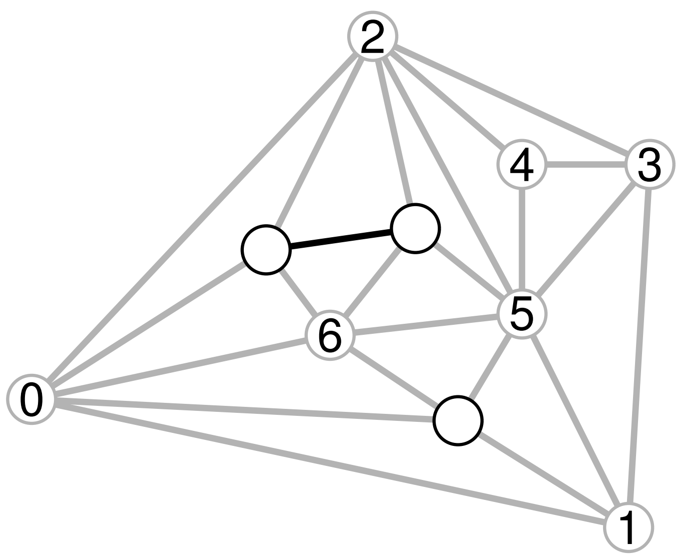
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

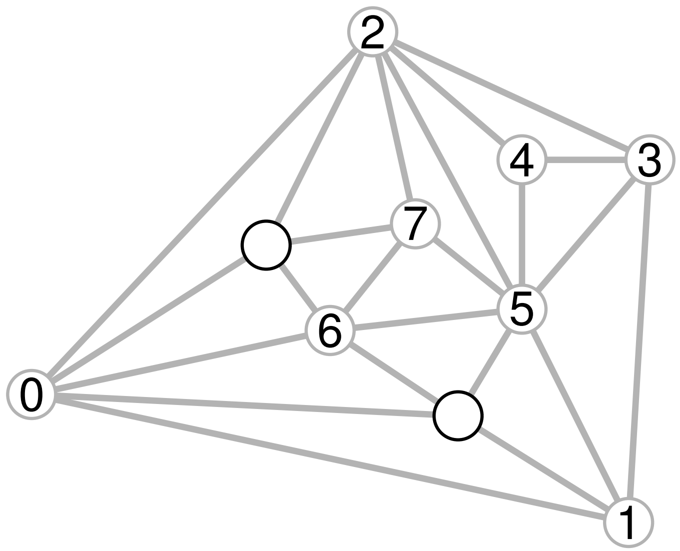
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

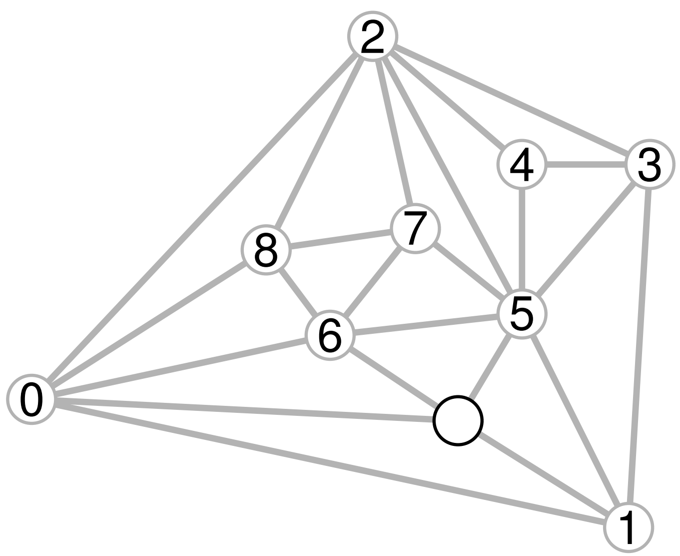
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

