Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 6

Vorlesung Algorithmen II im WS 12/13

Ausgabe 14. Januar 2013
Besprechung 22. Januar 2013

Problem 1: Minimale Schnittbasis – Approximationsalgos relativer Gütegarantie

Der *Kantenraum* $\mathcal{E}$ eines ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ sei der Vektorraum aller Teilmengen der Kantenmenge E von G über dem Körper $GF(2)$ mit symmetrischer Differenz als Vektoraddition. Desweiteren sei ein Schnitt im Graphen G repräsentiert durch die Menge $D \subseteq E$ der Kanten, welche diesen Schnitt kreuzen. Die Menge $\mathcal{C}^\star$ aller Schnitte von G (inklusive dem leeren Schnitt) ist ein Untervekrorraum von $\mathcal{E}$ (ohne Beweis). Die Kosten einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ von $\mathcal{C}^\star$ seien definiert als $c(B) := \sum_{i=1}^{d} c(b_i)$ mit $c(b_i)$ Anzahl der Kanten, die Schnitt b_i kreuzen.

(a) Formulieren Sie die Partitionendarstellung des Schnitts $s_3 := s_1 \oplus s_2$ (mit $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^\star$, $s_1 := (S, V \setminus S), s_2 := (T, V \setminus T)$) in Abhängigkeit der Schnittseiten S und T.

(b) Zeigen Sie: Für je zwei Knoten $u, v \in V$ und jede Basis B von $\mathcal{C}^\star$ gilt, dass mindestens ein Schnitt aus B die Konten u und v trennt.

(c) Zeigen Sie: Untenstehender Algorithmus ist ein polynomieller Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 für das Optimierungsproblem Min-Schnitt-Basis, welches eine minimal gewichtete Basis von $\mathcal{C}^\star$ sucht. (Hinweis: Setzen Sie voraus, dass die Ausgabe B' tatsächlich eine Basis von $\mathcal{C}^\star$ ist).

Algorithmus 1 : Approx-Min-Schnitt-Basis

Eingabe : Graph $G = (V, E)$
Ausgabe : Basis B' des Schnittraumes $\mathcal{C}^\star$ von G

Wähle einen Knoten $v \in V$
$B' \leftarrow \emptyset$
forall $v' \in V \setminus \{v\}$ **do**
  $b_{v'} \leftarrow \{e \in E | e \text{ inzident zu } v'\}$
  $B' \leftarrow B' \cup \{b_{v'}\}$
Return B'

Problem 2: Approximation von Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Das Minimierungsproblem Vertex Cover besteht darin, eine möglichst kleine Knotenmenge $V' \subseteq V$ zu finden, sodass für jede Kante $e \in E$ mindestens einer der beiden Endknoten in V' enthalten ist.

Geben sie eine Algorithmus für Vertex Cover an, der eine Approximationsgüte von 2 hat.

Problem 3: MULTICUT in Bäumen

Das Problem MULTICUT (eingeschränkt auf Bäume) ist wie folgt definiert. Gegeben ist ein Baum $T = (V, E)$ mit n Knoten und $n - 1$ Kanten. Sei außerdem $H \subseteq \binom{V}{2}$ eine Menge von Knotenpaaren, sowie k ein Parameter. Gesucht ist eine Teilmenge $E' \subseteq E$ mit $|E'| \leq k$, sodass das Löschen der Kanten in E' jedes Knotenpaar in H trennt (d.h. s_i und t_i liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten für jedes Paar $(s_i, t_i) \in H$).

Zeigen Sie, dass das Problem MULTICUT auf Bäumen Fixed Parameter Tractable bezüglich des Parameters k ist.