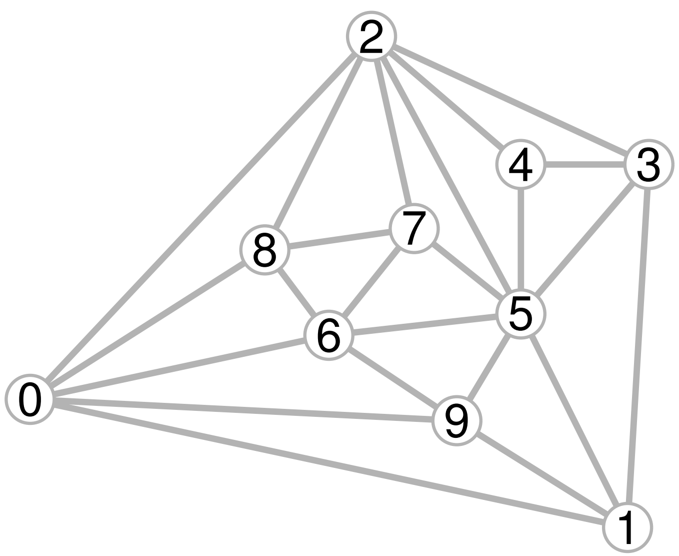
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

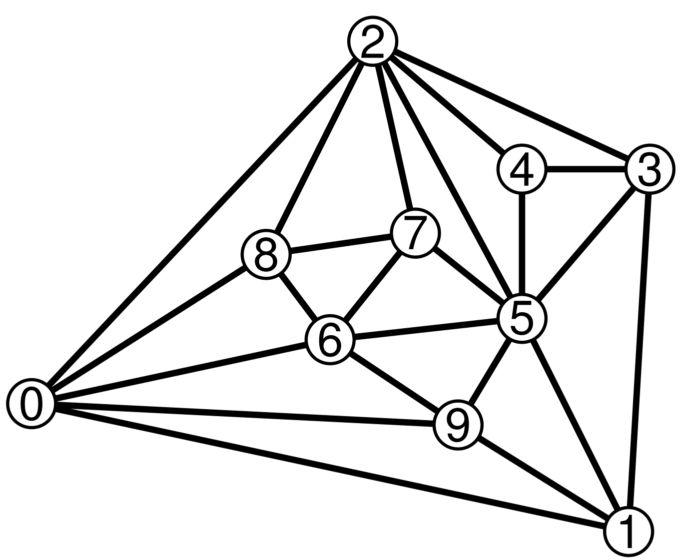
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

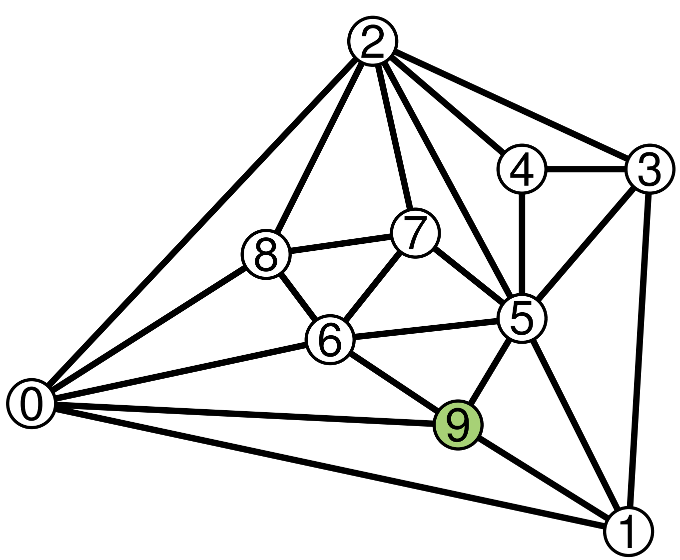
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

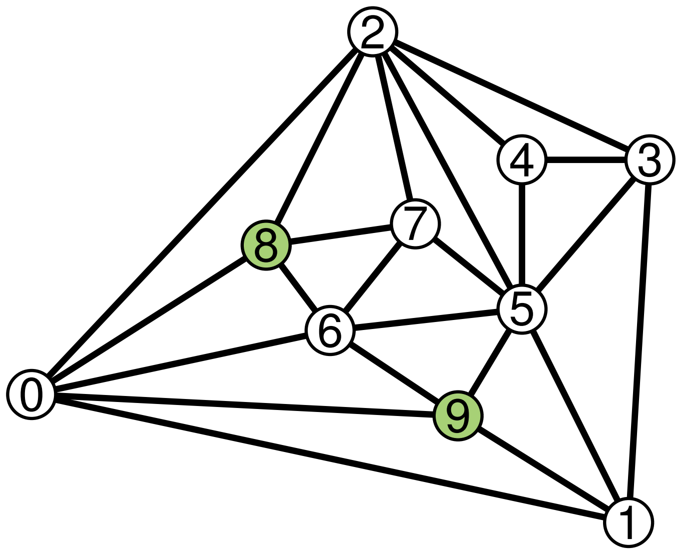
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

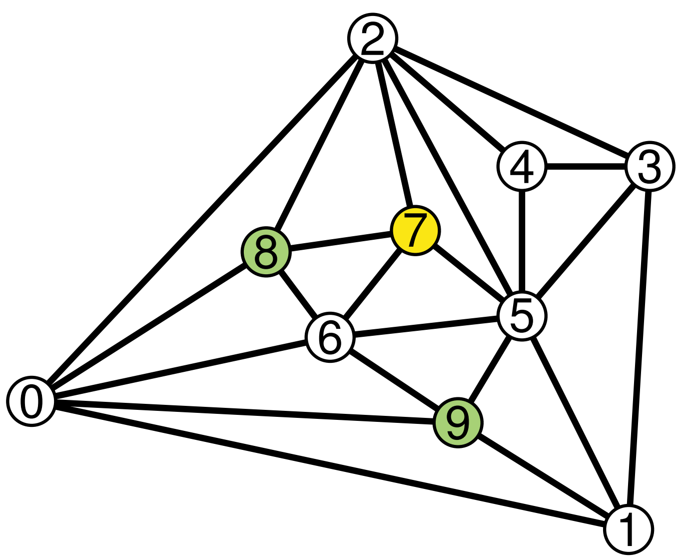
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

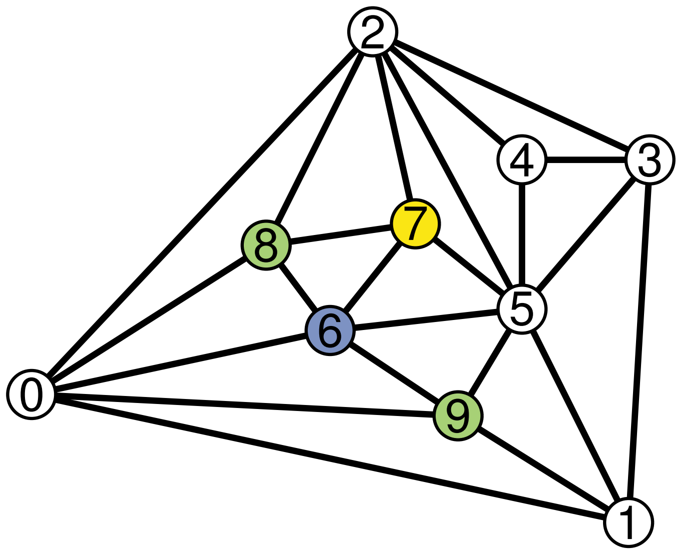
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

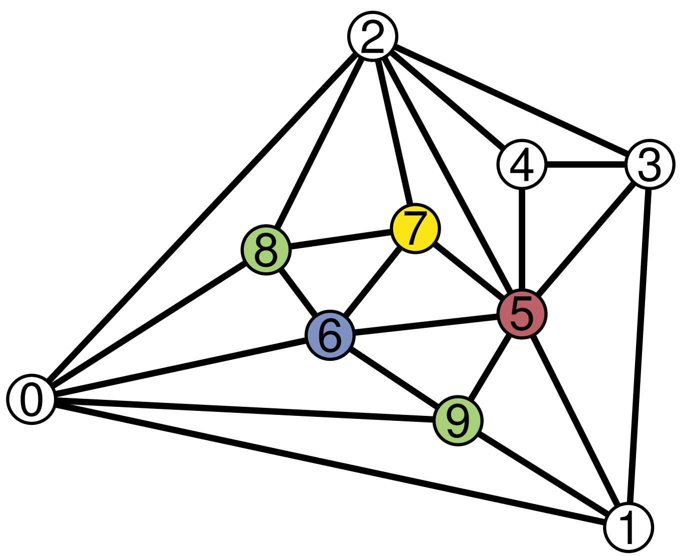
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

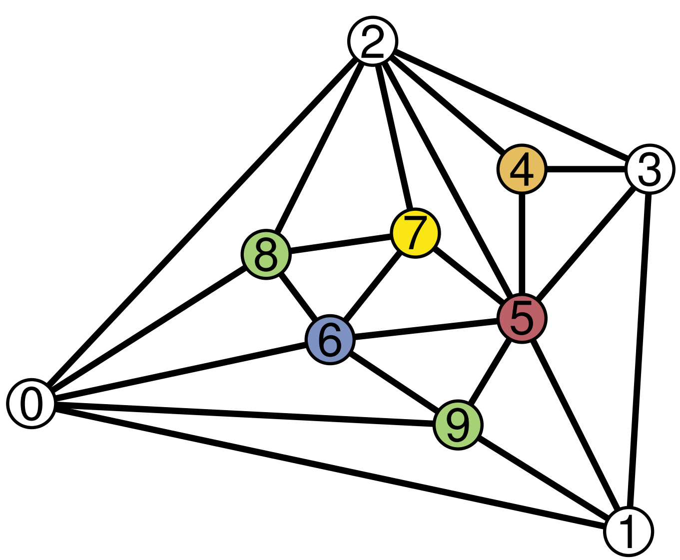
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

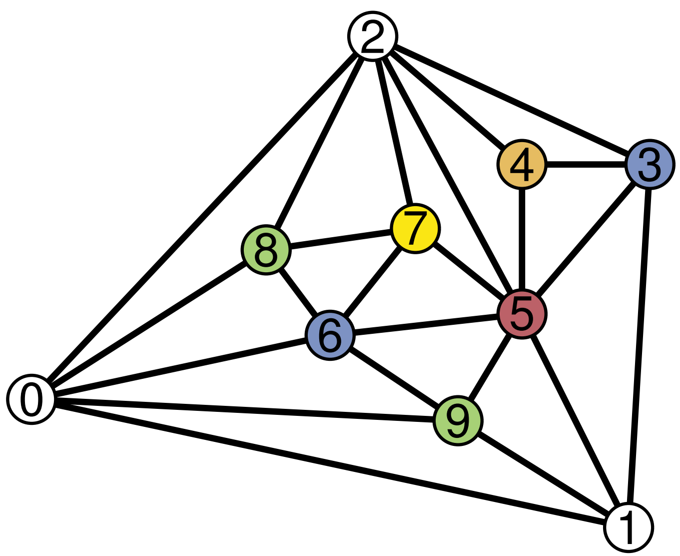
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

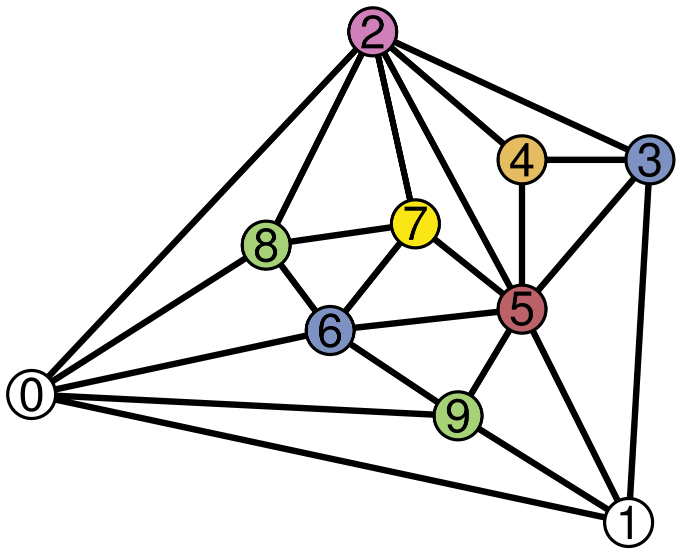
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

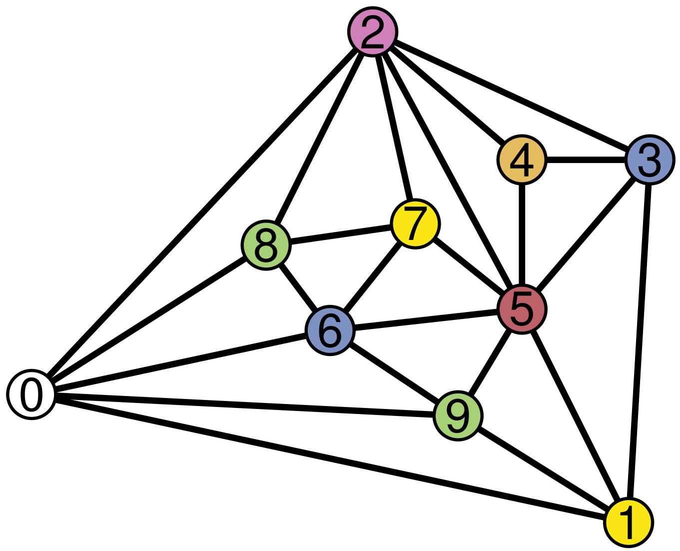
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

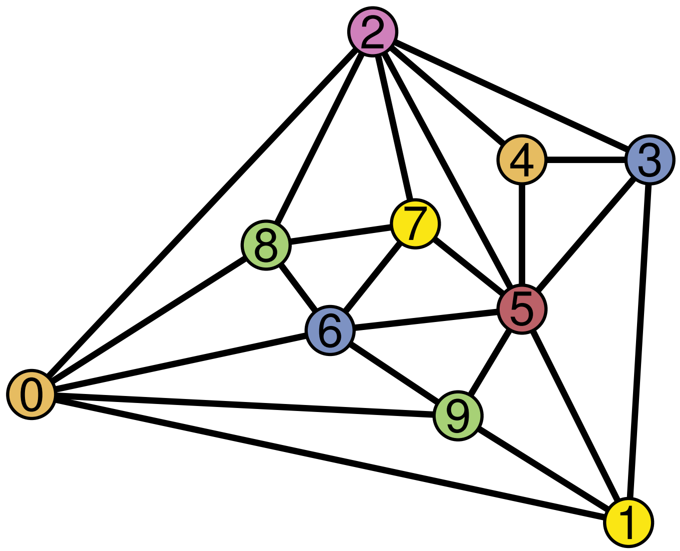
6-Färbung

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Idee:

- Lösche iterativ Knoten mit Grad 5 (oder kleiner).
- Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge.
  $\rightarrow$ Wird ein Knoten gefärbt, so hat er maximal 5 gefärbte Nachbarn.

Beispiel:



- lösche Knoten mit Grad ≤ 5
- Färbe Knoten

Zusammenfassung & Ausblick

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Erinnerung: für allgemeine Graphen ist 6-Färbbarkeit $\mathcal{NP}$-schwer zu entscheiden.

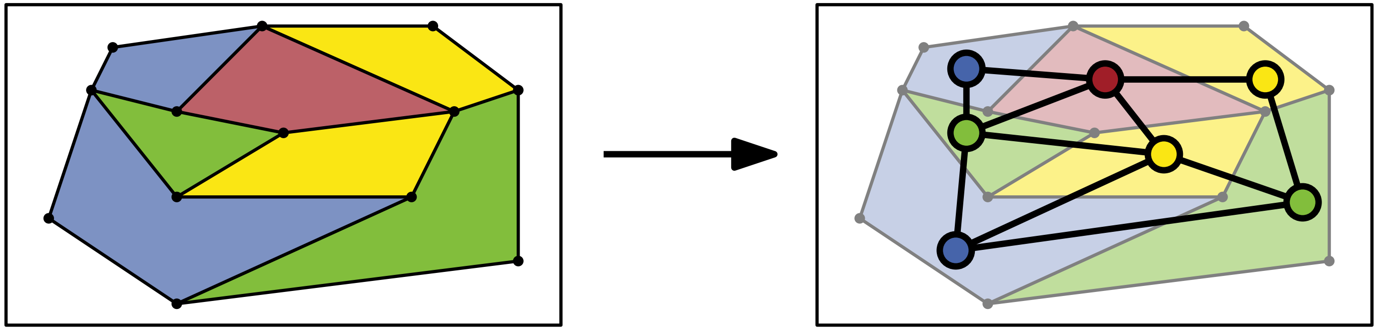
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Zusammenfassung & Ausblick

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Erinnerung: für allgemeine Graphen ist 6-Färbbarkeit $\mathcal{NP}$-schwer zu entscheiden.

Färbung von Karten: Die Repräsentation als Graph liefert einen planaren Graph.

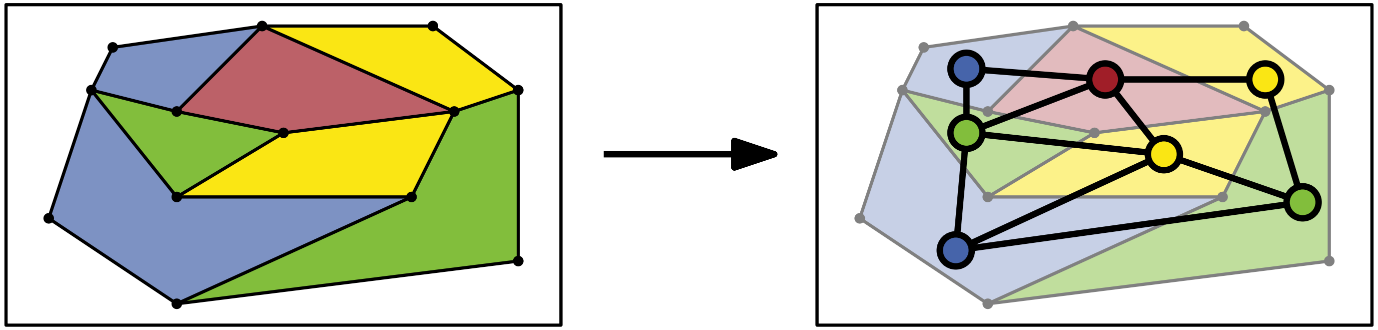


Zusammenfassung & Ausblick

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Erinnerung: für allgemeine Graphen ist 6-Färbbarkeit $\mathcal{NP}$-schwer zu entscheiden.

Färbung von Karten: Die Repräsentation als Graph liefert einen planaren Graph.



Mehr davon?

Satz: Planare Graphen sind 5-färbbar

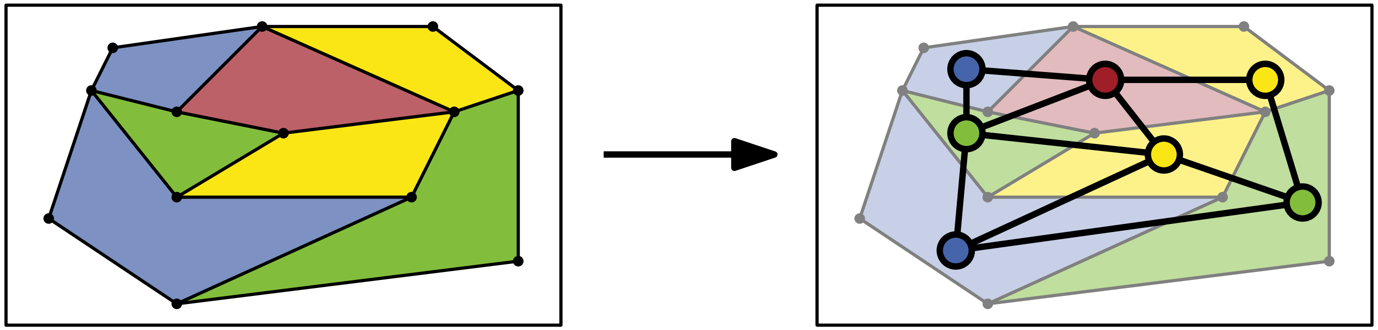
$\rightarrow$ Vorlesung „Algorithmen für planare Graphen“

Zusammenfassung & Ausblick

Satz: Planare Graphen sind 6-färbbar
Für planare Graphen kann eine 6-Färbung in Linearzeit berechnet werden.

Erinnerung: für allgemeine Graphen ist 6-Färbbarkeit $\mathcal{NP}$-schwer zu entscheiden.

Färbung von Karten: Die Repräsentation als Graph liefert einen planaren Graph.



Mehr davon?

Satz: Planare Graphen sind 5-färbbar

$\rightarrow$ Vorlesung „Algorithmen für planare Graphen“

Satz: Planare Graphen sind 4-färbbar

$\rightarrow$ Computerbeweis mit großer Fallunterscheidung